机电产品的可靠性

何国伟编著

上海科学技术出版社

内 容 简 介

我国军用标准 GJB450-88《装备研制与生产的可靠性通用大纲》简称《可靠性大纲》是基本上参照 MIL-STD 785B《可靠性大纲》制定的。它规定了产品可靠性工作应进行的工作项目(可靠性大纲、监督及控制五项、可靠性设计与评估九项、可靠性研制与生产试验四项)十八项。这是我国高可靠、高质量产品可靠性质量工作的技术法规。实践证明,只要按此办理,就可以保证产品的可靠性与质量。本书根据国际及国内最先进的技术标准,介绍机械及机电产品如何展开进行这些可靠性工作项目及维修性工作项目、人机设计、FTA。并介绍了应力-强度分析的基本方法。

本书可供机械及机电部门、企业的管理、设计、生产人员参考,可作为大专院校的可靠性教材,也可作为贯彻宣传《军工产品质量管理条例》及《可靠性大纲》的学习参考资料。

本书的大部分内容是国内其他作者已出版的可靠性著作中不详细或未予介绍的,但又是进行可靠性工作所必需的知识。

机电产品的可靠性
何国伟 编著
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 祝桥新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16 印张 19.75 字数 473,000
1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷
印数 1—6,500
ISBN 7-5323-1110-4/TM·32
定价:6.60元

序　　言

产品的可靠性是产品质量的主要内容。产品的可靠性是设计出来的、生产出来的、管理出来的。设计决定了产品的固有可靠性。因此，“可靠性管理”及“可靠性设计”是可靠性工程的重要组成部份。

国际标准是国际先进技术的经验总结。根据国务院指示：我国的国家标准(GB)要向国际先进标准积极靠拢，要等同采用、等效采用、参照采用国际先进标准。

产品的可靠性是产品质量的重要组成部份，在质量中起决定性的作用。一九八七年经国务院、中央军委批准、一九八七年六月五日，国防科工委发布的《军工产品质量管理条例》，就是参考国外先进经验，结合我国实际总结出来的重要质量可靠性法规。军工产品的可靠性质量要求高，必需执行这个法规；民用产品要高可靠高质量，也应执行或大部份执行这个法规。我国国家军用标准 GJB450-88《装备研制与生产的可靠性通用大纲》简称《可靠性大纲》(1988年 3 月公布)是参照美军标准 MIL-STD 785B 结合我国实际制订的，列出了可靠性工作的必要工作项目。包括：工作项目 100 系列：可靠性大纲、监督及控制。101～105，五项；工作项目 200 系列：可靠性设计与评估 201～209，九项；工作项目 300 系列：可靠性研制与生产试验。301～304，四项。这样就对产品应作的主要可靠性工作系统化、条理化了，使得军工产品、民用高可靠、高质量产品的可靠性工作有了一个准绳。

因此，本书就按GJB450-88及 MIL-STD-785B 的思路、次序，介绍机械及机电产品可靠性工作的这些工作项目及相应的可靠性质量保证体系。工作项目 205 在785B 中为“潜在电路分析”(Sneak Circuit Analysis)，它是大型复杂系统的一个工作项目(通过系统线路的拓扑结构研究，用计算机发现在所有组件均正常工作的情况下，引起不希望的功能或抑制需要功能的潜在电路)，鉴于国内还未有相应文件，故从略。对机械产品的可靠性设计有一定作用的“应力-强度分析”(暂编号为工作项目 205′)，此项目还未有国际国内标准，其重要性相对来说要低一些。本书在定稿时，删减了初稿的这部份的很多篇幅，并放到末一章，以免掩盖了重点。

除了末一章应力-强度分析之外，本书所有章节都是根据国际最新的先进技术标准、国家标准(GB)，国家军用标准(GJB)……编写的，作者参加了国际标准、国家标准、国家军用标准的制订、讨论工作，从国际、国内可靠性专家们得到不少教益，使得本书得以最新的技术介绍给读者，谨向国际、国内同行致谢。

