高等学校教学参考书

矿业系统工程

主编 邢中光 副主编 刘明远

中国矿业大学出版社

高等学校教学参考书

矿 业 系 统 工 程

主 编 邢中光
副主编 刘明远

中国矿业大学出版社

内容提要

《矿业系统工程》或称《矿业运筹学》是应用现代数学方法和电算手段在矿业生产管理、设计和科研方面寻求最优决策的一门新兴矿业学科。本书较系统地介绍了系统工程的基本理论和方法，以及系统工程在煤矿应用的一般性实例。

本书可作采矿工程专业的教材，亦可供有关专业和煤炭科研、管理人员参考。

高等学校教学参考书

矿业系统工程

主　编　邢中光

副主编　刘明远

中国矿业大学出版社出版　发行

江苏省新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/16　印张11.5　字数276千字

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷

印数：1-1500

ISBN 7-81021-499-1

TD.94　定价：4.50元

前　言

随着我国煤炭工业的迅速发展，对经济和管理工作要求越来越高。近几年来各煤炭高校相继开设了“运筹学”或“矿业系统工程”等课程。为了满足采矿工程专业教学及技术人员学习的需要，编写了这本《矿业系统工程》。本书力争理论联系实际，选择的实例，绝大部分已在煤炭系统有关方面得到了应用。另外也力争将近年来开始在煤炭系统应用的比较新的理论和方法选编进来，如层次分析法、预测方法、模糊数学、系统动力学等等。

在本书所论述的主要理论和方法中，均编制了电算程序，亦适当列举了应用实例。

在编写过程中注意到了内容的科学性、先进性、实践性和适用性，使本书在以前编写的教材基础上，又提高了一步。

本书由黑龙江矿业学院邢中光主编、刘明远副主编。其中，绪论及第四章由邢中光执笔；第一章李孝东执笔；第二章孙广义执笔；第三章汤万金执笔；第五章董春游、刘明远执笔；第六、八章宁云才执笔；第七章董春游执笔；第九章郝传波执笔。

本书是按60～80学时编写的，可根据情况选取。本书可供采矿工程专业作为教材，亦可供矿建、企管等专业和煤炭工程技术人员参考。

本书在编写过程中得到了鸡西、鹤岗、双鸭山、七台河等矿务局及有关方面的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，加上时间仓促，一定会存在不妥之处，希广大读者批评指正。

编者

1989.10

绪　论

半个多世纪以来，在国际上“系统”作为一个研究对象引起了很多人的注意。在四十年代中，出现了“系统工程”（SYSTEMS ENGINEERING）一词，这是对当时一些工程实践中卓有成效的新观点新方法的最好命名。我国五十年代开始研究和应用系统工程的理论与方法。七十年代末，我国开始广泛宣传和推广系统工程。特别是近年来在教育、交通、能源、工程设计、农业、矿业、经济、企业管理、军事等方面应用系统工程取得了可喜成果，获得了良好的社会效果和可观的经济效益。矿业系统工程是系统工程与矿业工程两个大学科的交叉结合，也可以说是系统工程的基本理论和方法在矿业工程的具体应用。

一、基本概念

1.系统

系统就是一些具有特定功能的、相互间以一定规律联系着的物体所组成的总体。

钱学森同志对系统下了比较精确的定义，即：我们把极其复杂的研究对象称为“系统”。即由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合成的具有特定功能的有机整体，而且这个“系统”本身又是它所从属的一个更大系统的组成部分。

例如，研制一种战略核导弹，就是研制由弹体、弹头、发动机、制导、遥测、外弹道测量和发射等分系统组成的一个复杂系统；它可能又是由核动力潜艇、战略轰炸机等的组成部分。又例如，矿井运输系统是由工作面、平巷、上（下）山、运输大巷、井底车场等运输分系统所组成，它完成运输煤炭这一功能，彼此互相联系，不可分割，它又是矿井生产系统的一部分。

系统要具有整体性、相关性和可控性等。

2.工程

可以用任务一词来代替。即组织一批人力、物力来完成一项任务。

3.系统工程

其比较朴素的思想是，构造一个系统时，包括把人力、物力组织起来，很好地完成一个任务，叫做系统工程。

系统工程是一个总类名称。按体系性质不同，还可以分为：军事系统工程，教育系统工程，矿业系统工程，农业系统工程……等等。

钱学森的观点是：系统工程是组织管理“系统”的规划、研究、设计、制造、试验和使用的科学方法；是一种对所有“系统”都具有普遍意义的科学方法。亦可以说，系统工程是用科学理论把客观规律用数学模型的形式表达出来，最后能上电子计算机计算的科学方法。

