工程优化原理及应用

OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS

[美] S.S.雷欧 著

祁载康 万耀青 梁嘉玉 译 祁载康 校

北京理工大学出版社

内容简介

本书作者为美国圣蒂亚哥州立大学机械工程系教授，他对工程优化设计理论和应用有多年教学和研究经验。书中着重阐明了各种较近代的优化方法，包括线性规划、非线性规划、几何规划、动态规划、整数规划、随机规划、对策论、变分法、关键路线法、计划评审及检查技术等，并附有一个实用非线性规划的源程序及其考题结果。编著特点是：用形象的图形阐明复杂的数学原理；密切结合工程技术人员的数学基础介绍各种方法；简明扼要，概念和思路清晰，实用性强，每种方法都附有多个工程应用例题，便于掌握和自学。

本书可作为工科院校工程优化原理及应用课本科生和研究生的教材，对研究单位和工厂的工程师们也是一本良好的便于自学的参考书。

Optimization Theory and Application
(Second edition)
S. S. Rao
Wiley Eastern Limited 1984

工程优化原理及应用
S．S．雷欧 著
祁载康 万耀青 梁嘉玉 译
祁载康 校
*
北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 34.75印张 863千字
1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷
ISBN 7-81013-332-2/TP·24
印数：1—3500册 定价：7.15元

译者序

现代设计理论和方法的发展，对改造传统的设计理论和方法、提高产品设计水平、最大限度地缩短设计周期和降低费用都起到了重要作用，它已成为国内外密切关注并已有重大应用效果的研究领域。现代产品的开发，追求优、快、省，一次设计成功的把握性大，并且正向着大型化、复杂化、精密化、光机电一体化的方向发展，要想用传统的以经验为主的方法来寻找最佳结构参数匹配、形状优化和拓朴优化等几乎是不可能的。优化设计理论和方法为解决这方面问题提供了强有力的手段。

现代设计理论和方法，从广义上说应该包括专用的和通用的两大领域。前者指各种工程专业的理论和方法，如振动理论、强度理论、疲劳寿命理论及相应的设计方法等，它是工程设计不可缺少的手段，但仅有这些理论和设计公式，还无法去寻找最佳方案、形状和结构参数。传统方法主要靠人工经验和试凑，以获得一个或几个可行设计解为限。后者不针对具体工程专业，而是把工程问题抽象化为规范的数学模型，然后用现代设计理论和方法提供的手段，在满足各种限制(约束)条件的设计空间中寻找满意的设计结果。可见，单有前者，缺乏设计的科学性；单有后者，缺乏应用的针对性，两者结合才构成完整的现代设计理论和方法。优化设计理论和方法是上述通用领域中发展快，实用性强的一个重要分支。

我国很多工科院校，近年来均已开设了优化设计课程，并已编著出版了多种教材。为了吸取国外的经验，我们从多种国外教材中选择这本书翻译出版，其特点是数学推理过程不过浓，但思路清晰，形象易懂，并有大量工程应用实例。此外，从内容来说，它比较全面地反映了近代优化方法的主要内容，而且有关部分具有相对独立性，便于对本科生和究研生选择不同章节讲授，对工科院校的学生、教师不失为一本好教材。

