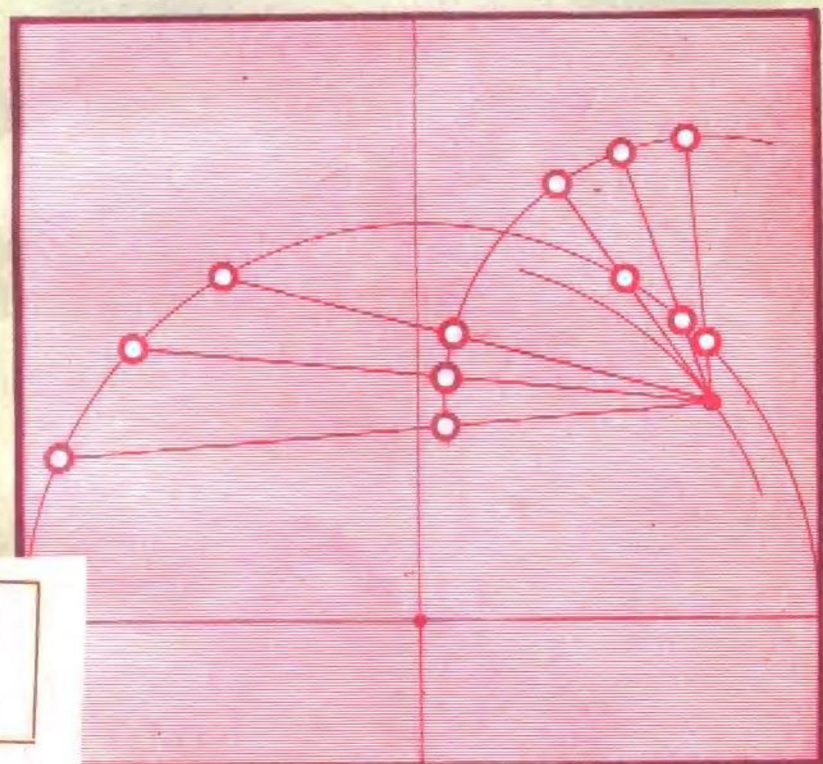


钟表小模数 齿轮滚刀设计

王魁业 编著



721

轻工业出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了钟表小模数齿轮滚刀的设计原理和方法,提出了滚刀齿形和滚切节圆半径的理论计算式。对于滚刀理论齿形的计算、节圆半径的确定、拟合曲线的误差控制设计以及电子计算机的程序设计均提出了较精确和较完善的方法。全书共五章,附有计算实例。

本书可供从事齿轮刀具特别是钟表齿轮刀具研究、设计、制造的技术人员、工人参考,也可供有关院校师生阅读。

钟表小模数齿轮滚刀设计

王魁业 编著

轻工业出版社出版

(北京阜成路3号)

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

850×1168毫米1/32 印张: 3 2/32 字数: 72 千字

1984年5月 第一版第一次印刷

印数: 1-5,000 定价: 0.44元

统一书号: 15042·1800

前 言

钟表小模数齿轮多采用滚齿法加工，但由于钟表齿轮的齿形比较复杂，目前还没有计算其共轭滚刀齿形的完整、简单而又适用的公式，而是沿用传统的图解计算法设计。这种设计方法，工作量很大，齿形设计还不够精确。对滚切节圆直径的选择更没有严密的理论分析和计算公式，而是采用多次试验的方法。钟表滚刀的设计工作还处于很落后的状况。

计算技术的飞跃发展和电子计算机的应用，为设计工作现代化提供了充分的条件。因此，给出完整适用的齿形计算的数学模型、按误差控制设计法设计电子计算机程序来求解拟合曲线等是急需解决的课题。为此，笔者研究了钟表齿轮滚刀的设计，所提出的设计方法将迅速、精确地设计出滚刀齿形及其拟合曲线，经实践验证效果良好。为了交流、推广、改进生产上滚刀的设计方法，编写了这本小册子“钟表小模数齿轮滚刀的设计”。

在本书的写作中，得到了北京手表厂等有关单位同志的大力支持和热情帮助，天津大学精仪系苑文炳副教授对本书提供了宝贵意见，在此表示感谢。

本书由哈尔滨工业大学刀具教研室主任袁哲俊教授审阅。

由于水平有限，错误和不当之处欢迎提出宝贵意见。

作者

目 录

第一章 齿形的设计计算	1
一、钟表齿轮的齿形尺寸.....	1
二、啮合线原理图解法.....	5
三、啮合线原理算法.....	9
四、包络线原理图解法及图解算法.....	16
五、包络线原理算法.....	22
第二章 钟表齿轮滚刀滚切节圆半径的确定	31
一、共轭刀具齿廓的存在条件.....	31
二、关于滚刀齿廓上的尖点.....	32
三、保证过渡曲线不超出齿轮齿腰要求长度 的节圆半径.....	42
四、滚刀齿廓后角与节圆半径的关系.....	44
五、滚刀齿顶宽度与节圆半径的关系.....	48
六、滚切节圆半径的最后确定.....	49
第三章 滚刀齿形的圆弧拟合及直线拟合	51
一、按三点共圆法求拟合圆弧.....	52
二、用最小二乘法求拟合圆弧.....	55
三、滚刀齿腰拟合直线的计算.....	63
四、拟合齿形误差的计算.....	64
第四章 钟表滚刀齿形计算步骤及电子计 算机的程序设计	68
一、误差控制程序设计.....	68
二、滚刀齿形计算步骤.....	69
三、程序框图的设计.....	78
第五章 钟表滚刀计算实例	84
一、滚刀的结构尺寸及技术要求.....	84
二、齿形计算实例.....	85