本书的特点是：

一、根据国际及国内先进的可靠性管理、可靠性设计标准的要求，全面介绍了机械及机电产品的必要的可靠性工作项目，维修性工作项目。

二、诸工作项目引用了最新的技术标准。

三、本书对可靠性数学不作重点介绍，一般只介绍推导结果及如何应用可靠性数学的结论，公式一般不予推导。

本书引用的统计符号及统计表按最新国标 GB4086.1～4086.6-83 执行(与国际标准组织 ISO 规定相同),与国内已出版的可靠性著作不同(它们在再版时亦应执行国际标准与国标,加以修改),请读者在查公式及表时注意。

本书可供机电部门及企业的管理、设计、生产人员学习参考,可作为大专院校的可靠性教材,也可作为宣传贯彻《军工产品质量管理条例》及《可靠性大纲》的学习参考资料。

愿此书能成一引玉之砖,为四化尽一点点微薄的力量。

何国伟 1987 年 6 月

本书符号表

A、B、…	事件
$\overline{A}$	事件 A 的余事件，事件"A 不发生"
$E[X]$	随机变量 X 的期望（均值），即 μ_X
$f(x)$	随机变量 X 的概率密度函数
$F(x)$	随机变量 X 的分布函数
$F(\nu_1, \nu_2)$	自由度为 ν_1、ν_2 的 F 分布
$F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$	$F(\nu_1,\nu_2)$ 的 α 分位数点，$P(F(\nu\ , \nu_2)<F_\alpha(\nu_1, \nu_2))=\alpha$
$N(\mu, \sigma)$	均值为 μ、方差为 σ^2 的正态分布
$N(0, 1)$	标准正态分布
n	子样（样本）大小
$P(A)$	事件 A 发生的概率
$Q(u)$	即 $1-\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
s^2	子样方差
$t(\nu)$	自由度为 ν 的 t 分布
$t_\alpha(\nu)$	$t(\nu)$ 的 α 分位数点，$P(t(\nu)<t_\alpha(\nu))=\alpha$
$V[X]$	随机变量 X 的方差，即σ_X^2
X、Y、…	随机变量
$\overline{x}$	子样均值
$x_1, x_2, \cdots$	子样个体特性值
$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots$	$x_{(i)}$ 是把子样个体特性值从小到大排列后的第 i 个值，顺序统计量
α	第一类错误
β	第二类错误
γ	置信水平
σ_X^2	随机变量 X 的方差
μ_X	随机变量 X 的均值
$\Phi(u)$	标准正态分布的分布函数，$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
ν	自由度
$\chi^2(\nu)$	自由度为 ν 的 χ^2 分布
$\chi_\alpha(\nu)$	$\chi^2(\nu)$ 的 α 分位数点，$P(\chi^2(\nu)<\chi_\alpha^2(\nu))=\alpha$
$\in$	属于
$\overline{\in}$	不属于
$\wedge$	估计值符号
$\subset$	$A\subset B$ 表示"B 包括 A"，亦即 $B\supset A$

目　录

第一章 可 靠 性

§1.1 可靠性、它是质量的主要内容

产品的功能 (Function) 是产品能够满足某种需求的一种属性。产品在规定条件下和规定时间内、完成规定功能的能力称为产品的"可靠性"(Reliability)。产品出厂后愈久，它的可靠性一般说来就愈低，所以一定的可靠性是对出厂后的一段时期而言的，这一段时期俗称产品的"保险期"。