系统工程的概念并不神秘，可以广泛应用于比较大和复杂的系统，亦可应用于小设备的设计与制造和日常生活中。小设备的研制要考虑设备各部件的协调和优化等。治病，亦要人、病、证三结合以人为主统筹考虑，要把人和环境作为复杂体系来考虑。在人类历史上，凡是比较成功的工程建设，都不自觉地运用了系统工程的方法。如公元前250年都江堰工程，由“鱼咀”岷江分水工程、“飞沙堰”分洪排沙工程、“宝瓶口”引水工程这三项工程巧妙结合而成，按现代的系统工程观点来分析，也是一项杰出的工程。它体现了系统工程的

理论与方法。

二、系统工程的理论基础

系统工程的科学理论可以用我国传统的名词——运筹学来概括。

运筹学的具体内容包括线性规划、非线性规划、排队论、搜索论、库存论、博奕论、可靠性理论、决策论等。当前，运筹学尚不十分成熟，还很不系统。随着科学的发展会更加系统、更加严密、更加完整。

系统工程的理论基础除了上面谈到的以外，还有概率论与数理统计、模糊数学、控制论、网络计划技术、大系统理论等等。

本书根据矿业系统工程的实际应用情况，只介绍以下内容：线性规划、非线性规划、网络计划技术、可靠性理论、模糊数学、层次分析法、电子计算机模拟、预测方法、战略研究等。对基础理论只作简要介绍，不作详细推导、论证，重点放在介绍方法与应用上。

系统工程不仅需要科学理论工具，而且需要强有力的运算手段——电子计算机。对于不太复杂的研制任务，运算量不大可以用人工来完成。但对于较为复杂的系统工程问题，都需要采用电子计算机。

三、系统工程在我国的发展与应用

五十年代可以说是我国运筹学发展的初级阶段，主要研究了运输问题，国家经济计划的制订，质量控制等问题。

六十年代是发展的中级阶段或叫积累阶段。应用领域越来越广，成立了必要的研究机构。应用从局部开始扩大到全局。在钢铁、石油和运输等工业得到了应用。作为投入——产出方法的应用，鞍钢整个企业的金属平衡表在1965年制订出来了。在华罗庚教授的亲自主持下，优选法和统筹法在全国二十二个省市取得了大批成果。

七十年代以来，可以说是系统工程发展的成熟阶段。运筹学的各个分支如最优化方法、图论与网络、排队论等理论都有了新的发展。已大量研究全局性问题，复杂系统，大系统问题。如国民经济发展的战略研究、人口控制问题、能源发展模型等等。

当前系统工程的应用相当广泛。下面举一些成果，从中可以看出其应用领域和采用的理论与方法。

1. 教育规划模型及其应用

根据全国专门人才需要和补充量，确定各类学校的规模、发展变化情况及学生流状态，从而作出教师需求预测，作出全国教育发展规划。这是汪应洛等人的研究成果，它采用了“开环式”人机对话的模拟模型，部分子系统采用了优化模型。