第一章 齿形的设计计算

一、钟表齿轮的齿形尺寸

钟表用齿轮的齿形极大多数为修正摆线齿形，但也有渐开线齿形的。通常将齿形为修正摆线的齿轮称为钟表齿轮。它的齿形是由摆线齿轮齿形演变而成的。

摆线是一个圆沿着直线或者另外一个圆的外表面或内表面做纯滚动时，圆上任意一点随着圆一同滚动时的运动轨迹。滚动圆 O_1 沿基圆 O 外表面滚动形成的轨迹 PP' （图1-1）称为外摆线；而滚动圆沿基圆内表面滚动形成的轨迹 PP'' 叫做内摆线。摆线的尺寸和形状与基圆和滚动圆的尺寸有关，如果滚动圆 O_1 的直径等于基圆 O 的半径，其内摆线 PP'' 则为一径向直线。

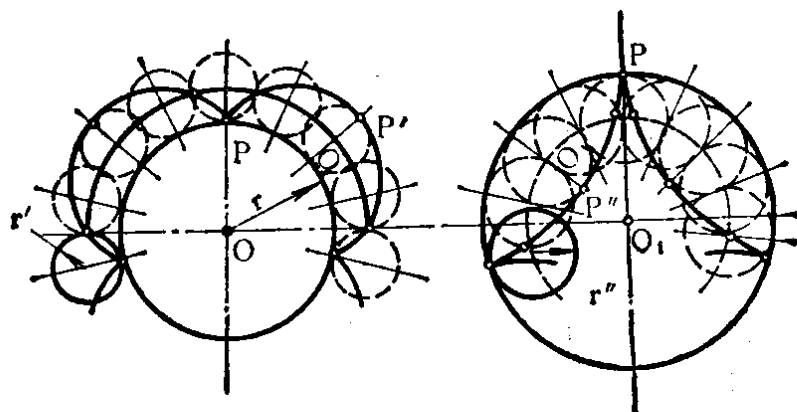


图 1-1 摆线的形成

钟表齿轮的齿形与上述摆线稍有不同。它的齿顶部分是用半径为 ρ 的圆弧 $\widehat{AB}$ （图1-2）来代替外摆线，圆弧中心位于半径为 r_c 的中心圆上；齿底部分是一段半径为 ρ_1 的圆弧 $\widehat{CD}$ ；而齿腰则是一段径向直线 $\overline{BC}$ （即特殊情况的内摆线），它与齿顶、齿底两段圆弧平滑相切。

