高等工程专科学校教材

线性代数

沈恩秀 主编

华中理工大学出版社

线性代数

沈恩秀 主编

华中理工大学出版社

线 性 代 数

沈恩秀主编

责任编辑　龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：4.5　字数：92 000

1989年8月第1版　　1989年8月第1次印刷

印数：1-8 000

ISBN 7-5609-0393-2/O·67

定价：1.50元

序

十年来，我国的高等教育事业蓬勃发展，尤其是高等专科教育的发展更为迅速。为了进一步提高教学质量，急需编写、出版适合专科教学要求的教材。教材是师生进行教学活动的重要依据，决定着课程甚至专业的教学水平和教学效果。因此切实搞好教材建设，使专科学校的教材能充分体现专科的培养目标，符合教学大纲与教学计划的要求，是当前专科学校深化教学改革中的一项十分重要而又紧迫的工作。

各高等专科学校为了适应教学需要，根据专科的特点和教学要求，自编了部分教材或讲义，在一定程度上克服了长期使用本科教材因而难以体现专科特点的弊病。为了进一步提高教材编写和出版的质量，在国家教委的支持下，在华中理工大学出版社的积极倡导下，沈阳冶金机械专科学校、郑州机械专科学校、哈尔滨机电专科学校和湖南省轻工业专科学校等14所专科学校，于1987年5月成立了“东北、华中地区高等工程专科学校教材协调委员会”，组织和协调有关工程专科学校的教材编写工作。

经参加“协调委员会”的各校负责同志的协商，决定首先编写一套适用面较广的教材，并由各校组织学术水平较高、教学经验丰富的教师分工合作，进行编写。由于参加编写教材的教师的共同努力，以及华中理工大学出版社的大力支持，现已编写好了一套适用于高等工程专科学校的教材，它们是高等数学、线性代数、概率与数理统计、大专物理、理论力学、材料力学、工程力学、电工与电子技术、金属热加工、工程材料、机械原理、机械设计和机制工艺学。这些教材将由华中理工大学出版社陆续分批出版。

这套教材是在认真分析了十年来使用的国内外高校教材、自编讲义和较系统地总结了多年的教学经验的基础上编写出来的，因此较好地体现了专科特点，符合一般专科教学计划和教学大纲的要求，适合全日制高等工

程专科学校以及夜大、职大，函大的工程专科班使用。

这套教材的特点是，符合专科培养目标，内容的深度、广度适当，突出理论联系实际，注意知识的应用和学生能力的培养，适当介绍与反映了现代科学技术的新成就。这套教材不仅具有专科的特色和富于启发性，而且文字简练，结构严谨，插图清晰，是目前比较理想的专科教料，希望推广使用。

由于编写高等工程专科教材是一项新的工作，很多问题尚在探索之中，加之水平有限，编写时间较短，书中难免存在缺点和错误。殷切希望使用本教材的教师和广大读者批评指正。

华北、华中地区高等工程专科学校

教材协调委员会主任　于勤慈

于1988年5月

前　言

1987年4月在华中理工大学出版社召开的教材会议上，根据大专学校的迫切需要，成立了东北、华中地区教材编写协调委员会，确定编写具有专科特色的工科性质的专科学校教材。1987年7月在沈阳冶金机械专科学校组织了数学教材编写组，邀请了东北、华中地区部分专科学校有关教师参加，会上决定先编写“高等数学”、“线性代数”、“概率与数理统计”等课程的教材，并首次讨论了编写大纲和分工问题。

“线性代数”是当前各类专业的必修课程。根据专科学校的特点，本教材在理论方面比本科有较大的削减；为了满足各种专业的需要，内容包括较广；概念的引入尽可能从实际出发，以便于读者理解和掌握线性代数的基本概念和基本方法。本教材各章内容重点突出并具有相互的独立性，以便于各种不同学时数对内容的舍取。全书总学时为24学时到34学时。第一章行列式，第二章矩阵，第三章n维向量组，第四章线性方程组，第五章二次型，第六章线性空间和线性变换。

本书由沈恩秀编写，徐忠东参加了前四章的编写工作，林柯担任主审。参加审稿工作的还有刘智庆、黄进阳、李守杰、吕本吉、邢文斗等同志，在此表示感谢。

由于水平所限，书中难免有不少缺陷和错误，敬请读者提出宝贵意见。

编者

1988年

目　录

第一章 行列式

行列式是求解线性方程组的重要工具，在数学本身和其他科学中有广泛的应用。本章主要在二阶、三阶行列式的基础上，研究n阶行列式的定义及其性质，最后给出利用行列式求解线性方程组的方法——克莱姆（Cramer）法则。

§1 n阶行列式及其性质

一、n阶行列式的定义

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，(1-1)式的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

若利用二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1-2}$$

表示，则方程组(1-1)的解可写为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

由四个元素排列成二行、二列构成的二阶行列式（1-2），

定义为两项的代数和，每项是第一行的一个元素与划去该元素所在的行和列后的另一个元素之积。

同样，利用二阶行列式定义三阶行列式为以下三项的代数和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1-3}$$

它的每项是原行列式中第一行的元素与划去该元素所在的行和列后的一个二阶行列式之积，每项的符号为$(-1)^{1+j}$，其中 j 为该元素所在的列数($j=1,2,3$)。