书中所用的单位基本上是公制，但在极少数例题及习题中应用了英制或非标准公制单位。为此，书的最后附有单位换算表以便读者查用。书中用到的货币单位卢比为印度货币单位。

本书第一章、第二章、第五章、第六章、第十一章及附录部分由万耀青教授翻译；第三章、第四章及第七章由梁嘉玉副教授翻译，其余部分由祁载康教授翻译并负责全书的校审。

尽管我们作了最大努力，但仍难免有错误或不妥之处，敬请读者指正。

译者

1989年10月

目　录

第一章　优化导论

第二章　古典优化方法

第三章　线性规划Ⅰ：单纯形法

第四章　线性规划Ⅱ：修正单纯形法及其它

第五章 非线性规划 I：一维极小化方法

第六章 非线性规划 I：无约束优化方法

第七章 非线性规划 I：有约束优化方法

第八章 几何规划

第九章 动态规划

第十章 整数规划

第十一章 随机规划

第十二章 其它优化问题

第一章 优化导论

1.1 引　　言

优化是在给定环境条件下获取最好结果的行为。在任何工程系统的设计、施工和维护中，工程师必须在各个阶段采取很多工艺和管理方面的决策。所有这些决策的最终目的无非是使完成某一任务所须作的努力最小，或是使其效益最大。因为所须作的努力或所希望的效益在任何实际情况下均可表示为一些决策变量的函数，故优化可定义为寻找给定函数取极大值或极小值的条件的过程。由图 1·1 可见，如果点 x^* 为函数 f（x）的极小点，则该点亦相应为－f（x）函数的极大点。这样，不失一般性，优化可规定为求极小，因函数的极大化可由对此函数的负值来求极小而找到。因为不存在一种优化方法可以有效地求解所有优化问题，故为了求解不同类型优化问题，人们发展了很多优化方法。

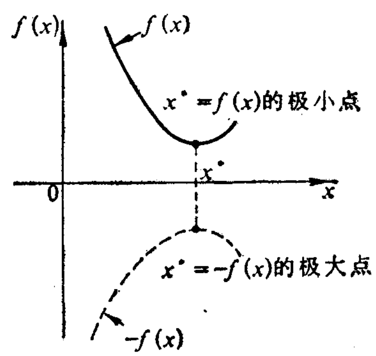

图1.1　$f(x)$的极小是－$f(x)$的极大

寻优法亦称为数学规划方法，是运筹学的一部分。运筹学是数学的一个分支，是涉及用科学的方法和手段进行决策及确定最好或最优解的数学。表 1·1 给出了各种数学规划方法以及运筹学中定义明确的其它研究领域。这种分类法不是唯一的，这里主要是为方便起见而这样分类的。

数学规划方法可用于在给定的约束集合下，求解多变量函数的极小值。随机过程方法可用于分析由一组已知概率分布的随机变量描述

表　1.1

运筹学方法

数学规划方法	随机过程方法	统计学方法
（i）微积分法	（i）统计决策理论	（i）回归分析
（ii）变分法	（ii）马尔科夫过程	（ii）群分析，模式识别
（iii）非线性规划	（iii）排队论	（iii）实验设计
（iv）几何规划	（iv）更新论	（iv）鉴别分析（因子分析）
（v）二次规划	（v）仿真方法	
（vi）线性规划	（vi）可靠性理论	
（vii）动态规划		
（viii）整数规划		
（ix）随机规划		
（x）可分离规划		
（xi）多目标规划		
（xii）网络法：CPM 和 PERT		
（xiii）对策论		

的问题。统计学方法使人们能分析试验数据和构造经验模型来获得物理问题的最精确表示。本书主要是论述适用于求解工程问题的数学规划方法的理论和应用。

1.2 历史发展

优化方法的出现可追溯到 Newton、Lagrange 和 Cauchy 时代。由于 Newton 和 Leibnitz 对微积分的贡献，才使优化的微分学的发展成为可能。Bernoulli、Euler、Lagrange 和 Weirstrass 等奠定了变分学的基础。包含待定乘子的约束问题优化方法是由 Lagrange 创立,并以其名命名为 Lagrange 乘子法。Cauchy 最早应用最速下降法来求解无约束极小化问题。尽管早期的这些贡献，在 20 世纪中以前，优化方法的进展甚小。只是高速数字电子计算机的出现,才使优化程序的实施成为可能,并促使了各种新的方法的进一步发展。紧接着，令人注目的进展相继出现,发表了大量的有关优化方法的文献。这种进展亦引起了在优化理论中一些明确的新领域的出现。

值得注意的是，无约束优化数值方法领域中的主要进展只是在 60 年代才在英国形成。1947 年，Dantzig 提出了求解线性规划问题的单纯形法；1957 年，Bellman 对动态规划问题提出了最优化原理；这两方面的研究为约束优化方法的进展铺平了道路。1951 年，Kuhn 和 Tucker 关于规划问题最优解的必要条件和充分条件的研究工作为以后在非线性规划领域内的大量研究奠定了基础。60 年代初，Zoutendijk 和 Rosen 对非线性规划的贡献有很重要价值。尽管还没有发现一种方法能普遍适用于求解非线性规划问题，但 Carroll、Fiacco 和 McCormick 的研究使很多非线性规划问题能用众所周知的无约束优化方法方便地予以解决。几何规划是 60 年代由 Duffin、Zener 和 Peterson 发展起来的。Gomory 在整数规划方面是开拓者，这是令人鼓舞和发展很快的优化领域之一。其原因是很多现实应用属于这类问题。Dantzig、Charnes 和 Cooper 发展了随机规划方法，并能求解设计参数假设为独立和正态分布的问题。在满足物理限制下希望对多于一个目标或目的的优化导致多目标规划方法的发展。目的规划是众所周知的解特殊类型多目标优化问题的一种方法。目的规划是 1961 年由 Charnes 和 Cooper 为解线性问题而提出的。