产品丧失规定的功能称为出"故障"(Failure)，对不可修复或不予修复的产品而言，亦称"失效"。本书统一用"故障"这一名词。为保持或恢复产品能完成规定功能的能力而采取的技术管理措施称为"维修"(Maintenance)。可以维修的产品在规定条件下使用，在规定的时间内，按规定的程序和方法进行维修时，保持或恢复到能完成规定功能的能力称为产品的"维修性" (Maintainability)。人们希望产品在需要工作时能够工作。把可以维修的产品在某时刻具有或维持规定功能的能力称为 "可用性"(Availability)。产品的可用性决定于两个因素：故障的频繁程度及维修性。"产品完成规定功能"包括两个内容：一、性能不超过规定的范围，其可能性叫"性能可靠性"。二、结构不断裂破损，其可能性叫"结构可靠性"。最初，人们只注意让产品的性能满足要求。在实践中，人们发现产品的结构在使用中不出故障是很重要的使用要求，因此早期的"可靠性"指的是结构可靠性。判定出故障的准则称为"故障判据"。产品的性能超差也是一种故障，所以把性能可靠性及结构可靠性合起来称为"狭义可靠性"，表示产品在某一规定时间内不发生故障的可能性。后来，实践说明，人们在使用中要求"产品在需要工作时最好就能工作"，因此对产品的有效性提出了要求，并且还希望有较长的保险期。这样，就把狭义可靠性、可用性、保险期都合起来，称为"广义可靠性"，也就是本书所说的"可靠性"。

生产或服务在特定阶段的实施程序称为"过程" (Process)。产品、过程或服务与满足规定要求或潜在要求能力有关的特征和特性的总合称为 "质量"(Quality)。这定义虽然是标准的，但比较抽象。不那么严格的质量定义包括：性能合格、结构可靠、经久耐用性满足要求、安全、价格低廉、按期交付、售后服务周到等内容。可见，可靠性是质量的主要内容之一，而且是起决定作用的内容。使用方要求产品物美价廉、维修服务好。其中，除了价廉以外，基本上都是可靠性方面的要求。实际上，我国的很多实例证明，产品的可靠性提高了，销售量增加了，由于批量增大，成本下降，也就价廉了。所以可靠性是质量的龙头。抓住了它，全局就活了。

§1.2 可靠性数学的几条基本法则

试验或观测的一种结果称为"事件"(Event)。"产品出故障"就是一个事件。在一定条

件下，可能发生也可能不发生的事件称为“随机事件”(Random Event)。产品出故障就是一个随机事件。在一定条件下必然发生的事件称为“必然事件”，在一定条件下不可能发生的事件称为“不可能事件”，它们都是随机事件的特例。

当试验条件可以重复，在 n 次试验中，事件 E 发生 m 次，则事件 E 的发生“频率”(relative frequency)为 m/n；当试验次数无限增加时，如果事件 E 发生的频率趋于一个稳定的数值，则这个值称为事件 E 的“概率”，以 $P(E)$ 表示。

可能性就用概率来表示，因此产品可靠性的定义是：“产品在规定条件下和规定时间内完成规定功能的概率”。

由于发生频率一定在 $0\sim1$ 之间，故有：对任一事件 A，

【法则 1】 $$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

即产品的可靠性在 0，1 之间。

“事件 A 发生”与“事件 A 不发生”叫“互相对立事件”。A 的对立事件记为 $\overline{A}$。设 A 表示“产品在规定条件下和规定时间内完成规定功能”这一事件，则 $P(A)$ 表示产品的可靠性，记为 q，

$$q=P(A)$$

$\overline{A}$ 表示“产品在规定条件下和规定时间内未完成规定功能”这一事件，$P(\overline{A})$ 表示产品的不可靠性，记为 p，

$$p=P(\overline{A})$$

由于设事件 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$，则事件 $\overline{A}$ 发生的频率为 $\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}$，故有

【法则 2】 $$P(\overline{A})=1-P(A)$$

由此有 $$p=1-q,\ \text{即}\ p+q=1。$$

设事件 A 发生与否和事件 B 的发生与否无关，则事件 A 和事件 B 叫“互相独立事件”。

设事件 A 和 B 是互相独立的，在 n 次试验中，事件 A 大体上发生 m 次，$\frac{m}{n}\approx P(A)$；在事件 A 发生的 m 次中，事件 B 大体上发生 w 次，$\frac{w}{m}\approx P(B)$。于是在 n 次试验中，事件 A、B 同时发生的次数为 w 次，其频率 $=\frac{w}{n}=\frac{m}{n}\frac{w}{m}\approx P(A)P(B)$。