2. 运用系统工程方法解决土地利用总体规划中的问题

一般应用线性规划理论制定某一年的各业用地结构最优规划、中长期规划问题，往往采用动态规划方法来解决。这个课题是用了变系数线性规划理论来制定用地结构的中长期规划。

3. 用系统工程方法对新港址进行评价和选优

港口选址是政治、经济、地理条件、技术、交通、城市总体规划等相互交织在一起的十分庞大复杂的系统。它采用了可能——满意度的多目标决策方法。

4. 大气环境系统分析研究

大气环境污染控制涉及到城市经济、能源、公用事业的发展以及环境工程污染防治等多方面。防治规划模型是一综合性模型，称为大气环境——经济——能源规划模型，为多目标

线性规划模型。对市区工业发展、供能布局、工业布局、城市发展等提出了合理方案，以及指出以上问题和大气环境质量之间的关系。

5.在公共交通管理中应用计算机模拟的初步探讨

对一条公共汽车线路的运行过程进行计算机模拟。采用了时间步长法对系统每5s进行一次考察，得出了该线路的最理想方案。

矿业系统工程在八十年代得到了发展，应用也越来越广泛。开始研究一些局部问题。例如：开采方法中的工艺和参数选择，巷道布置方案的选择和参数优化，矿井优化设计模型的研究，井巷施工工期的网络分析和计划管理，露天矿装运系统的模拟研究，矿井井上、下生产系统的模拟，生产矿井年度计划的合理编制，应用模糊数学理论对设计方案进行评判等等。近几年来对全局性问题即大系统进行了研究，已取得了一些研究成果。主要是应用系统分析的方法将运筹学的有关分支综合应用，对大系统的研究取得了很好的效果。如应用线性规划、网络技术、决策论、计算机模拟、层次分析法和系统动力学综合运用，研究矿区长远规划的制定，目前已在平顶山矿区得到了应用。又如全国或地区能源模型的制定，一个矿山企业的设计、计划与管理，应用决策论和层次分析法研究地区统配煤矿、地方矿、乡镇矿合理发展比例等。

四、系统工程的研究方法和步骤

对于运筹学的各个分支其研究方法和步骤比较明确、具体，基本上分为以下几步：

（1）阐述问题；

（2）建立数学模型；

（3）求解；

（4）对解进行检验与校正；

（5）实施。

对于解决复杂系统或者说大系统问题，当前主要采用系统分析法，大致可以分为以下几个步骤：

1.阐述问题　在问题搞清后，要选择评价系统功能的目标。

2.系统综合　一个大系统由许多小系统组成，每个小系统还可能有不同分支，这样层次较多，要分清层次提出多个备择系统方案，这些备择系统方案一定是可行的。进行系统综合时应尽量详细，不要漏掉可行方案，尤其要防止漏掉比较好的方案。

3.系统分析　用系统的观点分析被研究的对象和有关元素，亦可进行必要的初选，建立解决具体问题的系统。在备择方案的基础上，进行定性分析，辅以一定的定量判断，相当于传统的方案比较法中的技术经济分析阶段。

4.系统评价　系统评价主要是根据选定的目标进行定量分析。要对所有备择方案进行详细的评价，当目标有多个，就要分清主次，采用多目标优化方法选择最优方案。

5.决策与实施　有时最优方案不止一个，选择最优方案时要考虑各种因素，必要时领导与专家共同研究，最后选择出比较满意的方案。方案确定后，要进行实施。在实施中如发现问题要及时修正，若问题较大，要分步骤检验在哪个环节出现了问题，若问题严重就要考虑重新开始工作。

目　录

第一章 线 性 规 划

在煤矿生产经营中，我们经常遇到各种各样的问题需要进行数学计算，也常遇到一些生产或者工程问题需要我们去计划组织及管理。在计算问题中往往要遇到一类求在什么状态、条件或范围内能得到最高的效率，最低的成本或最大的产量等问题，这类问题在数学上叫求极值问题。线性规划是一种合理利用资源和合理调配资源的数学方法，这里讲的资源包括人力、物力、资金、设备、能源等等。经营管理工作中，往往碰到如何恰当地运转由人员、设备、材料、资金、时间等因素构成的体系，以便更有效地实现预定工作任务问题。这一类统筹规划问题用数学语言表达出来，就是在一组约束条件下寻求一个函数（称为目标函数）的极值问题。如果约束条件表示为线性等式及线性不等式，目标函数表示为线性函数时，就称为线性规划问题。

第一节 基本概念和图解法

一、线性规划的数学模型

1.举例

现在用两个实例说明什么是线性规划，如何用数学语言来描述它们。

例1：某矿开采二层煤，第一层的粉煤采出率为20%，第二层粉煤采出率为30%。若仅按第一层进行开采，第一层主要环节的生产能力为50万t/a。若仅按第二层进行开采，第二层主要环节的生产能力为20万t/a。由于采掘工作超前条件的限制，第二层年产量不能超过第一层的年产量。按照粉煤的供销情况，矿井粉煤年产量不应超过12万t/a。试确定这二个煤层的合理年产量，使得全矿产量为最大。