网络分析法主要是一种管理控制方法，在 1957 年和 1958 年即已发展。对策论的基础是 Neumann 在 1928 年奠定的，从那以后，这种理论曾被应用于求解若干数学、经济和军事问题。仅在最近几年，对策论才被用于解决一些工程设计问题。

1.3 优化的工程应用

从广义来说，优化可用来解决任何工程问题。为了说明这一学科的广泛领域，下面列出优化在不同工程学科的一些典型应用。

1．飞行器和宇航结构设计中，要使重量极小。

2．求空间运载工具的最优轨迹。

3．土木工程结构设计，例如框架、地基、桥梁、支架、烟囱和水坝等，要求成本极小。

4. 对于地震、风力和其他随机载荷作用下的结构设计，要求重量极小。

5. 水利资源系统设计，要求效益最大。

6. 结构的最优塑性设计。

7. 连杆、凸轮、齿轮、机床和其他机械部件的优化设计。

8. 金属切削过程中加工条件的选择，使生产成本最小。

9. 材料搬运设备设计，如输送机，卡车和起重机等，要求成本最小。

10. 泵、涡轮和热交换装置设计，要求效率最大。

11. 电力设备的优化设计，如马达，发电机和变压器等。

12. 电网优化设计。

13. 销售员在一次旅行中访问不同城市的最短路程问题。

14. 最优生产规划，最优控制和最优调度。

15. 根据试验结果，进行统计数据分析和建立经验（实验）模型，使能得到物理现象的最精确的表示。

16. 化工处理装置和化工厂的优化设计。

17. 制造工业的最优管路网的设计。

18. 工业地点的选择。

19. 设备的维修和更换规划，以减少保养费用。

20. 库存量控制。

21. 资源分配或几个业务之间的分配，使效益最大。

22. 控制生产线中的等待、停机和排队，使费用减少。

23. 规划最好的策略，使在与对手（竞争者）的竞争中获得最大利润。

24. 控制系统的最优设计。

Stoker 讨论了在热力系统设计中优化方法的应用[1.1]。Johnson[1.2]、Krish[1.3]、Haug 和 Arora[1.4]等的著作论述了机器和结构系统的优化设计。参考文献〔1.5〕和〔1.6〕讨论了优化方法在化工和冶金工程问题中的应用。

1.4 优化问题的描述

一个优化或数学规划问题可如下叙述。

$$\left.\begin{array}{l} \text{求 } X=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}\text{，使 } f(X) \text{ 极小} \\ \text{满足于约束} \quad g_j(X)\leqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots m \\ \text{和} \quad l_j(X)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots p \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

这里 X 是一 n 维向量，称设计向量，$f(X)$ 称目标函数，$g_j(X)$ 和 $l_j(X)$ 分别称为不等式和等式约束。变量个数 n、约束个数 m 和/或 p 间不需有任何关系。式（1.1）所

述问题称约束优化问题。❶某些优化问题不包含任何约束，可叙述为：

$$求\ \mathbf{X}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix},\ 使\ f(\mathbf{X})\ 极小 \tag{1.2}$$

这种问题称无约束优化问题。

设计向量。任何工程系统或工程部件都是由一组量来描述的，其中某些量在设计过程中可视为变量。一般说来，若某些量在设计中通常是固定不变的，则称预定参数。所有其他量在设计过程中是可变的，称设计变量或决策变量 x_i，$i=1$，2，n。设计变量的总和可用设计向量 $\mathbf{X}$ 表示，即