【法则 3】 以 AB 表示“事件 A、B 同时发生”这一事件，设 A 和 B 是互相独立的，则有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

设 $P(A)$ 表示产品 A 的可靠性，$P(B)$ 表示产品 B 的可靠性。设 A、B 的出故障是互相独立的，即可靠性是互相独立的，则 A、B 都可靠的概率即 $P(A)P(B)$。

推而广之，n 个产品都可靠的概率在它们的可靠性都是互相独立的条件下、等于它们可靠性的积。

由于可靠性的值总小于 1，因此一个产品的组成部分愈多，它的可靠性一般来说就愈低。所以，在可靠性工作中，有一句话：“简单就是可靠”，这是设计准则之一。

如果两个事件不会同时发生，则这两事件叫做“互不相容事件”。设事件 A、B 为互不相容事件，在 n 次试验中，A 出现 m_A 次，B 出现 m_B 次。则 $P(A)\approx m_A/n$，$P(B)\approx m_B/n$。由于 A、B 不会同时发生，所以 A、B 之中有一个发生的次数为 m_A+m_B，其发生频率为 $(m_A+$

$m_B)/n = m_A/n + m_B/n \approx P(A) + P(B)$。

【法则 4】 设以 $A+B$ 表示“A、B 之中至少有一个发生”这一事件，如果 A、B 是互不相容的，则

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如 A、B 不是互不相容的，则可以理解，有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

在可靠性工程中，一个产品可能有几种故障。由于两种故障同时出现的可靠性极小，所以我们认为故障之间是互不相容的。因此，如果产品有 k 种故障，其发生概率为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，则其中之一出现即产品出故障的概率 p 为

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

【离散随机变量，二项分布】

按一定概率可以在一个特定数集中取值的变量称为“随机变量”(variate, random variable)。只能取某些离散值的称为“离散随机变量”。表示一个离散随机变量取给定值或属于给定值集的概率所确定的函数称为“离散随机变量的概率分布”(Probability distribution)。设 x_i 是离散随机变量 X 的一个可能取值，它取值 x_i 的概率为 p_i，则记作

$$p_i = P(X = x_i)$$

p_i 叫离散随机变量的概率 (Probability for a discrete random variable)。

设一个产品在执行一次任务中可能成功、可能失败。令 X 为它的成功失败特性值，令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{产品失败} \\ 0, & \text{产品成功} \end{cases}$$

则 X 就是一个所谓“成败型”的离散随机变量。设 X 有概率 q_i 成功，概率 p_i 失败，则离散随机变量的概率为：

$$P(X=1) = p_i, \qquad P(X=0) = q_i$$

设一个离散随机变量 X 可采 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 诸值，$P(X = x_i) = p_i$，则随机变量 X 在整个可取值范围内取值的概率应为 1,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$$

在成败型随机变量情况，应有

$$p + q = 1, \quad \text{即} \quad p = 1 - q, \quad q = 1 - p$$

设单个产品的失败概率为 p(成功概率为 q)，随机抽取 n 个这样的产品，则 n 个产品中的失败数 X 可能的取值为 $0, 1, 2, \cdots, n$，X 是一个离散随机变量。

设两个随机变量的各自取值互不影响，则称它们是“互相独立”(independence)的。此概念可推广到两个以上随机变量的情形。

设单个产品的失败概率为 p，诸产品的成败是互相独立的，则 n 个产品中有 x 个失败的概率为(见基本概率教材)

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

设离散随机变量的取值范围为 $0, 1, 2, \cdots, n$,

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 < p < 1$$

则 X 称为是具有“二项分布”(Binomial distribution)的随机变量。习惯上简称:“X 为二项分布”。n 个产品中的失败数X,n 个产品中的不合格品数 X,……都是具有二项分布的随机变量。

设 X 为二项分布。则 X 的取值从 0 到 x 的总概率为

$$P(X\leqslant x)\equiv P(x;n,p)=\sum_{y=0}^{x}\frac{n!}{y!\,(n-y)!}p^{y}(1-p)^{n-y}$$