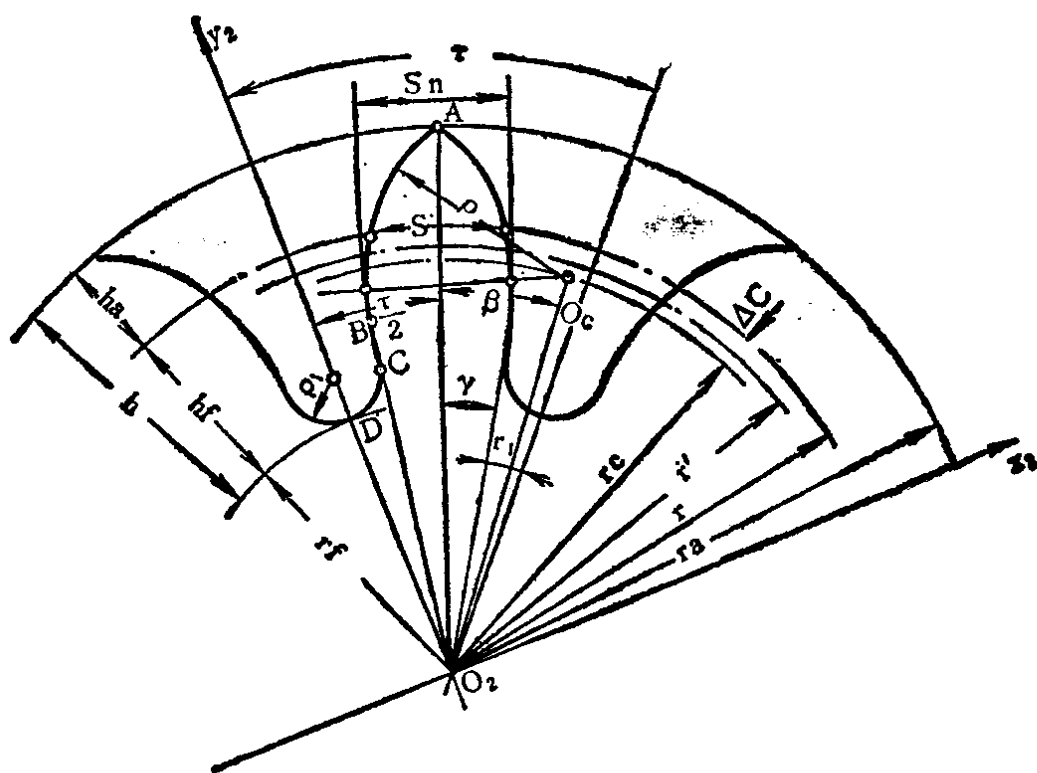


图 1-2 钟表齿轮的齿形

我国尚未制定钟表齿轮齿形的统一标准，目前各钟表厂都是参照国外标准设计和制定齿形尺寸的。

由于标准不同，钟表齿轮齿形参数的计算方法也不同，目前我国常用的钟表齿轮齿形尺寸的计算公式和选取方法如下。

已知条件：齿轮齿数 Z_2 ，齿轴齿数 Z_1 ，模数 m 及传动性质（主动和被动）。

钟表齿轮的齿形尺寸按表1-1计算。

钟表齿轮齿形确定后，就可以按啮合原理求解滚刀齿形了。

滚刀与工件的啮合，相当于一对螺旋齿轮的啮合。因此求解滚刀齿形，理论上应根据齿轮齿形按空间交轴啮合原理计算。但对于钟表齿轮滚刀来说，滚刀的螺旋升角不到1度，可将滚刀的法向齿形视为与工件啮合的齿条齿形。用这种方法所带来的滚刀齿形的设计误差是极微小的。于是，钟表滚刀齿形的设计就是求解与齿轮齿形相共轭的齿条齿形。

齿条齿形的求解方法很多，主要分为按啮合线原理和按包络线原理两类，而每类方法又都有图解法和计算法。

表 1-1 钟表齿轮齿形计算公式

序号	名 称	符号	计 算 公 式	备 注
1	分度圆半径	r	$r = \frac{mz}{2}$	
2	周 节	p	$p = \pi m$	
3	角 节 距	τ	$\tau = \frac{360^\circ}{z}$	
4	齿顶圆弧半径	ρ	$\rho = \rho^* m$	ρ^* 见表1-2 和表1-3
5	中心圆位移	Δc	$\Delta c = \Delta_c^* m$	Δ_c^* 同上表
6	中心圆半径	r_c	$r_c = r - \Delta c$	
7	参 数 角	β	$\beta = \arccos \frac{r^2 + r_c^2 - \rho^2}{2rr_c} - \frac{s_i^* \tau}{2}$	s_i^* 见表1-4
8	齿顶圆半径	r_a	$r_a = r_c \cos \beta + \sqrt{\rho^2 - r_c^2 \sin^2 \beta}$	
9	齿 顶 高	h_a	$h_a = r_a - r$	
10	公法线齿厚	s_n	$s_n = 2(\rho - r_c \sin \beta)$	
11	齿厚中心半角	γ	$\gamma = \arcsin \frac{\rho}{r_c} - \beta$	
12	齿槽中心半角	γ_1	$\gamma_1 = \frac{\tau}{2} - \gamma$	
13	齿 根 高	h_f	$h_f = h_f^* m$	h_f^* 见表1-5
14	齿根圆半径	r_f	$r_f = r - h_f$	
15	齿底圆弧半径	ρ_1	$\rho_1 = \frac{r_f \sin \gamma_1}{1 - \sin \gamma_1}$	

表 1-2 齿轮为主动的 ρ^* 和 Δc^* 值

齿 轴 齿 数	参 数 符 号	齿 轮 齿 数		
		20~40	41~70	71~100
6	Δc^*	0.29	0.30	0.31
	ρ^*	1.90	1.95	2.00
7	Δc^*	0.20	0.22	0.25
	ρ^*	2.00	2.05	2.10
8	Δc^*	0.18	0.20	0.22
	ρ^*	2.10	2.15	2.20

续表

齿 轴 齿 数	参 数 符 号	齿 轮 齿 数		
		20~40	41~70	71~100
9	Δc^*	0.20	0.21	0.22
	ρ^*	2.15	2.20	2.25
10	Δc^*	0.20	0.21	0.22
	ρ^*	2.25	2.30	2.35
11	Δc^*	0.20	0.21	0.22
	ρ^*	2.35	2.40	2.45
12	Δc^*	0.18	0.19	0.20
	ρ^*	2.45	2.50	2.55
14	Δc^*		0.16	
	ρ^*	2.55	2.60	2.65
15	Δc^*		0.15	
	ρ^*	2.60	2.65	2.70
16	Δc^*		0.14	
	ρ^*		2.70	2.80
18	Δc^*		0.12	
	ρ^*		2.80	2.90
20	Δc^*		0.12	
	ρ^*	2.90	3.00	

表 1-3 小轮为主动，大轮和小轮的 ρ^* 和 Δc^* 值

齿 数	Δc^*	ρ^*
8~12	0.16	1.90
>12~20	0.18	1.95
>20~50	0.21	2.00
>50	0.24	2.10

注：当小轮大数为8~12时，大轮的 ρ^* 值应比表中数值减小0.2。

表 1-4 齿厚系数 s_f^* 值		
齿轮齿数	齿 厚 系 数 s_f^*	
	齿轮为主动	从轮为主动
<10	0.33	0.40
10~20	0.40	0.42
>20	0.50	0.42