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

举例来说，考虑图 1.2 所示齿轮副设计。这种齿轮副设计可用其齿面宽 b、齿数 T_1 和

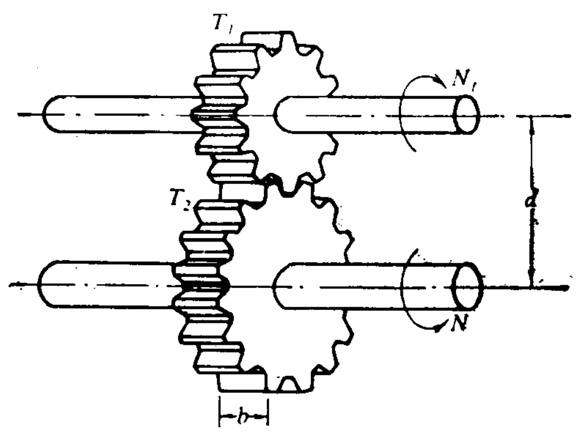

图1.2 一对啮合齿轮

T_2、中心距 d、压力角 φ、齿形及材料来表征。如果中心距 d、压力角 φ、齿形和齿轮材料是预先选定的，则这些参数称预定参数。其余参数可统一用设计向量

$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} b \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

来表示。若对 b、T_1、T_2 的选择无任何限制，则此任意三个数将构成一个齿轮副设计。取 n 维笛卡儿空间的每一坐标轴表示一个设计变量 x_i（$i=1$，2，…，n），则此空间称设计变量空间。在 n 维设计空间中的一个点叫设计点，它表示可能是也可能不是设计问题的一个解。在齿轮副设计情况下，例如设计点

❶ 在数学规划书中，有若干种方法可用来处理具有等式约束的问题，但在约束优化问题的描述中，为简单起见，常常把等式约束 $l_j(\mathbf{X})=0$，$j=1$，2，…，p 略去。

$$\begin{Bmatrix} 1.0 \\ 20 \\ 40 \end{Bmatrix}$$

表示一个可能解，而设计点$[1.0, -20, 40]^T$则是一个不可能的解，因齿数不可能为负值。

设计约束。在很多实际问题中，设计变量不能任意选择，它们必须满足某种规定功能要求和其他要求。为产生一个可接受的设计而必须满足的限制统称**设计约束**。表示系统性态或特性限制的约束称性态或功能约束。表示设计变量的物理限制，象可用性、可制造性及可运输性等，称几何或边界约束。举例来说，如图 1.2 所示齿轮副，由于强度要求，齿面宽 b 取值不能小于某一定值。类似地齿数比 T_1/T_2 是由输入速度 N_1 和输出速度 N_2 要求所决定的。这些约束因它们取决于齿轮副的特性，故称性态约束。T_1 和 T_2 不能是任意实数，只能取整数。此外，由于制造上的限制，T_1 和 T_2 应有上、下界，这些约束取决于物理限制，故称边界约束。

约束曲面。为说明起见，考虑一个仅有不等式约束 $g_j(\mathbf{X}) \leqslant 0$ 的优化问题。满足方程 $g_j(\mathbf{X}) = 0$ 的$\mathbf{X}$值的集合在设计空间中形成一个超曲面，称**约束曲面**。注意这是一个$(n-1)$维子空间，n为设计变量个数。约束曲面把设计空间分为两个区域：$g_j(\mathbf{X}) < 0$ 区和 $g_j(\mathbf{X}) > 0$ 区。这样，位于超曲面上的各点刚好满足约束 $g_j(\mathbf{X})$，而位于 $g_j(\mathbf{X}) > 0$ 区的各点是不可行的或不可接受的，位于 $g_j(\mathbf{X}) < 0$ 区内的各点是可行的或可接受的。所有约束曲面 $g_j(\mathbf{X}) = 0$，$j = 1, 2, \cdots, m$的集合（这些约束曲面把可接受区域分离开）称**组合约束曲面**。

图 1.3 表示一假想的二维设计空间，画阴影线的区域为不可行区。位于一个或多个约束曲面上的点称**边界点**，相应于边界点的约束称起作用约束。不在任何约束曲面上的点称**自由点**。取决于一个特殊设计点是否位于可接受或不可接受区，这种点可能是下面四种类型之一：