构造这个问题的数学模型并不难，假设第一煤层的年产量为x_1，第二煤层的年产量为x_2，二个煤层的年产量不能为负数，有$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$。根据二个煤层生产能力的限制x_1与x_2要分别满足$x_1\leqslant 50$，$x_2\leqslant 20$，$x_2\leqslant x_1$。按照粉煤的供销情况，又有$0.2x_1+0.3x_2\leqslant 12$。在这些条件的限制下，求一组数$x_1$，$x_2$，使得整个矿井的年产量$Z=x_1+x_2$为最大。因此，煤层合理年产量问题的数学模型为：

$$\max \quad Z=x_1+x_2$$

$$\text{且满足}\quad\begin{cases} x_1\leqslant 50 \\ x_2\leqslant 20 \\ x_2\leqslant x_1 \\ 0.2x_1+0.3x_2\leqslant 12 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

例2：根据某矿区远景发展规划，在规定期限内用建新井的方法使年产量增加110万t，用于新井建设的投资限额为2700万元。有六个已完成勘探和设计的井田，各矿井设计年产量a_j，新井建设投资b，建成后矿井吨煤成本c，如表1-1所示。现要选择最优的建设方案，要求在不突破投资限额又保证达到计划年产量的条件下，使这些矿井的生产总成本最低。

表1—1

矿井序号 j	设计年产量 (万吨) a_j	矿井建设投资 (万元) b_j	建成后吨煤成本 (元) c_j
1	30	600	10
2	31	770	9
3	27	810	9
4	22	550	11
5	30	660	9
6	20	620	8

这个线性规划问题，实质是根据约束条件，选择建设哪些矿井或不建哪些矿井，x可能取“1”或“0”值，“1”表示选取方案，即可建设该矿井，“0”表示舍弃方案，即不建该矿井。

可按如下步骤建立数学模型：

（1）把矿井投产后生产总成本最低做为目标函数。

$$\min \quad Z = a_1c_1x_1 + a_2c_2x_2 + a_3c_3x_3 + a_4c_4x_4 + a_5c_5x_5 + a_6c_6x_6$$

（2）要保证产量增加到110万t。

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 \geqslant 110$$

（3）总投资不应超过限额。

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 \leqslant 2700$$

归纳：

$$\min \quad Z = 300x_1 + 279x_2 + 243x_3 + 242x_4 + 270x_5 + 160x_6$$

且满足：
$$\begin{cases} 30x_1 + 31x_2 + 27x_3 + 22x_4 + 30x_5 + 20x_6 \geqslant 110 \\ 600x_1 + 770x_2 + 810x_3 + 550x_4 + 660x_5 + 620x_6 \leqslant 2700 \\ x_j = 1\text{或}0 \ (j = 1 \cdots 6) \end{cases}$$

从以上两个例子可以看出：它们都是属于一类优化问题，从数学上说，它们具有以下共同特征：

（1）每一个问题都用一组未知数（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）表示某一方案，这组未知数的一组定值就代表一个具体方案，通常要求这些未知数取值是非负的。

（2）存在一定的限制条件（称为约束条件），这些限制条件都可以用一组线性等式或不等式来表达。

（3）都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数），按研究问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

一般来讲，这类问题可用数学语言描述如下：

目标函数 $\max(\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ （1-1）

满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant)\ b_m & (1\text{-}2) \\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n \geqslant 0 & (1\text{-}3) \end{cases}$$

这就是线性规划的数学模型，方程（1-1）称为目标函数，（1-2）与（1-3）称为约束条件，其中（1-3）式也称为非负条件，有了数学模型之后，我们还要研究如何以适当可行的方法，寻找出所要求的最优方案。

2.线性规划的标准型

由前面可知，线性规划问题可以要求目标函数最大化，也可以要求目标函数最小化，其约束条件可以为“≤”型的不等式，也可以为“≥”型的不等式，还可以为等式，这种多样性给讨论问题带来不便。为了便于以后的讨论最好规定一种标准型式。假定线性规划含有n个变量，m个约束（非负约束除外），我们规定线性规划的标准型为：

$$\max\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1\text{-}5) \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=bm \\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqslant 0 \qquad (1\text{-}6) \end{cases}$$

为了表达的更紧凑，也常用以下方法表示：

$$\max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_j\ x_j \tag{1-7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ x_j=b_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-8}$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-9}$$

若用下述记号：

$$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\qquad A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n)$$