$P(x;n,p)$ 是一种概率分布。它可以从定义直接算出。

例如: $P(2;20,6.0\%)=\sum_{y=0}^{2}\frac{20!}{y!\,(20-y)!}(6.0\%)^{y}(1-6.0\%)^{20-y}=0.88503$

为了节省计算工作量,我国发布了 GB4086.5-83《统计分布数值表,二项分布》,表值 6 位小数,可供查用。

例如可查得　$P(2;20,6.0\%)=0.885028$。

Larson 发表了如下的诺谟图(A.S.Q.C.Vol.23.No.6)。今以例说明用法。

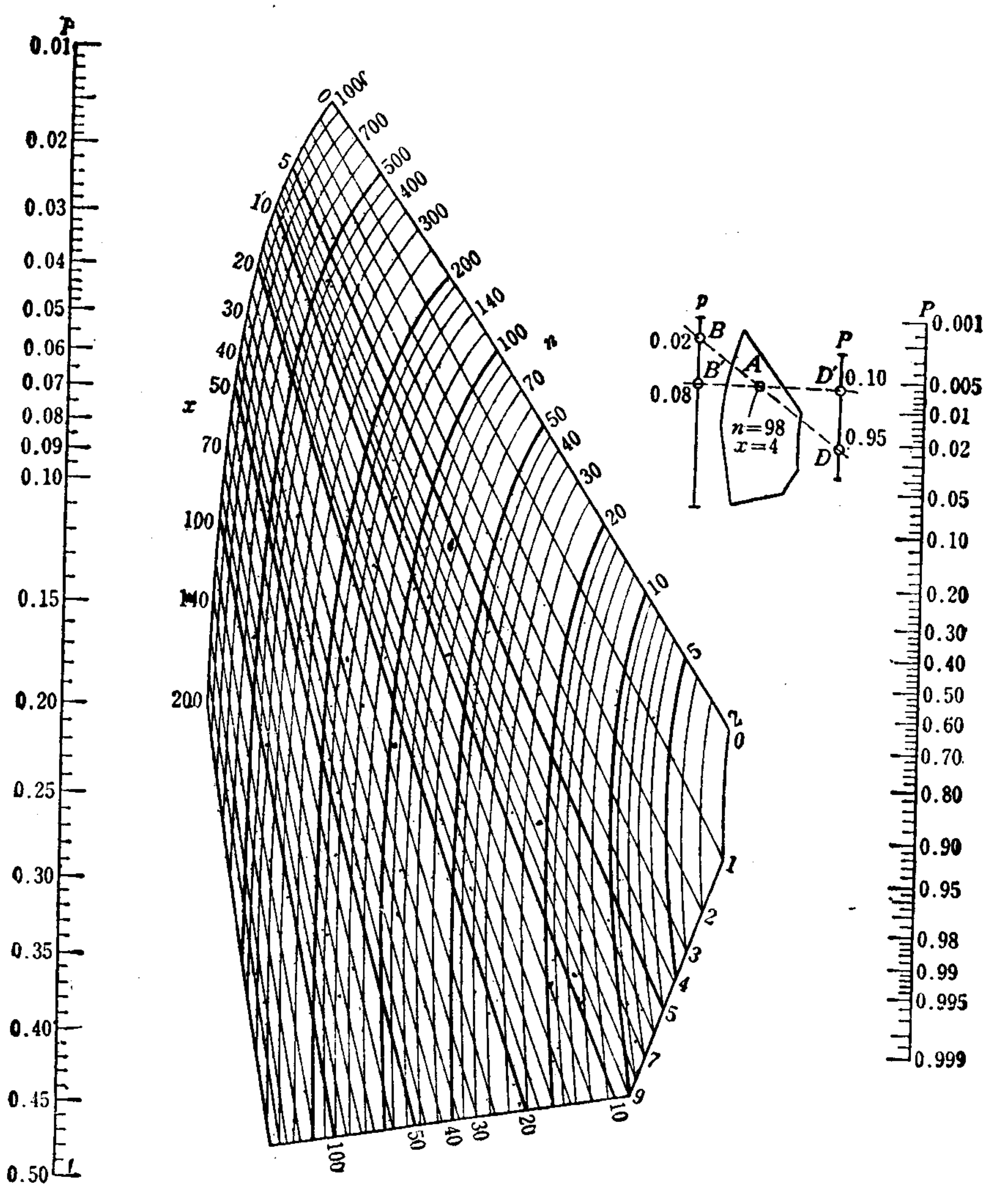

图 1 2.1　Larson 诺谟图

【例 1.2.1】 用 Larson 诺谟图求 $P(y;n,p)$，并用以求 $P(y;98,p)$ 为例，$p=2.0\%$ 或8.0%。

解：1．根据诺谟图，求相应于 n 值的经线与相应于 x 值的纬线的交点 A。

本例中，查出相应于 $n=98$ 的经线与相应于 $x=4$ 的纬线，求出它们的交点 A。

2．在诺谟图左侧的 p 尺上，找出刻度为 p 的 B 点。本例中，在 p 尺上找出刻度为 2.0% 及 8.0% 的 B, B' 点。

3．联 BA 直线，延长交诺谟图右侧的 P 尺于 D 点，D 点的刻度即 $P(y;n,p)$。

本例中，BA 交 P 尺于刻度为 0.95 的 D 点，$B'A$ 交 P 尺于刻度为 0.10 的 D' 点，故

$$P(y;98,2.0\%)=0.95,\quad P(y;98,8.0\%)=0.10$$

离散随机变量 X 的概率设为

$$p_i=P(X=x_i),\quad i=1,2,3,\cdots$$

则其"期望"(expectation)或"均值"(mean)定义为：

$$\mu_X\equiv E[X]=\sum_i x_i p_i$$

其中的求和是对所有可能取值 x_i 进行的。

以成败型变量 X 为例，设 $P(X=1)=p$，$P(X=0)=q$，则

$$\mu_X\equiv E[X]=1\times p+0\times q=p$$

