初中数理化学习丛书

初中数学

学习·训练·实践

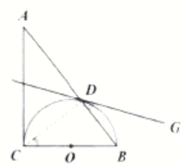
（三）

名师精讲解难

各类题型俱全

提高能力必读

中考取胜必备



JINDUN CHUBANSHE
金盾出版社

初中数理化学习丛书

初 中 数 学
学习·训练·实践
（三）

丛书主编　门树慧　李国岚　杨正钊
本书编著　门树慧　何怡生　贾　娜

金 盾 出 版 社

内容提要

本书包括初三数学全部内容，其中代数三章，平面几何二章。每章分为“导学”、“解题方法”、“解题训练与检测”、“趣味·实践·思考”四部分。在“导学”中，深入浅出地分析知识结构、重要概念、公式、法则及重点和难点，配有典型例题，介绍掌握重点知识和克服难点的方法；在“解题方法”中，介绍本章所用的解题方法，所配例题新颖，题型齐全，难易得当，适应性广，以提高学生的解题能力和分析问题能力；在“解题训练与检测”中，配有基本题、提高题和期末综合练习题，书后附有提示和答案，便于学生自检；在“趣味·实践·思考”中，包括趣味知识、相关实践活动、思考练习等。本书供初三学生使用，也可供初中数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学学习·训练·实践(三)/门树慧等编著.—北京：金盾出版社，2002.6

(初中数理化学习丛书/门树慧，李国岚，杨正钊主编)

ISBN 7-5082-1912-0

Ⅰ.初… Ⅱ.门… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 021137 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码：100036 电话：68214039 68218137

传真：68276683 电挂：0234

封面印刷：北京精美彩印有限公司

正文印刷：北京 3209 工厂

各地新华书店经销

开本：850×1168 1/32 印张：10.25 字数：276 千字

2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

印数：1—15000 册 定价：11.50 元

前　　言

21世纪是我国教育改革和创新的世纪，而教育改革和创新的核心在于培养学生的创新精神和实践能力，因此，素质教育已成为当前教育实践和发展的主题。在学科教育中，为了帮助学生学好数理化知识，提高学生的综合素质和创新与实践的能力，我们编写了这套“初中数理化学习丛书”。

本套丛书的内容以九年义务教育初中教学大纲为指导，以人民教育出版社出版的现行教材为依据，并与教学同步。全套丛书包括：《初中数学 学习·训练·实践(一)》、《初中数学 学习·训练·实践(二)》、《初中数学 学习·训练·实践(三)》、《初中物理 学习·训练·实践(一)》、《初中物理 学习·训练·实践(二)》和《初中化学 学习·训练·实践》，共六册。这套丛书理论阐述简明，解题方法巧妙，其内容有广泛的适应性和实用性，不仅适合在校学生平时阅读，也是毕业班学生复习总结所学知识、准备中考的必备读物，同时也可供任课教师参考。

本套丛书各分册的每章分为“导学”、“解题方法”、“解题训练与检测”、“趣味·实践·思考”四部分。在“导学”中，深入浅出地分析知识结构、重要概念、公式、法则及重点和难点，配有典型导学例题，说明掌握重点知识及克服难点的方法；在“解题方法”中，介绍本章所用的解题方法，并配有选材新颖的例题，解题方法不落窠臼，题型齐全，难易得当，适应性广，以提高学生的解题能力和分析问题能力；在“解题训练与检测”中，配有基本题、提高题和期末综合练习题，书后附有提示和答案，便于学生自检；为了提高学生的实践能力和学习数理化的兴趣，每章第四部分“趣味·实践·思考”中配有实践活动、理化趣味实验及思考练习。在初三部分，为了帮助学生升学考试前进行总复习，书中有“中考之窗”，安排了有关内