则可将线性规划的标准型表示为：

$$\max\ Z=CX \tag{1-10}$$

$$AX=b \tag{1-11}$$

$$X\geqslant 0$$

显然，这里的0是一个向量（n维零向量），有时也将目标函数Z写成Z（X），此处A是$m\times n$矩阵，称为系数矩阵，其秩为m，$m<n$。b是m维列向量，称为限定向量，C是n维行向量，称为价值向量，c_j称为价值系数。X是未知数向量，为n维列向量。通常a_{ij}，b_i和c_j（$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$；$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）为已知常数，而m和n则为正整数，一般b_i是非负的，a_{ij}和c_j的符号不限。

实际线性规划的模型是各式各样的，但都可以通过以下方法化成标准型。

（1）若要求目标函数实现最小化，即要求目标函数

$$\min\ Z = CX$$

这时可将该目标函数乘以“-1”，然后按最大化求解。这时求得的最优解和原问题的最优解相同，但目标函数值变号即：

$$\min\ Z = -\max\ (-Z)$$

令$Z' = -Z$于是就得到

$$\max Z' = -CX$$

这就同标准型的目标函数的形式一致了（图1-1）

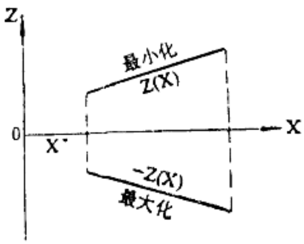


图1-1

(2)若某个约束条件是“$\leqslant$”不等式，则可在不等式的左端加上一个非负变量把约束条件变成等式，这样的变量称为松弛变量。若是“$\geqslant$”不等式，则在不等式的左端减去一个非负变量，这样的变量称为剩余变量（也可统称为松弛变量）。

（3）在实际问题中，有些变量无非负限制，即取负值或正值在物理意义上都是合理的。这时为了满足线性规划数学模型对于变量的非负要求，而又无损于原来实际问题的意义，则可用如下方法进行数学处理：用另外两个非负变量的差来代替这个符号不受限制的变量，譬如说x_k在物理意义上可正可负，则在线性规划的数学模型中可用$x'_k - x''_k$来代替x_k（即$x_k = x'_k - x''_k$）此处$x'_k \geqslant 0$，$x''_k \geqslant 0$。这样，在数学模型中凡是有x_k的地方，都用$x'_k - x''_k$来代替它，求出x'_k和x''_k之后，当然就得到了x，由于非负变量x'_k可能大于非负变量x''_k也可能小于x''_k，因而x_k可能为正，也可能为负。

例3：试将线性规划问题

$$\min\ Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3\text{无符号约束} \end{cases}$$

化成标准型。

解：通过以下步骤：

（1）用（$x_4 - x_5$）替换x_3，其中$x_4 \geqslant 0$，$x_5 \geqslant 0$；

（2）在第一个约束条件的“$\leqslant$”号左端加入松弛变量x_6；

（3）在第二个约束条件的“$\geqslant$”号左端减去剩余变量x_7；

（4）令$Z' = -Z$把min改变为求$\max Z'$即可得到该问题的标准型。

$$\max\ Z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_7 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_6 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x_4 - x_5) = 5 \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,\ 2, 4, \cdots,\ 7 \end{cases}$$

二、图解法

图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。回到例1的二个煤层合理年产量的例子上来，该问题的数学模型为：

求一组数x_1，x_2使

$$\max\ Z = x_1 + x_2$$

$$\text{且满足}\quad \begin{cases} x_1 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 20 \\ x_2 \leqslant x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：画出图1-2所示的平面直角坐标系，平面中的任一点与一组（x_1，x_2）一一对应，图中1—1直线箭头所示方向，表示满足约束条件的$x_1 \geqslant 0$，2—2直线、3—3直线、4—4直线、5—5直线、6—6直线箭头所示方向分别表示满足约束条件的其它一些不等式。它们所包围的区域D，就是全部可行解的区域，见图2-2中的阴影部分。