随机变量 X 的 k 次幂的期望 $E[X^k]$ 称为 X 的"k 阶原点矩"(moment of order k about the origin)，亦记作 μ_k'。随机变量 $X-\mu_X$ 的 k 次幂的期望 $E[(X-\mu_X)^k]$ 称为 X 的"k 阶中心矩"(centred moment of order q)，亦记作 μ_X。

根据二项分布 X 的定义，$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$。根据 k 阶原点矩及 k 阶中心矩的定义，可用代数方法导出如下结果(推导从略)

$$\mu_1'=np$$
$$\mu_2=npq$$
$$\mu_3=npq(q-p)$$
$$\mu_4=npq(3npq+1-6pq)$$

一阶原点矩即期望值 $\mu_X\equiv E[X]$，二阶中心矩称为 X 的"方差"(Variance)，亦记为 σ_X^2。所以对二项分布 X 而言

$$\mu_x\equiv E[X]=np,\quad \sigma_X^2=npq$$

【泊松分布】

在高可靠产品情况，即使试验数 n 较大，失败数 np 仍较小。

【公式】 当 $n\gg1$，$np=\lambda$ 时，

$$P(x;n,p)\approx\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots$$

【证】

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x(x-1)\cdots2\cdot1}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

令 $n\to\infty$，则$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\to e^{-\lambda}$，故

$$P(X=x)\to\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

设 X 是一离散型随机变量，如 X 取 x 值的概率为

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

则 X 称为具有"泊松分布"(Poisson distribution)的随机变量。λ 是一个正参数。不难证明，此时 X 的期望值 μ_X 及方差 σ_X 都等于 λ。