表 1-5 齿根高系数 h_f^*		
齿 数	齿 根 高 系 数 h_f^*	
	齿轮为主 动的齿轮	从轮为主 动的齿轮从轮
8		1.49
9		1.60
>9	1.57	1.70

二、啮合线原理图解法

啮合线法是以啮合基本定理为依据的。

平面啮合传递运动时，如图1-3所示，构件 1、2 各绕其转动中心 O_1 、 O_2 转动。在固定平面中能找到一瞬时转动中心 p ，在这一点上两构件 1、2 的相对速度 $\bar{V}_{12}=0$ ，即

$$\bar{V}_{12}=\bar{V}_1-\bar{V}_2=0$$

式中 $\bar{V}_1$ 、 $\bar{V}_2$ 分别为两构件的同一点 p 绕 O_1 和 O_2 转动时的瞬时速度矢量。

$\bar{V}_{12}=0$ 意味着在该点的 $\bar{V}_1$ 和 $\bar{V}_2$ 不仅模相同，方向也必须相同。显然，这样的点只能在 O_1 和 O_2 的连线上，因为只有在这条直线上的点 $\bar{V}_1$ 和 $\bar{V}_2$ 才能有相同的方向。又由于 $|\bar{V}_1|=\omega_1 \cdot O_1p$ ， $|\bar{V}_2|=\omega_2 \cdot O_2p$ ，所以当 $|\bar{V}_1|=|\bar{V}_2|$ 时，有

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2p}{O_1p}$$

由此可知，构件 1 和构件 2 相对运动的瞬时转动中心 p ，位于 O_1O_2 的连线上，并把中心距 $\overline{O_1O_2}$ 分成两段，这两段的长度和两齿轮的瞬时角速度成反比。

在齿轮啮合中，称瞬时转动中心 p 为啮合节点。若传动比 $i=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 恒定时， p 点位置固定不动，而以 O_1p 为半径的圆就是

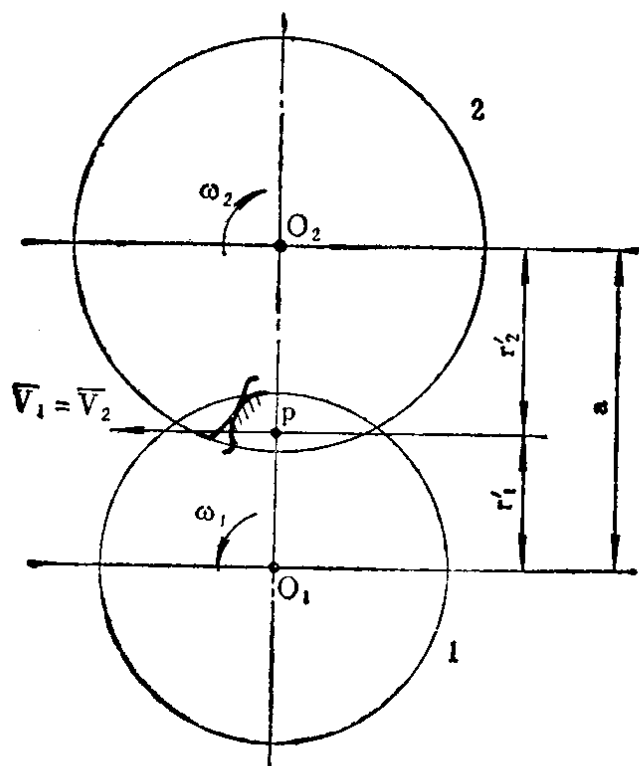


图 1-3 齿轮啮合时的瞬心线

瞬时转动中心 p 在构件 1 上的轨迹，以 O_2p 为半径的圆则是瞬时转动中心 p 在构件 2 上的轨迹，它们就是构件 1 和 2 的瞬心线，一般称之为节圆。

设两齿轮在传动中，在给定的瞬时，齿廓 1 与 2 在 k 点接

触。如我们给整个系统一个与 ω_2 大小相等方向相反的转动，则齿廓 2 相对静止，齿廓 1 和齿廓 2 的接触点 k 的相对速度（图 1-4）。

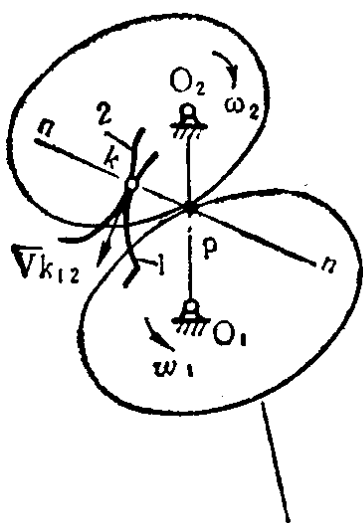


图 1-4 接触点的公法线通过啮合节点

$$|\bar{V}_{k12}| = |\omega_1 - \omega_2| \cdot pk$$

$\bar{V}_{k12}$ 的方向与 pk 垂直（因 p 是瞬时转动中心），同时 $\bar{V}_{k12}$ 又必须与两齿廓在 k 点的公切线方向重合，亦即齿廓公法线 nn 与 pk 重合。只有这样， k 点的相对速度 $\bar{V}_{k12}$ 在法线方向的投影才等于零。否则，