（i）自由和可接受点。

（ii）自由和不可接受点。

（iii）边界和可接受点。

（iv）边界和不可接受点。

全部四种类型点示于图 1.3。

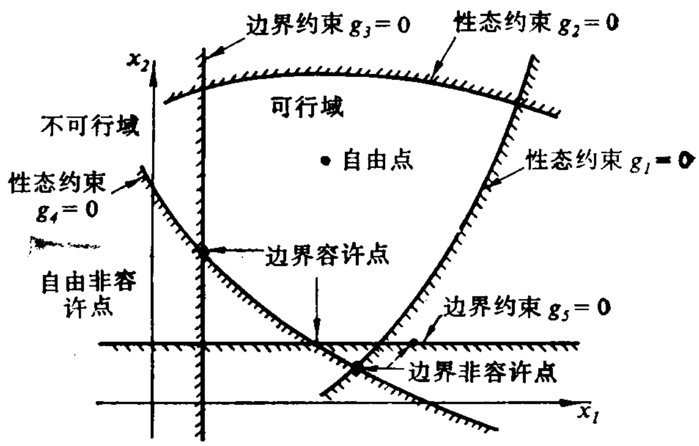

图1.3 假想二维设计空间中的约束曲面

目标函数。传统设计过程的目的在于找到一个可接受的或合适的设计，这种设计仅仅满足问题的功能要求和其他要求。一般说来，可行设计有多个。优化设计的目的是从很多可行设计中找出最好的那一个。这样，必须选择一个准则来比较不同的可行设计，从而选择最好的。这一最优化准则，当以设计变量的函数来表达时，就称**准则函数**或**价值函数**或**目标函数**。目标函数的选择由问题的性质所决定。要求极小化的目标函数，在飞行器和空间运载工具中通常取为重量。在土木工程结构设计中，通常取成本最小作为目标。在机械工程系统设计中，很明显人们选择机械效率最大作为目标。因此，目标函数选择在很多设计问题中是明确的。然而有这种情况，对某一特定准则得到的优化结果可

能对另一准则来说是不满意的。例如在机构设计中，具有最优传动角的设计可能不会导致相当于作用力最小。类似地，在静不定结构中，满足应力设计并不意味着重量最小，重量最小亦不表示最便宜。因此，目标函数的选择可能是整个优化设计过程中最重要的一个决策。

在某些情况下，可能要求同时满足几个准则。例如一齿轮副，可能要求设计成在规定功率下重量最小且传动效率最大。包含多个目标函数的优化问题，称多目标规划问题。具有多个目标时，会有引起矛盾的可能性。一种处理这类问题的简单方法，是把实际目标函数表示为互相矛盾的多个目标函数的线性组合。若 $f_1(\mathrm{X})$ 和 $f_2(\mathrm{X})$ 是两个可能的目标函数，则可构造一个新目标函数为

$$f(\mathrm{X})=\alpha_1 f_1(\mathrm{X})+\alpha_2 f_2(\mathrm{X}) \tag{1.3}$$

式中 α_1 和 α_2 为常数，其值大小表明一个目标函数相对另一个目标函数的重要程度。

目标函数曲面。满足 $f(\mathrm{X})=c=$ 常数的所有点的轨迹在设计空间形成一超曲面，每一个 c 值相应曲面族中一个不同的曲面。图 1.4 表示在假想的二维设计空间中不同的目标函数曲面。

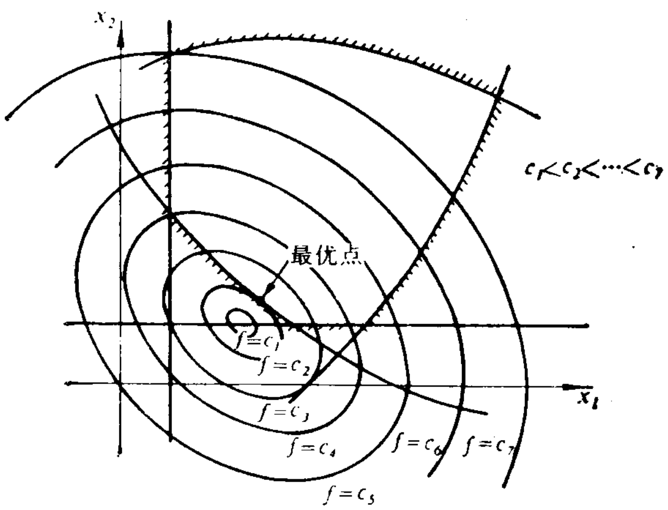

图1.4 目标函数的等线值

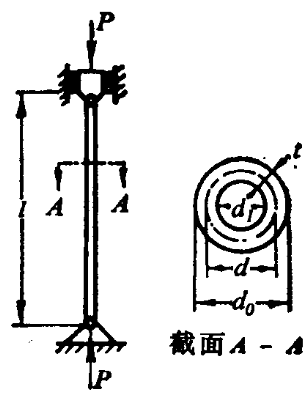

图1.5 受压的薄壁柱

一旦画出了目标函数曲面与约束曲面，最优点就不难确定。但主要问题是当设计变量个数超过两个或三个时，约束曲面和目标函数曲面变得很复杂以致很难形象化，这样的问题就必须作为一个纯数学的问题去求解。下面这个例子可说明用图形法进行优化的过程。