容。

本丛书由北京教育学院长期从事中学数学、物理教师培训教学和教学法研究的门树慧教授、李国岚教授和北京市海淀区中学化学学科带头人杨正钊高级教师主编。

参加本书编写的还有周玉芹、李正、任如芬、牛佳耘、母艾等。

囿于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，望广大读者批评指正。

初中数理化学习丛书编委会

2002.4

目　　录

代　　数

平面几何

代　数

第十二章　一元二次方程

一、导　　学

【知识结构】

- 一元二次方程
  - 一元二次方程及其解法和应用
    - 定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次项的次数是 2，这样的整式方程叫做一元二次方程
    - 一般形式：$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$
    - 解法
      - 直接开平方法
      - 配方法
      - 公式法
      - 因式分解法
    - 应用：列一元二次方程解应用题
  - 根的判别式及根与系数关系
    - 判别式：$\Delta=b^2-4ac$
      - $\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不等实根
      - $\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等实根
      - $\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程无实根
    - 根与系数关系
      - 如果 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，那么：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

- 一元二次方程
  - 根与系数关系
    - 以两个数 x_1、x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为 1)是:$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$
    - 对二次三项式进行因式分解的公式是:$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
  - 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程分式方程的应用
    - 分式方程 $\xrightarrow[\text{去分母法、换元法}]{\text{转化}}$ 整式方程
    - 无理方程 $\xrightarrow[\text{平方法、换元法}]{\text{转化}}$ 有理方程
    - 应用　列分式方程解应用题
  - 二元二次方程组
    - 代入法:解一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组
    - 分解降次法:解两个二元二次方程组成的方程组

【目的要求】

1. 了解一元二次方程的概念,会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$ 的方程,会用配方法解数字系数的一元二次方程;掌握一元二次方程求根公式的推导,会用求根公式解一元二次方程;会用因式分解法解一元二次方程.能够根据方程的特征,灵活运用一元二次方程的各种解法求方程的根,能够列出一元二次方程解应用题.

2. 理解一元二次方程根的判别式,会根据根的判别式判断数字系数的一元二次方程的根的情况;了解二次三项式的因式分解与解方程的关系,会利用一元二次方程的求根公式在实数范围内将二次三项式分解因式.

3. 掌握一元二次方程根与系数的关系式,会用它们由已知一元二次方程的一个根求出另一个根与未知系数,会求一元二次方程两个根的倒数和与平方和.

4. 掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法,会用去分母或换元法求方程的解,并会验根;能够列出可化为一元二次方程的分式方程解应用题.

5. 掌握可化为一元一次、一元二次方程的无理方程的解法,会用两边平方或换元法求方程的解,并会验根.

6．了解二元二次方程、二元二次方程组的概念，掌握由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组的解法，会用代入法求方程组的解．

7．掌握由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组的解法．

8．通过解简单的二元二次方程组，进一步理解“消元”、“降次”的数学方法，获得对事物可以转化的深刻认识．

【重点难点】

一元二次方程的解法、无理方程的解法及列方程解应用题是本章重点．

用配方法解一元二次方程、列方程解应用题及分式方程与无理方程的验根问题是本章的难点．

【学习导引】

（一）一元二次方程及其解法

例 1 下列方程哪些是一元二次方程？哪些不是一元二次方程？

(1) $7(2x+1)=3x^2$　　(2) $\sqrt{x}+7x=15$

(3) $y^2-3x+1=0$　　(4) $abx^2+(a+b)x-1=0$

(5) $x^2-\sqrt{3}x+4=0$　　(6) $\frac{1}{x^2}+2x-7=0$

(7) $x^2+3x-5=(x-1)^2$　　(8) $px^2+qx+n=0(p\neq0)$

解：(2)、(6)不是整式方程；(3)含有 2 个未知数；(4)未明确 $ab\neq0$；(7)整理后不含二次项．它们都不是一元二次方程．

(1)、(5)、(8)是一元二次方程．

小结 一元二次方程应具备以下三个条件：

(1) 它是整式方程；

(2) 只含有一个未知数；

(3) 未知数最高次数是 2．

用上述三条标准进行判断时，应先对原方程进行整理．

例 2 方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x-1=0$，当 $m=$ __________时，方程为一元二次方程．当 $m=$ __________时，方程

为一元一次方程.