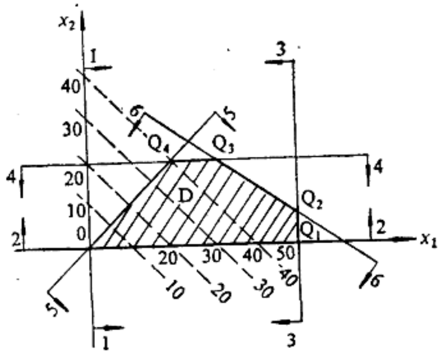


图1-2

区域$0Q_1Q_2Q_3Q_4$中的每一个点(包括边界点)都是这个线性规划问题的一个解(又称可行解)，因而区域$0Q_1Q_2Q_3Q_4$是例1的线性规划问题的解集合（我们称它为可行域）。

现分析目标函数$Z = x_1 + x_2$，它在坐标平面上可表示以Z为参数的一组平行线。在直线$x_2 = -x_1 + Z$上的所有点，具有相同的目标函数值，因而称它为"等值线"。当Z值由小变大时直线$x_2 = -x_1 + Z$沿其法线方向向右上方移动，当移动到Q_2点时，Z的取值最大，这就得到了例1的最优解，Q_2的坐标为$(50, 6.67)^T$，于是可计算出$Z = 56.67$万t。

这说明当第一层煤年产量为50万t/a，第二层煤年产量为6.67万t/a时，全矿井年产量达到最大，等于56.67万t/a。

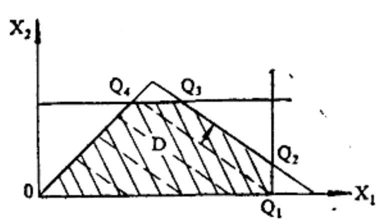


图1-3

若将目标函数变为$\max Z = x_1 + 1.5x_2$，则表示目标函数中以Z为参数的这族平行直线与约束条件$0.2x_1 + 0.3x_2 \leqslant 12$的边界直线相平行。当Z值由小变大时，表示目标函数取

值的这线平移到Q_2Q_3，就与线段Q_2Q_3重合（见图1-3），这表明线段Q_2Q_3上任意一点都使目标函数Z取得相同的最大值。于是，该线性规划问题有无限多个最优解。

例4：用图解法求解下述线性规划问题。

$$\max\ Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：图解见图1—4，从图中可以看到，可行域无界，目标函数的值$Z \to +\infty$，这种情况无最优解。在实际问题中，当数学模型有错误时，才可能发生这种情况。

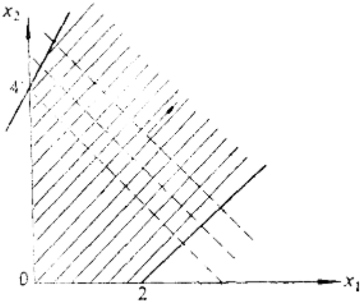


图1-4

通过图解法看到，线性规划问题的所有可行解构成的可行域一般是凸多边形（有时可行域是无界的），若存在最优解，则一定可在可行域的某顶点上得到，若在两个顶点上同时得到最优解，则这两顶点连线上的任一点都是最优解，若可行域无界，则可能发生最优解无界的情况（这时称最优解不存在，或无最优解），如图1-4所示。

图解法虽然有直观、简便等优点，但在变量多的时候（三个以上），即高维的情况下它就无能为力了。所以我们在下一节要介绍一种代数方法——单纯形法。

三、线性规划问题的解和基本定理

1.线性规划问题的解

在讨论线性规划问题的解法以前，先介绍一下线性规划问题的解的概念。我们知道，一般线性规划问题的标准型为：

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = b \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-13}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

可行解 满足所有约束条件的解$X = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$，称为该线性规划的**可行解**，所有**可行解**的集合称为可行域。

最优解 能使目标函数达到最大值（最优值）的可行解称为**最优解**。

基 设A是约束方程组的$m \times n$阶系数矩阵，其秩为m，B是矩阵A中$m \times m$阶非奇异子矩阵（$|B| \neq 0$），则称B是线性规划问题的一个**基**。

这就是说，矩阵B是由m个线性独立的列向量组成，不失一般性可设

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots P_m)$$

称P_j（$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）为基向量，与基向量P_j相对应的变量x_j（$j = 1,\ 2, \cdots, m$）为基

变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，现在我们来研究约束方程（1-13）的求解问题。假设该方程组系数矩阵A的秩为m，因m<n故它有无穷多个解，假设前m个变量的系数列向量是线性独立的，这时（1-13）可写成

$$\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix} x_2+\cdots+\begin{bmatrix}a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{mm}\end{bmatrix} x_m = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_{1\ m+1}\\ a_{2\ m+1}\\ \vdots\\ a_{m\ m+1}\end{bmatrix}x_{m+1} -$$

$$\cdots\cdots \begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}x_n \qquad (1\text{-}14)$$