例1.1 要求设计一个如图 1.5 所示薄壁断面的均匀柱，它承受的压缩载荷 $P=2500$ 千克力，要求成本最小。柱所用材料的弹性模量 $E=0.85\times10^6$ 千克力每平方厘米，密度 $\rho=0.0025$ 千克每立方厘米。柱长为 250 厘米。柱产生的应力应小于屈曲应力，当然亦应小于屈服应力（其值为 500 千克力每平方厘米）。钢管的平均直径限制在2.0到 14.0 厘米范围内，并已知在市场上买不到壁厚小于 0.2 及大于 0.8 厘米的钢管。柱的成本，包括材料和结构成本可取为 $5W+2d$，这里 W 是重量，d 是柱的平均直径。

解 设计变量是平均直径（d，厘米）和管的壁厚（t，厘米）

$$\mathrm{X}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d \\ t \end{Bmatrix} \tag{E_1}$$

应极小化的目标函数为

$$f(X) = 5W + 2d = 5\rho l\pi dt + 2d = 9.82x_1x_2 + 2x_1 \quad (E_2)$$

性态约束可表示为

产生的应力≤屈服应力

及　　产生的应力≤屈曲应力

产生的应力和屈曲应力可表示为

$$产生应力 = \frac{P}{\pi dt} = \frac{2500}{\pi x_1 x_2}$$

及

$$屈曲应力 = \frac{欧拉抗弯载荷}{\pi dt} = \left(\frac{\pi^2 EI}{l^2}\right)\frac{1}{\pi dt}$$

式中

I = 柱断面的二次面矩

$$= \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}(d_0^2 + d_i^2) \times (d_0 + d_i)(d_0 - d_i)$$

$$= \frac{\pi}{64}[(d+t)^2 + (d-t)^2][(d+t) + (d-t)] \times [(d+t) - (d-t)]$$

$$= \frac{\pi}{8} dt(d^2 + t^2) = \frac{\pi}{8} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)$$

这样，性态约束可改写为

$$g_1(X) = \frac{2500}{\pi x_1 x_2} - 500 \leqslant 0 \quad (E_3)$$

及

$$g_2(X) = \frac{2500}{\pi x_1 x_2} - \frac{\pi^2(0.85 \times 10^6)(x_1^2 + x_2^2)}{8(250)^2} \leqslant 0 \quad (E_4)$$

给出的边界约束为

$$2.0 \leqslant d \leqslant 14.0$$

$$0.2 \leqslant t \leqslant 0.8$$

写成标准形式为：

$$g_3(X) = -x_1 + 2.0 \leqslant 0 \quad (E_5)$$

$$g_4(X) = x_1 - 14.0 \leqslant 0 \quad (E_6)$$

$$g_5(X) = -x_2 + 0.2 \leqslant 0 \quad (E_7)$$

$$g_6(X) = x_2 - 0.8 \leqslant 0 \quad (E_8)$$

因仅有两个设计变量，故可用如下图解法。

首先把约束曲面画在二维设计空间中，两个设计变量 x_1 和 x_2 分别为坐标轴。为了画第一个约束，我们有

$$g_1(X) = \frac{2500}{\pi x_1 x_2} - 500 \leqslant$$

即

$$x_1 x_2 \geqslant 1.593$$

因而曲线 $x_1x_2 = 1.593$，即表示约束 $g_1(X) = 0$。只要找出曲线上几个点，即可画出此曲线。具体作法是给出一组 x_1 值，由 $x_1x_2 = 1.593$ 关系式求出相应的 x_2 值，结果如下：

	$x_1x_2 = 1.593$						
x_1	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0
x_2	0.7965	0.3983	0.2655	0.1990	0.1593	0.1328	0.1140

画出曲线 P_1Q_1，使其通过上述各点，如图1 6。$g_1(X)>0$ 表示不可行域，即 $x_1x_2<1.593$，用阴影线表示。❷类似地第二个约束 $g_2(X)<0$ 可表示为 $x_1x_2(x_1^2+x_2^2)\geqslant 47.3$，在约束曲面 $g_2(X)=0$ 的各点可求得如下：