分析:形如 $ax^a+bx+c=0$ 的方程,当 $a\neq0$ 且 $a=2$ 时,它是一元二次方程;当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时,它为一元一次方程.

解:由 $m^2-1\neq0$,得 $m\neq\pm1$

$\therefore$ 当 $m\neq\pm1$ 时,方程为一元二次方程

由 $\begin{cases} m^2-1=0 \\ m+1\neq0 \end{cases}$ 得 $m=1$

$\therefore$ 当 $m=1$ 时,方程为一元一次方程.

注意 选择适当的方法解一元二次方程的关键是要认真观察方程的特征,在特征不明朗时,要先整理方程,解题时切忌盲目下手.

例 3 用适当方法解下列方程:

(1) $(2x-5)(2x+5)=7$

(2) $x^2+4x-8=0$

(3) $2x^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{3})x-\sqrt{15}=0$

(4) $2x^2-4x+1=0$

分析:方程(1)特征不明朗,应先整理方程.方程整理后没有一次项,宜采用直接开平方法.

方程(2)可以用公式法求解,但仔细想一想,它的前 2 项已具备凑完全平方的条件,只需加上 4 即可配方,因此选用配方法更佳.

方程(3)是含有无理系数的一元二次方程,它可以用公式法求解.但在某些情况下,选用因式分解法更简捷,这是因为用求根公式求解时,有时遇到双重根号的化简问题,也就是要把 b^2-4ac 的值配成完全平方,有一定难度.如果运用因式分解的方法就可以避开这一难点,使求解简单易行.此方程宜用因式分解法.

方程(4)中各项系数的绝对值较小,且二次项系数不为 1,宜用求根公式.

解:(1) 原方程变形为 $4x^2=32$

$\therefore x^2=8$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$.

(2) 原方程变形为 $(x+2)^2=12$

$\therefore\ x+2=\pm 2\sqrt{3}$

$\therefore\ x_1=-2+2\sqrt{3}, x_2=-2-2\sqrt{3}.$

(3)

$$\begin{matrix} 1 & & -\sqrt{5} \\ & \times & \\ 2 & & \sqrt{3} \end{matrix}$$

原方程变形为 $(x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x-\sqrt{5}=0$ 或 $2x+\sqrt{3}=0$

$\therefore\ x_1=\sqrt{5}, x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(4) $\because\ a=2, b=-4, c=1$

$b^2-4ac=16-4\times 2\times 1=8$

$\therefore\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ x_1=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, x_2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}.$

提示 对于各项系数较大的一元二次方程，可以先从分析方程的各项系数的特征入手，通过探求方程的特殊根来求解.下面两个结论在解题中经常用到：

(1) 若 $a+b+c=0$，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一根为 1，另一根为$\dfrac{c}{a}$.(证略)

(2) 若 $a-b+c=0$，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一根为 -1，另一根为 $-\dfrac{c}{a}$.(证略)

例 4 解方程 $1999x^2-1417x-582=0$.

解：$\because\ 1999-1417-582=0$

$\therefore\ x_1=1, x_2=-\dfrac{582}{1999}.$

例 5 解方程 $789x^2+1999x+1210=0$.

解：$\because\ 789-1999+1210=0$

$\therefore x_1=-1, x_2=-\frac{1210}{789}$.

提示 利用导出方程求解可使过程简化.

引理:方程 $x^2+bx+ac=0$ 的两个根分别等于方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根的 a 倍.(证略)

我们把根等于原方程根的 a 倍的方程叫做原方程的导出方程.此处 $ax^2+bx+c=0$ 叫原方程,$x^2+bx+ac=0$ 为导出方程.

例 6 解方程 $4x^2-17x-15=0$.

分析:我们以其导出方程来代替它,利用导出方程的根与原方程的根的关系来解.