或
$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} P_j\ x_j$$

方程组（1-14）的一个基是

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{mm}\end{bmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m)$$

设X_B是对应这个基的基变量（向量）

$$X_B=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T$$

现若令式（1-14）的非基变量$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，并用高斯消去法可求出一个解

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$$

这个解的非零分量的数目不大于方程数目m，称X为基本解。

由此可见，有一个基，就可以求出一个基本解，如图1-2中的点0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4代表基本解。

基本可行解 满足非负条件的基本解，称为**基本可行解**。图1-2中的点0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4代表**基本可行解**。

可见，基本可行解的非零分量数目也不大于m，并且都是非负的。

可行基 对应于基本可行解的基，称为**可行基**。

可见，约束方程组（1-13）具有基本解的数目最多是C_n^m个。一般地讲基本可行解的数目要小于基本解的数目，最多是相等。

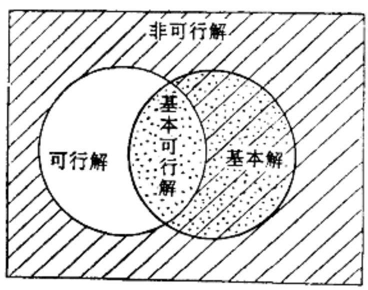


图1-5

以上提出的几种解的概念，它们之间的关系可用图1-5表明。

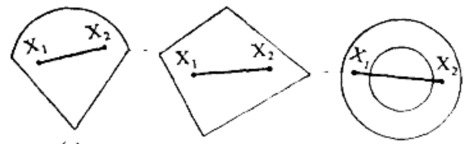
另外还要说明一点，基本解中的非零分量的个数小于m个时，此基本解是退化解，在以下讨论标准型的求解时，我们假设不出现退化。

以上我们给出了线性规划问题的解的定义，它们将有助于用来分析线性规划问题的求解过程。

2.基本概念及定理

凸集 设K是n维欧氏空间的一个点集，任意两点$X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$的连线上的一切点$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K$，$(0\leqslant\alpha\leqslant1)$则称K为**凸集**。

实心园，实心球体，实心立方体等都是凸集，圆周不是凸集，从直观上讲凸集没有凹入部分，其内部没有孔洞。图1-6中的(a)，(b)是凸集，(c)不是凸集。



(a) (b) (c)

图1-6

凸组合 设$\alpha^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(n)}$是n维欧氏空间E_n中的K点。若存在μ_1，μ_2，…，μ_k，且$0<\mu_i<1$，$i=1,2,\cdots,K$，

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$$

使 $X=\mu_1X^{(1)}+\mu_2X^{(2)}+\cdots+\mu X^{(k)}$

则X为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的凸组合

顶点 设K是凸集，$X\in K$；若X不能用不同的两点$X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$线性组合表示为：

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)K^{(2)}\ (0<\alpha<1)$$

则称X为K的一个顶点（或极点）。

定理1 线性规划的可行解集是凸集。

证明：设其可行解集为R_c，从R_c中任取二点$X^{(1)}$和$X^{(2)}$（$X^{(1)}\neq X^{(2)}$）则有

$AX^{(1)}=b$，$AX^{(2)}=b$，$X^{(1)}\geqslant0$，$X^{(2)}\geqslant0$。

令X为线段$X^{(1)}$，$X^{(2)}$上的任一点，即

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)},\ (0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

$$AX=[\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}]$$

则

$$=\alpha AX^{(1)}+AX^{(2)}-\alpha AX^{(2)}$$

$$=\alpha b+b-\alpha b$$

$$=b$$

又由于 $X^{(1)}\geqslant0$，$X^{(2)}\geqslant0$，故

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\geqslant0$$

这就证明了X也在R_c中，从而R_c为凸集。

定理2 线性规划问题基本可行解X对应可行域D的顶点。

证明略。

定理3 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可在其可行域的顶点上达到最大值。

证明略。

由以上定理可知

(1)线性规划的可行解的全体构成一凸集，每一个可行解都对应于这个凸集中的一个点。