	$x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=47.3$						
x_1	2	4	6	8	10	12	14
x_2	2.41	0.716	0.219	0.0928	0.0473	0.0274	0.0172

P_2Q_2 曲线通过这些点。这里不可行域同样用阴影线表示，如图1.6。边界约束很易画出，因它们仅是几条直线。画出全部六个约束后，显而易见可行域即为ABCDEA所限定的面积。

其次，在求最优点之前，还要画出目标函数的等值线。为此，对于

$$f(X)=9.82x_1x_2+2x_1=c=\text{常值}$$

给出一组 c 值，即可画出各等值线。

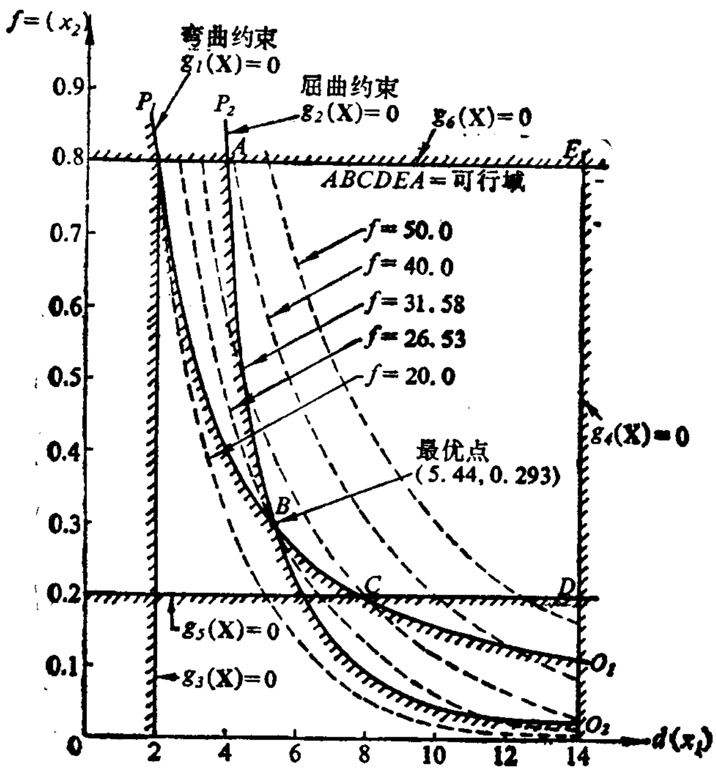

图1.6 例1.1的作图法优化

对给定的不同 c 值的等值线可由如下各点来画出。

当 $9.82x_1x_2+2x_1=50.0$：

x_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x_1	16.77	12.62	10.10	8.44	7.24	6.33	5.64	5.07

当 $9.82x_1x_2+2x_1=40.0$：

x_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x_1	13.40	10.10	8.08	6.75	5.79	5.06	4.51	4.05

❷ 不可行域可用检验原点是位于可行域，还是位于不可行域来识别。

当 $9.82x_1x_2+2x_1=31.58$（通过角点C）：

x_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x_1	10.57	7.96	6.38	5.33	4.57	4.00	3.56	3.20

当 $9.82x_1x_2+2x_1=26.53$（通过角点B）：

x_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x_1	8.88	6.69	5.36	4.48	3.84	3.36	2.99	2.69

当 $9.82x_1x_2+2x_1=20.0$；

x_2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x_1	6.70	5.05	4.04	3.38	2.90	2.53	2.26	2.02

这些等值线示于图 1.6，在不违反所有约束下，目标函数值不可能再比 26.53 小（相应于B点），因此，最优点B为 $d^*=x_1^*=5.44$ 厘米和 $t=x_2^*=0.293$ 厘米，此时 $f_{\min}=26.53$。

1.5 优化问题分类

优化问题可用如下不同方法分类：

（i）**按是否有约束分类**。如前所述，取决于问题中有无约束，任何优化问题可分为有约束或无约束两种。

（ii）**按设计变量性质分类**。根据遇到的设计变量的性质，优化问题可分为两大类别。第一类问题为寻找一组设计参数值，使在满足一定约束条件下，这些参数的某规定函数达极小。例如在满足最大挠度限制下，棱柱梁最小重量设计问题，如图 1.7(a)所示，此问题可叙述如下。