如 $\vec{V}_{k12}$ 在法线方向的投影不等于零，两齿廓不是互相嵌入就是脱开。

由此可以得出结论，在齿廓的接触点，它们的公法线必须通过啮合节点。这就是啮合基本定理。

当齿轮和齿条啮合时，上述定理完全适用。这时啮合节点 p 位于和移动方向垂直的直线 $\overline{O_1n_1}$ 上（图1-5），该点至转动中心 O_1 的距离等于移动速度与转动角速度之比。当传动比不变时，齿轮的瞬心线是一半径为 $r_1 = \frac{v_2}{\omega_1}$ 的圆，称节圆，而齿条的瞬心线

是一条与此圆相切的直线，称节线。齿条与齿轮的齿廓接触时，接触点 k 的公法线必须通过啮合节点 p 。

而在传动运动中接触点 k 在固定平面中的轨迹，就称啮合线。

根据这一定理，当我们已知构件1的齿形，欲求齿条2（或齿轮2）的齿形时，可以令齿轮1与齿轮2作相对运动，齿轮1在各瞬时位置，其齿形上某一点的法线通过啮合节点 p 时，则齿轮1齿

形上该点的瞬时位置就是啮合线上的一点，把这一点转换到齿条上去，即可求得齿条上相应的接触点。这就是啮合线原理作图法和计算法的基本原理。本节首先介绍图解法，这一方法很直观，有助于深入了解滚刀齿形（齿条齿形）的设计原理。

图1-6中 $\widehat{F-1-p-7}$ 为钟表齿轮的一侧齿形，它由半径为 ρ 的齿顶圆弧 $\widehat{7-p-4}$ ，径向直线 $4-1$ 及半径为 ρ_1 的齿底圆弧 $\widehat{1-F}$ 三段组成。钟表齿轮的节圆半径为 r' ，齿条节线为 $\overline{AB}$ ，啮合节点为 p ，齿轮的顶圆半径为 r_a ，齿根圆半径为 r_f 。圆弧中心所在圆半径为 r_o 。