解:导出方程为 $x^2-17x-60=0$

它的两根易看出是 -3、20,再分别除以 4,得到原方程的根 $x_1=-\frac{3}{4}, x_2=5$.

(二) 根的判别式及根与系数关系

根的判别式是一元二次方程的重要理论,它主要应用于以下几个方面:

(1) 不解方程,判定一元二次方程的根的存在情况;

(2) 确定含参数的一元二次方程的参数的值或取值范围;

(3) 证明某种条件下方程有无实根,或探求参数符合的条件.

例 7 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2ax+2a-1=0$(a 为常数)的根的情况,下列判断正确的是 (　　).

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根　　D. 有两个实数根

解:方程 $x^2-2ax+2a-1=0$ 的根的判别式为

$$\Delta=(-2a)^2-4\cdot(2a-1)=4a^2-8a+4=4(a-1)^2$$

由平方的非负性,知$(a-1)^2\geqslant0$

$\therefore 4(a-1)^2\geqslant0$

$\therefore \Delta\geqslant0$

$\therefore$ 原方程有两个实数根,故应选择 D.

例 8 已知方程$(k-1)x^2+2kx+k+3=0$ 有两个不相等的

实数根，求 k 的值.

解：∵ 方程有两个不相等的实数根

$$\therefore \begin{cases} k-1\neq 0 & ① \\ \Delta=(2k)^2-4(k-1)(k+3)>0 & ② \end{cases}$$

解①得　　$k\neq 1$

解②得　　$k<\frac{3}{2}$

∴ 当 $k<\frac{3}{2}$ 且 $k\neq 1$ 时，方程有两个不相等的实数根.

注意　本题若只解 $\Delta>0$，不考虑二次项系数 $k-1\neq 0$，而得到 k 的取值范围是不对的. 对于一元二次方程的讨论，一定要同时讨论 $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ 的条件.

例 9　已知 m 为整数，并且 $6<m<20$，如果一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有有理数根，求 m 的值及方程的根.

分析：由一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(\Delta\geqslant 0)$ 的求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 可知，整系数的一元二次方程若有有理数根，其根的判别式 Δ 必须是一个完全平方数.

解：依题意，整系数一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 的根的判别式

$$\Delta=[-(2m-1)]^2-4m(m-2)=4m+1$$

必须是完全平方数

∵ $6<m<20$　　∴ $25<4m+1<81$

$$5^2<4m+1<9^2$$

注意到 $4m+1$ 为奇数　∴ $4m+1=7^2$

解得　$m=12$

于是原方程为 $12x^2-23x+10=0$

它的根是 $x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{5}{4}$.

例 10　已知：m、n 均为整数，并且方程(1) $x^2-mx-n+3$

$=0$ 有两个不相等的实数根，方程(2) $x^2+(m-6)x-n+7=0$ 有两个相等的实数根，方程(3) $x^2-(m-4)x-n+5=0$ 无实数根，求 m，n 的值.

分析：由已知能得到关于 m、n 的两个不等式和一个等式.通过等式，可使两个不等式变为关于 m 的不等式组，先求出 m 的取值范围，再利用 m 是整数这一条件，求出 m 的值，再求出 n 的值.

解：$\because$ 方程(1)有两个不相等的实根

$\therefore \Delta_1=(-m)^2-4(3-n)>0$

$\because$ 方程(2)有两个相等实根

$\therefore \Delta_2=(m-6)^2-4(7-n)=0$

$\because$ 方程(3)无实数根

$\therefore \Delta_3=[-(m-4)]^2-4(5-n)<0$

$$\text{即}\begin{cases} m^2+4n-12>0 & ① \\ m^2-12m+4n+8=0 & ② \\ m^2-8m+4n-4<0 & ③ \end{cases}$$

把①、②、③变形为

$$\begin{cases} m^2+4n>12 & ④ \\ m^2+4n=12m-8 & ⑤ \\ m^2+4n<8m+4 & ⑥ \end{cases}$$

把⑤代入④和⑥得

$$\begin{cases} 12m-8>12 \\ 12m-8<8m+4 \end{cases}$$

解得 $\frac{5}{3}<m<3$

$\because$ m 为整数　　$\therefore$ $m=2$

把 $m=2$ 代入②得　$n=3$

$\therefore$ $m=2$，$n=3$.