求
$$\mathbf{X}=\begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix}，使$$
$$f(\mathbf{X})=\rho lbd \text{ 极小} \tag{1.4}$$
满足于约束
$$\delta_{tip}(\mathbf{X})\leqslant\delta_{\max}$$
$$b\geqslant 0$$
及
$$d\geqslant 0$$

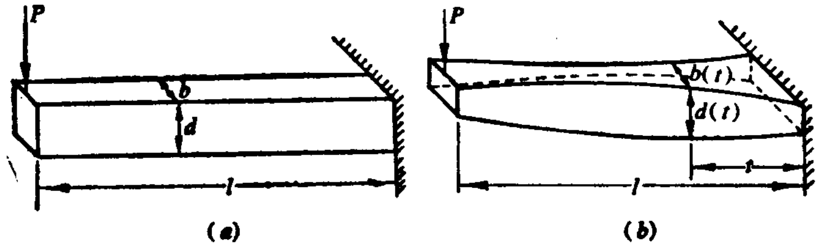

图1.7(a，b) 承受集中载荷的悬臂梁

式中ρ为密度，δ_{tip}是梁端点的挠度。这种问题称为参数优化或静态优化问题。第二类问题，目的是寻找一组设计参数，(这些设计参数是一些其他参数的连续函数)，在满足

于规定的约束条件下使目标函数极小。若矩形梁的横断面尺寸允许沿长度方向改变，如图 1.7（b）所示，则这个优化问题可叙述为：

求
$$X(t)=\begin{Bmatrix} b(t) \\ d(t) \end{Bmatrix} \text{使}$$

$$f[X(t)]=\rho\int_0^l b(t)d(t)\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

极小

满足于约束

$$\delta_{tip}[X(t)]\leqslant\delta_{max}, \qquad 0\leqslant t\leqslant l$$
$$b(t)\geqslant 0, \qquad 0\leqslant t\leqslant l$$

及
$$d(t)\geqslant 0, \qquad 0\leqslant t\leqslant l$$

这里设计变量是长度参数 t 的函数。这类优化问题不仅取决于一组变量，而且取决于在某类空间中设计变量的轨迹，这就是所谓轨迹优化问题或动态优化问题[1.7]。

（iii）**按问题的物理结构分类**。根据问题的物理结构，优化问题可分为最优控制问题和非最优控制问题。

最优控制问题

一个最优控制问题通常可用两类变量来描述，即控制变量（设计变量）和状态变量。控制变量调节系统从一阶段到另一阶段的演变，而状态变量描述系统在任一阶段的性态。明确地说，最优控制问题是包含若干个阶段的数学规划问题，这里每一阶段都是由前一阶段按确定方式演变来的。问题是要求一组控制或设计变量，在满足于对状态变量和控制变量有关的一定约束条件下，使总的目标函数在整个 l 个阶段为极小。

此问题可叙述如下[1.7]：

求 X，使

$$f(X)=\sum_{i=1}^{l} f_i(x_i,\ y_i) \tag{1.6}$$

极小，满足约束

$$q_i(x_i,\ y_i)+y_i=y_{i+1}, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$
$$g_j(x_j)\leqslant 0, \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$
$$h_k(y_k)\leqslant 0, \quad k=1,2,\cdots,l$$

这里 x_i 是第 i 个控制变量，y_i是第 i 个状态变量，f_i 是第 i 阶段对总目标函数的作用；g_j、h_k 和 q_i 分别为 x_j，y_k 及x_i 和 y_i 的函数。下面例子可用来说明最优控制问题的性质。

例1.2 设计一火箭使其在外层空间由一燃料仓库飞向另一燃料仓库，已知两燃料仓库之间距离为 $10s$，火箭推力在每飞行 s 距离后可瞬时改变。若在第 i 阶段最大可能推力为 c_i（$i=1,2,\cdots,10$），问火箭推力应怎样控制，使在最短时间内飞行完总距离。假设火箭的飞行路线是直线，且无外力作用在火箭上。

解❶ 令路程上推力可变化的各控制点序号为 1，2，…，11。设 x_i 是火箭从点 i 飞行到 $i+1$ 点的推力，v_i是火箭通过第 i 个控制点的速度。设火箭质量 m 为常值，加速度 a_i 为

---

❶ 在这一章的本例和其他例子中，仅给出问题的表达式，没有最后解答。