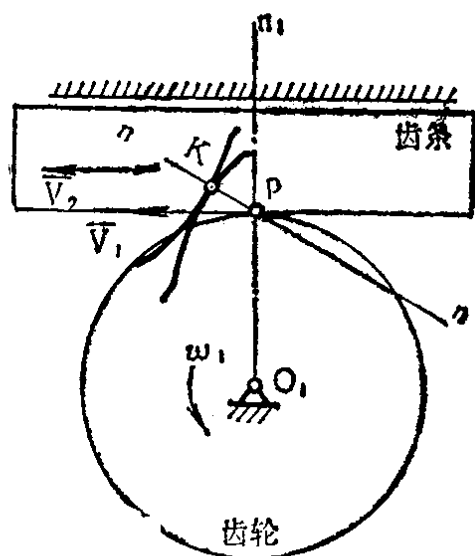


图 1-5 齿轮与齿条啮合时的瞬心线

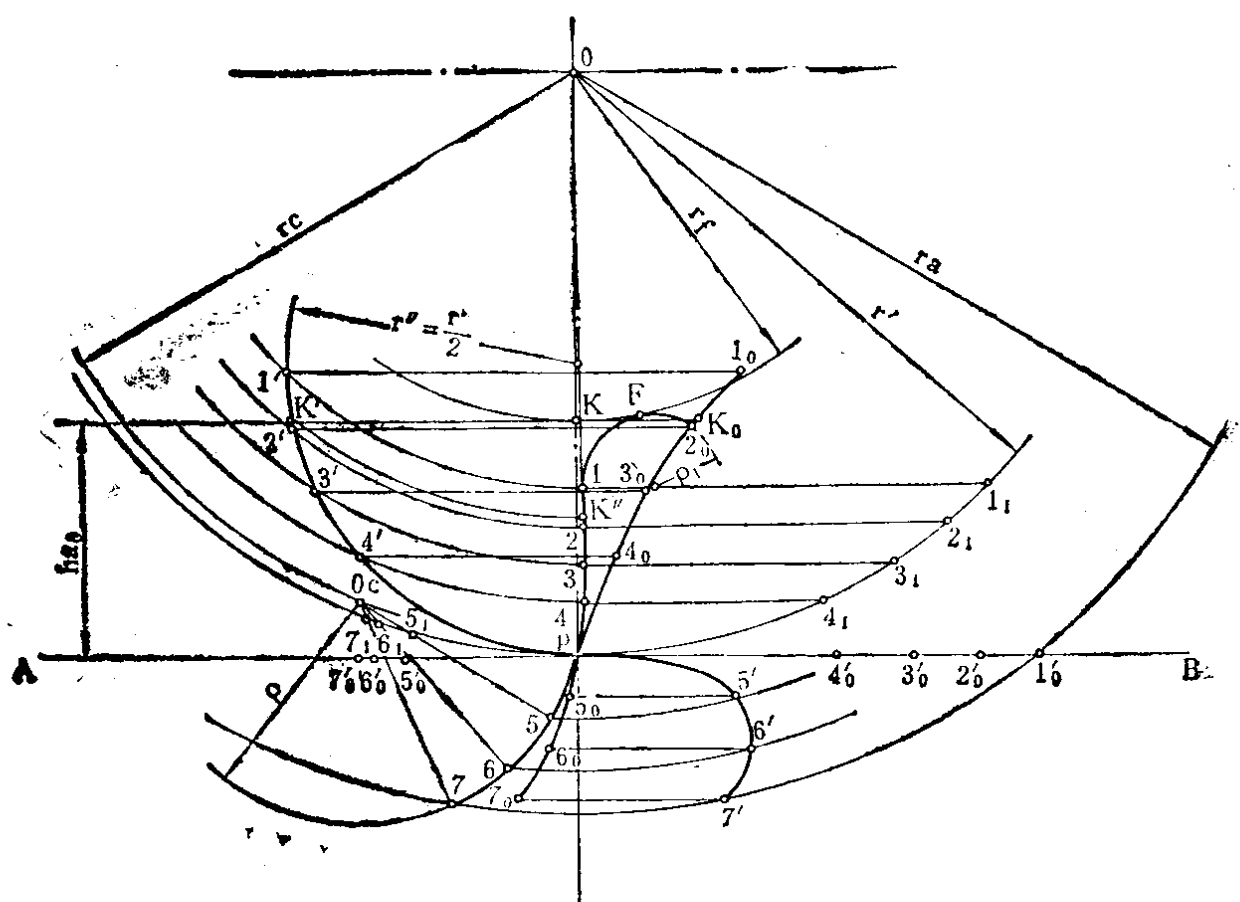


图 1-6 用啮合线原理图解法求滚刀齿形

下面首先求齿轮齿顶圆弧 $\widehat{7-p-4}$ 及齿腰径向直线 $\overline{4-1}$ 的共轭齿形。

将已知工件齿形 $\widehat{1-p-7}$ 分为若干任意线段，经各分段点1、2、……7作法线与节圆相交于 1_1 、 2_1 …… 6_1 、 7_1 等点。

从齿轮中心O通过各分段点1、2、……7作圆弧，然后从啮合节点p用法线 $\overline{11_1}$ 、 $\overline{22_1}$ …… $\overline{77_1}$ 的长度在这些圆弧上截取相应的啮合点 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ …… $7'$ 。

用平滑曲线将 $1'$ 、 $2'$ …… $7'$ 各点连接起来就得到啮合线。从摆线形成原理知道，齿轮的齿腰部分即径向直线 $\overline{1-2-3-4}$ 的啮合

线 $\overline{1'-2'-3'-4'}$ 就是半径为 $r'' = \frac{r'}{2}$ 的圆周。

从啮合节点p开始，沿节线 $\overline{AB}$ 截取线段 $\overline{p1'_0} = \widehat{p1_1}$ ，……
 $\overline{p7'_0} = \widehat{p7_1}$ 。

过啮合线上 $1'$ 、 $2'$ 、 $\dots\dots 7'$ 各点作平行于节线的直线，然后以 $1_0'$ 、 $2_0'$ $\dots\dots 7_0'$ 各点为中心，用法线 $\overline{11_1}$ 、 $\overline{22_1}$ $\dots\dots \overline{77_1}$ 的长度，在过 $1'$ 、 $2'$ $\dots\dots 7'$ 的平行线上截取交点 1_0 、 2_0 $\dots\dots 7_0$ ，连结这些点的曲线就是所求的与齿轮齿顶圆弧和齿腰径向线相对应的滚刀齿形曲线。

按上述图解法求得滚刀齿形的正确性是显而易见的。例如取工件上的2点来分析。当齿轮节圆上的 2_1 点与节线上的 $2_0'$ 点接触时， 2_1 点处于啮合节点的位置。齿轮齿形上的2点绕其圆心O旋转到 $2'$ ，由于 $\overline{p2'} = \overline{2_0'2_0} = \overline{22_1}$ ，当 $2_0'$ 点移动到与节点P重合时， 2_0 点也沿与节线平行的直线移动到 $2'$ ，而且在 $2'$ 处两共轭齿形的公法线通过节点P， $2'$ 点就成为啮合点， 2_0 也就是滚刀齿形上的一点。

设K为齿根圆与 $\overline{op}$ 线的交点，过k作直线平行于齿条节线AB，交滚刀齿条齿形曲线于 K_0 点，则 kk_0 至AB的高度 h_{k_0} 应该就是滚刀齿形的齿顶高，按此齿顶高作滚刀时，可保证齿轮要求的齿根圆直径 d_f 。但是，在图示情况下，滚刀齿形曲线上 K_01_0 一段将被削去。延长 KK_0 交啮合线于 K' ，以O为圆心， OK' 为半径作圆交齿轮齿腰直线于 k'' ，则可看出，由于与 $K''1$ 线段相对应的滚刀齿形 K_01_0 已被削去， $K''1$ 一段线段将不能被切成要求的直线，而将形成过渡曲线。