一般，若 $n-1$ 阶行列式已定义，则 **n 阶行列式**的降阶定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}, \tag{1-4}$$

其中

$$A_{1r} = (-1)^{1+r}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,r-1} & a_{3,r+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$r = 1, 2, \cdots, n.$$

把(1-4)式左端的行列式记为D，右端是 n 项的代数和，其中 A_{1r} 是在D中划去第一行和第 r 列后的一个 $n-1$ 阶行列

式与$(-1)^{1+r}$之积。

从n阶行列式定义容易看出，n阶行列式有$n!$项，每一项的形式为

$$\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中$i_1,i_2,\cdots,i_n$是$1,2,\cdots,n$的一种排列。

例1 试用行列式的定义，求下列行列式D的值，

$$D=\begin{vmatrix}3&0&1&0\\2&0&0&5\\0&1&4&1\\0&2&3&1\end{vmatrix}.$$

解 $D=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&0&5\\1&4&1\\2&3&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&0&5\\0&1&1\\0&2&1\end{vmatrix}$

$$=15(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}+2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}$$

$$+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=-77.$$

例2 计算

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\&\cdots&\cdots&\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 连续使用降阶定义，有

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&&0\\\vdots&\ddots&\\a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&&0\\\vdots&\ddots&\\a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

二、行列式的性质

一般来说，利用行列式的定义计算行列式的值是很麻烦的，如计算五阶行列式就要算 126 项。为此，需要通过行列式的性质，简化行列式的计算。先介绍两个基本性质。

将行列式的行与相应的列互换后，得到的新行列式称为原行列式的**转置行列式**。

性质1 行列式转置后，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质2 将行列式中两行（或列）元素互换，行列式的值只改变符号。

如在 n 阶行列式中互换第 i 行与第 j 行的相应元素，其余元素不变，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行与第 j 行（或第 i 列与第 j 列）互换，记为 $(i)\leftrightarrow(j)$，写在等号上方(或下方)。

对于二阶、三阶行列式，性质 1、2 可以直接验证；对于 n 阶行列式，可用归纳法证明。因超出本书要求，在此证明从

略。

由性质 1 可知，行列式对行成立的性质，对列也成立，因此，以后我们讨论行列式的性质时，只讨论行的性质。

例3 利用行列式的性质 1 和例 2 的结果，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22}\cdots a_{nn}.$$

等号左侧的行列式称为**上三角行列式**，右侧的行列式称为**下三角行列式**，并统称为**三角行列式**。可见，三角行列式的值恒等于其对角线上的元素之积。

例4 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & & & & a \\ & 0 & & & b & \\ & & & c & & \\ & & d & & & \\ & e & & & 0 & \\ f & & & & & \end{vmatrix}.$$

解 由行列式的性质 2，互换第 1 行与第 6 行、第 2 行与第 5 行、第 3 行与第 4 行，得

$$D = (-1)^3 \begin{vmatrix} f & & & & & \\ & e & & & 0 & \\ & & d & & & \\ & & & c & & \\ & 0 & & & b & \\ & & & & & a \end{vmatrix} = -abcdef.$$

性质3 行列式中某一行元素的值全为零，则行列式的值为零。

由行列式降阶定义和性质 1、2 可直接证明。

性质4 行列式中某一行元素的公因子可以提到行列式符号外。

证明 先对第一行有公因子加以证明。

利用行列式的降阶定义，得

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + \cdots + ka_{1n}A_{1n}$$

$$= k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果其他行元素有公因子，可利用性质 2 将行列式化为第 1 行元素有公因子的情况。

推论 数乘行列式等于该数乘行列式的某一行的所有元素。

记第 i 行(或列)乘数 k 为$k(i)$，写在等号上方(或下方)。

性质5 如果行列式中两行元素对应成比例，则此行列式的值为零。

首先证明：若行列式任意两行对应元素相等，则行列式的值等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ =0. \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{1-5}$$

对换D的第 i 行与第 j 行，D仍为D；由性质 2，得$D=-D$，所以$D=0$。

由性质 4，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ =0. \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

性质6 如果行列式中某一行各元素均为两项和，则行列式可表示为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ & \cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}6)
$$

由性质 2 和降阶定义，只须对 $i=1$ 的情况证明(1-6)式，读者自己证明。

性质7 把行列式某一行的各元素乘以常数 k 加到其他行的对应元素上，行列式的值不变。

记第 j 行（或列）元素乘数 k 加到第 i 行（或列）对应元素上为 $(i)+k(j)$，写在等号上方(或下方)，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\overset{(i)+k(j)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}7)
$$

利用性质 6 和性质 5、可得(1-7)式，读者自行证明。

利用行列式性质，即可简化行列式的计算

例5 计算

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质，将D化为三角行列式，有

$$D\xlongequal{(1)\leftrightarrow(2)}-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}\xlongequal[(4)-2(1)]{(2)+2(1) \atop (3)-3(1)}-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(4)+2(2)]{(3)+2(2)}-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}\xlongequal{(4)-\frac{17}{16}(3)}-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$=-(-13)\times 16\times\frac{3}{2}=312.$$

例6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 4 & 22 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[(4)-3(1)]{(2)-2(1) \atop (3)-(1)}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0.$$