注意　利用判别式判定一元二次方程有无实数根时，一般解题步骤是：

(1) 计算 $\Delta=b^2-4ac$；

(2) 对 b^2-4ac 进行恒等变形，使它的符号明朗化. 常用的变形手段有因式分解、配方等；

(3) 说明 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号性质；

(4) 得出问题的结论.

例 11 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长，试证明关于 x 的一元二次方程 $c^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+b^2=0$ 无实数根.

分析：要证明一元二次方程没有实数根，只须证明判别式小于零.

证明：$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$$

$$=[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]$$

$$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$$

$\because$ a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长

$\therefore$ $a+b+c>0, b+c>a, a+b>c, b<a+c$

$\therefore$ $b+c-a>0, a+b-c>0, b-c-a<0$

$\therefore$ $\Delta<0$ $\therefore$ 原方程没有实数根.

利用根的判别式还可以进行有关的计算推理和证明.

例 12 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2=(2m+2)x-(m^2+4m-3)$ 中的 m 为不小于 0 的整数，并且它的两个实数根符号相反，求 m 的值，并解方程.

解：整理原方程，得

$$x^2-(2m+2)x+(m^2+4m-3)=0$$

$\because$ 方程两实数根符号相反

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根

$\therefore$ $\Delta=[-(2m+2)]^2-4(m^2+4m-3)>0$

解出 $m<2$

又$\because$ m 为不小于 0 的整数

$\therefore$ $m=0$ 或 $m=1$

当 $m=0$ 时，方程为 $x^2-2x-3=0$

解出 $x_1=3, x_2=-1$，符合题意

当 $m=1$ 时，方程为 $x^2-4x+2=0$

$\because$ 此时两根 $x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$

$\therefore$ x_1、x_2 同号，不符合题意，舍去.

$\therefore$ $m = 0, x_1 = 3, x_2 = -1$.

说明 这类问题可以先由判别式求出 m 的取值范围，再由条件 m 是不小于 0 的整数确定 m 的值，然后再确定方程的解是否符合两根符号相反来决定取舍，这样做与用 $x_1 \cdot x_2 < 0$ 出现一个二次不等式相比，更简捷易行，这种方法可称为“先求，后验定取舍”.

当给出的关于 x 的方程的二次项系数中含有待定系数时，要特别注意审题，当题目中没有指明给出的方程是二次方程或者没有说方程有两个根时，不要把此方程认定是二次方程. 因为令二次项系数为 0，它是一元一次方程，因此遇到此问题要分类讨论，并给以足够的重视.

例 13 k 为何值时，方程 $(k-1)x^2 - (2k+3)x + (k+3) = 0$ 有实根.

解：当 $k - 1 = 0$ 即 $k = 1$ 时，原方程为 $-5x + 4 = 0$

有一实根为 $x = \dfrac{4}{5}$

当 $\begin{cases} k - 1 \neq 0 \\ \Delta = [-(2k+3)]^2 - 4(k-1)(k+3) \geqslant 0 \end{cases}$ 时

即 $\begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = 4k + 21 \geqslant 0 \end{cases}$ 时，

解得 $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \geqslant -\dfrac{21}{4} \end{cases}$

$\therefore$ 当 $k \geqslant -\dfrac{21}{4}$ 且 $k \neq 1$ 时，方程有两个实根.

综上所述：当 $k \geqslant -\dfrac{21}{4}$ 时，方程有实根.

注意 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 在 $a \neq 0$ 且 $\Delta \geqslant 0$ 的条件下，根与系数的关系（韦达定理）揭示了方程的两个根与系数之间的内在联系，应用根与系数的关系，可以解决以下系列问题：

(1) 已知方程的一个根，求另一个根及确定方程的参数的值；