这种情况在钟表齿轮滚刀上是经常遇到的。如果过渡曲线部分太长，齿轮则不能正常啮合，设计滚刀时必须注意这一点。在第二章三中将进一步论述。

至于齿轮齿底圆弧 $1F$ 线段，其共轭的滚刀齿形，通常均与齿腰部分的共轭齿形 $K_02_03_0$ 等部分重叠，无需按啮合线原理求其共轭齿形，可将滚刀齿顶作成适当的圆弧即可（详见第三章一）。

三、啮合线原理算法

啮合线原理算法是根据“按给定速比传递运动的两共轭齿

图1-7中, 设 px 为齿条节线, r' 为工件节圆, 建立下面三个坐标系:

Oxy 刀具坐标系, 与刀具相固连, 随刀具齿条一同平移;

在展成运动开始位置时，齿轮左侧齿廓位于位置I，座标系 $O_2x_1y_1$ 与 $O_2x_2y_2$ 重合，而 Oxy 与 $O_2x_1y_1$ 座标系的 y 轴重合， x 轴相差 r' 。设此时齿轮齿顶圆弧上一点 M 的法线为 $\overline{MO_0}$ ，它与节圆 r' 交于 p' 点。在展成运动中，齿轮连同工件座标系 $O_2x_2y_2$ 向逆时针方向旋转，刀具连同座标系 Oxy 同时向左移动。当齿轮转过 φ 角时，齿轮齿形已到达位置II， p' 到达啮合节点 p ，此时 M 点将与刀具齿廓接触（接触点的公法线通过啮合节点）， M 点即为刀具齿廓上的一点（在 Oxy 座标系中）。我们可根据零件的几何形状，首先求出任意一点 M 在 $O_2x_1y_1$ 座标系的座标，再按下式换算：

$$y = y_1 - r' \quad (1-2)$$

即可得到M点在Oxy坐标系中的坐标，它就是所求滚刀齿形的方程。

下面我们就根据上述原理和方法，来求解钟表滚刀法向齿形。由于齿轮齿形是由齿顶圆弧、齿底圆弧和径向线三部分组成，对滚刀也需按相应的三段即滚刀齿根部分、齿腰部分及齿顶圆弧分别计算。

1. 滚刀齿根部分齿形的计算

为求滚刀齿根部分齿形，需要求出滚刀齿根部分与齿轮齿顶部分接触点对Oxy坐标系的坐标。如上述，我们可先求出接触点对 $O_2x_1y_1$ 坐标系的坐标，即啮合线的方程。这可由图1-8中MQO₂FO_cM封闭折线各边矢量对x、y轴的投影中求得。根据矢量投影法则，此封闭折线射影之和为零，即

$$MQ + 0 + a_0 \cos \varphi - b_0 \sin \varphi - \rho \cos \alpha = 0$$

其中 $MQ = -x_1$

$$\therefore x_1 = a_0 \cos \varphi - b_0 \sin \varphi - \rho \cos \alpha \quad (1-3)$$

$$\text{同理} \quad y_1 = a_0 \sin \varphi + b_0 \cos \varphi + \rho \sin \alpha \quad (1-4)$$

式中 a_0 、 b_0 为O_c在O₂x₂y₂坐标系中的坐标，已知 $\overline{O_cO_2}$ 与y₂轴之间的夹角为 $-\frac{\tau}{2} + \beta$ （见图1-2），于是可得：

$$a_0 = r_c \sin\left(-\frac{\tau}{2} + \beta\right) \quad (1-5)$$

$$b_0 = r_c \cos\left(-\frac{\tau}{2} + \beta\right) \quad (1-6)$$

压力角 α 由图1-8求得：

$$\alpha = \arctg \frac{r' - (a_0 \sin \varphi + b_0 \cos \varphi)}{a_0 \cos \varphi - b_0 \sin \varphi} \quad (1-7)$$

求出 x_1y_1 后，按（1-1）、（1-2）式将其转换到Oxy坐标系中

$$x = a_0 \cos \varphi - b_0 \sin \varphi - \rho \cos \alpha + r' \varphi \quad (1-8)$$

$$y = a_0 \sin \varphi + b_0 \cos \varphi + \rho \sin \alpha - r' \quad (1-9)$$

(1-8)、(1-9)式就是齿轮齿顶圆弧与刀具齿条相共轭的部分即滚刀齿根部分的齿廓方程式。

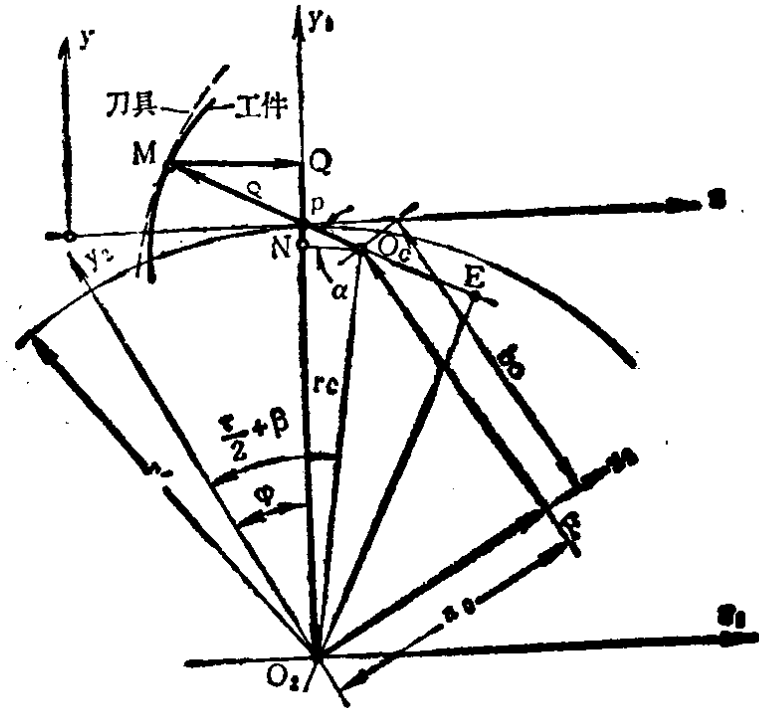


图 1-8 滚刀齿根部分齿形计算图

下面来确定 φ 角的取值范围。

(1) 加工齿轮齿顶点 A 的滚动角 φ_A 的计算
从图1-9可以得出

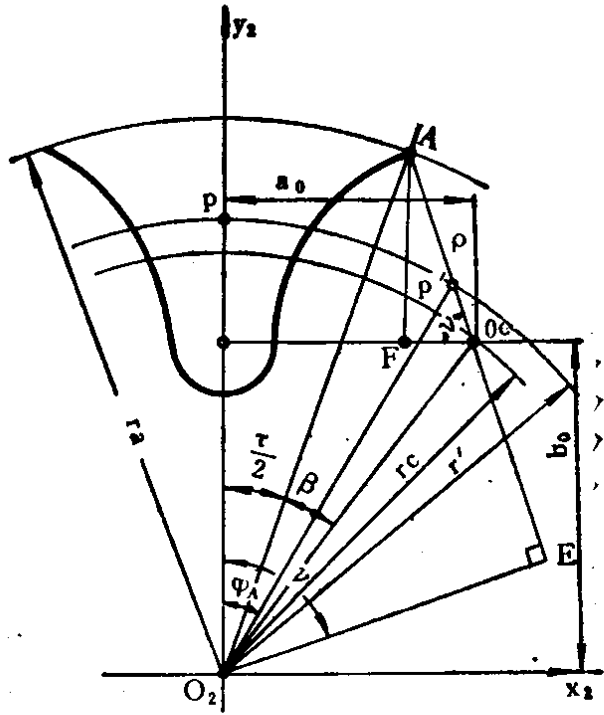


图 1-9 加工齿轮齿顶点 A 的滚动角

$$\cos(\nu - \varphi_A) = \frac{r_o \cos\left(\nu - \frac{\tau}{2} - \beta\right)}{r'}$$

$$\therefore \varphi_A = \nu - \arccos \frac{r_o \cos\left(\nu - \frac{\tau}{2} - \beta\right)}{r'} \quad (1-10)$$

考虑到使用电子计算机计算, 将 (1-10) 式变换成

$$\varphi_A = \nu - \arcsin \sqrt{1 - \left[\frac{r_o \cos\left(\nu - \frac{\tau}{2} - \beta\right)}{r'} \right]^2} \quad (1-11)$$

式中 ν 角可按下式计算:

$$\nu = \arctg \frac{r_a \cos \frac{\tau}{2} - b_0}{a_0 - r_a \sin \frac{\tau}{2}} \quad (1-12)$$

此式适用于 $\nu < 90^\circ$ 。当 $a_0 < r_a \sin \frac{\tau}{2}$, $\nu > 90^\circ$ 时, 则应用下式:

$$\nu = \pi - \arctg \frac{r_a \cos \frac{\tau}{2} - b_0}{a_0 - r_a \sin \frac{\tau}{2}} \quad (1-12')$$

(2) 确定 φ_B (图1-10), 即加工齿轮齿顶圆弧最下面一点。

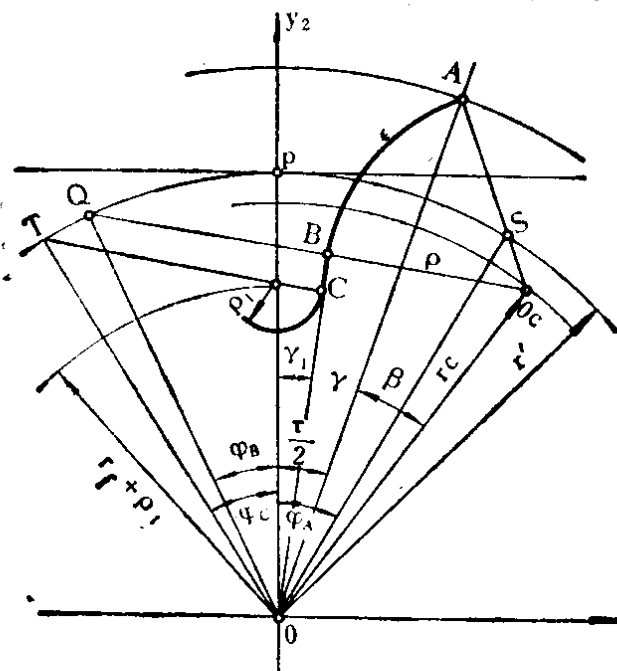


图 1-10 确定B点、C点的滚动角