即 $$\mu_X\equiv E[X]=\lambda,\quad \sigma_X^2\equiv E[(X-\mu_X)^2]=\lambda$$

又 $$\mu_3=\lambda,\qquad \mu_4=\lambda+3\lambda^2$$

大型设备在一定时期(例如一个月)内的故障数 X 一般是具有泊松分布的随机变量。λ 即单位时间内的平均故障数，亦即平均故障率，简称故障率。

泊松分布的累积概率为 $P(x;\lambda)=\sum_{i=0}^{x}P(X=i)=\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$，拉逊在 1967 年发表了如下的诺谟图，用以查得 $P(x;\lambda)=\sum_{i=0}^{x}P(X=i)$。

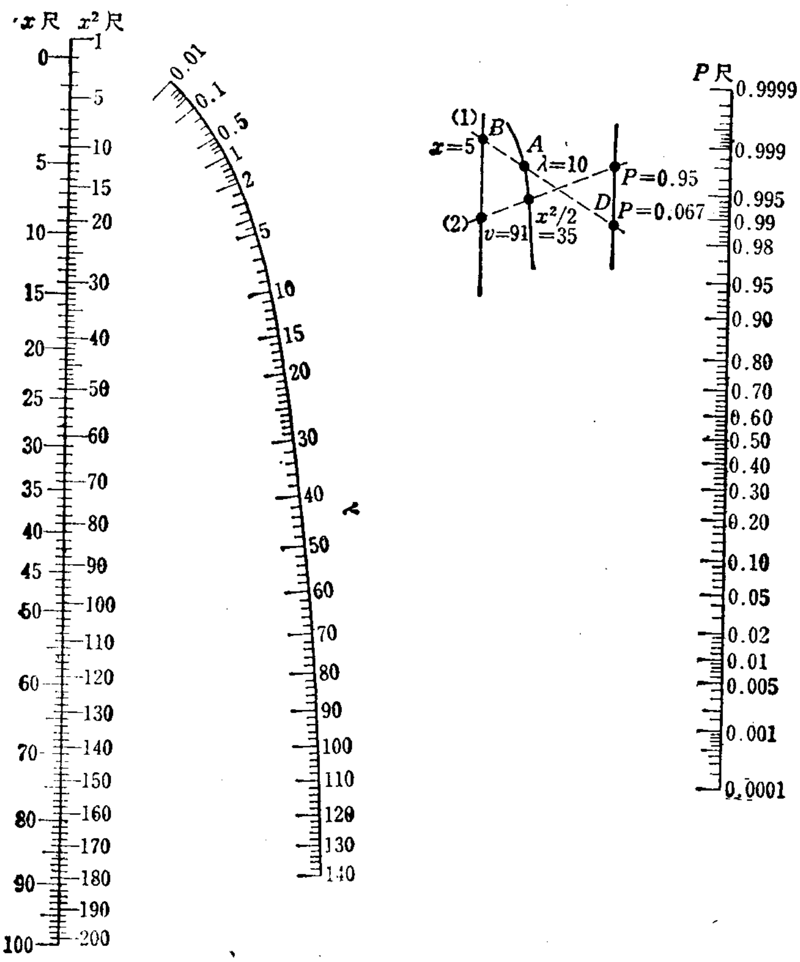

图 1.2.2 拉逊诺谟图

【例 1.2.2】 用诺谟图求$\sum_{i=0}^{5}P(X=i)$，$\lambda=10$，即求 $P(5;10)$？

解：1. 诺谟图中间的曲尺为 λ 尺，在 λ 尺上找出刻度为 λ 的 A 点。

今在 λ 尺上找出刻度为 $\lambda=10$ 的 A 点。

2. 在诺谟图的左侧为 x 尺，在 x 尺上找出刻度为 x 的 B 点(注意 x 尺的一侧为 x^2 尺，不要混淆)。

今在 x 尺上找出刻度为 $x=5$ 的 B 点。

3. 联 BA 直线，延长 BA 交诺谟图右侧的 P 尺上的 D 点。D 点的刻度即

$$\sum_{i=0}^{x}P(X=i)=P(x;\lambda)$$

今延长 BA 交 P 尺于 D 点，D 点的刻度为 0.067，故

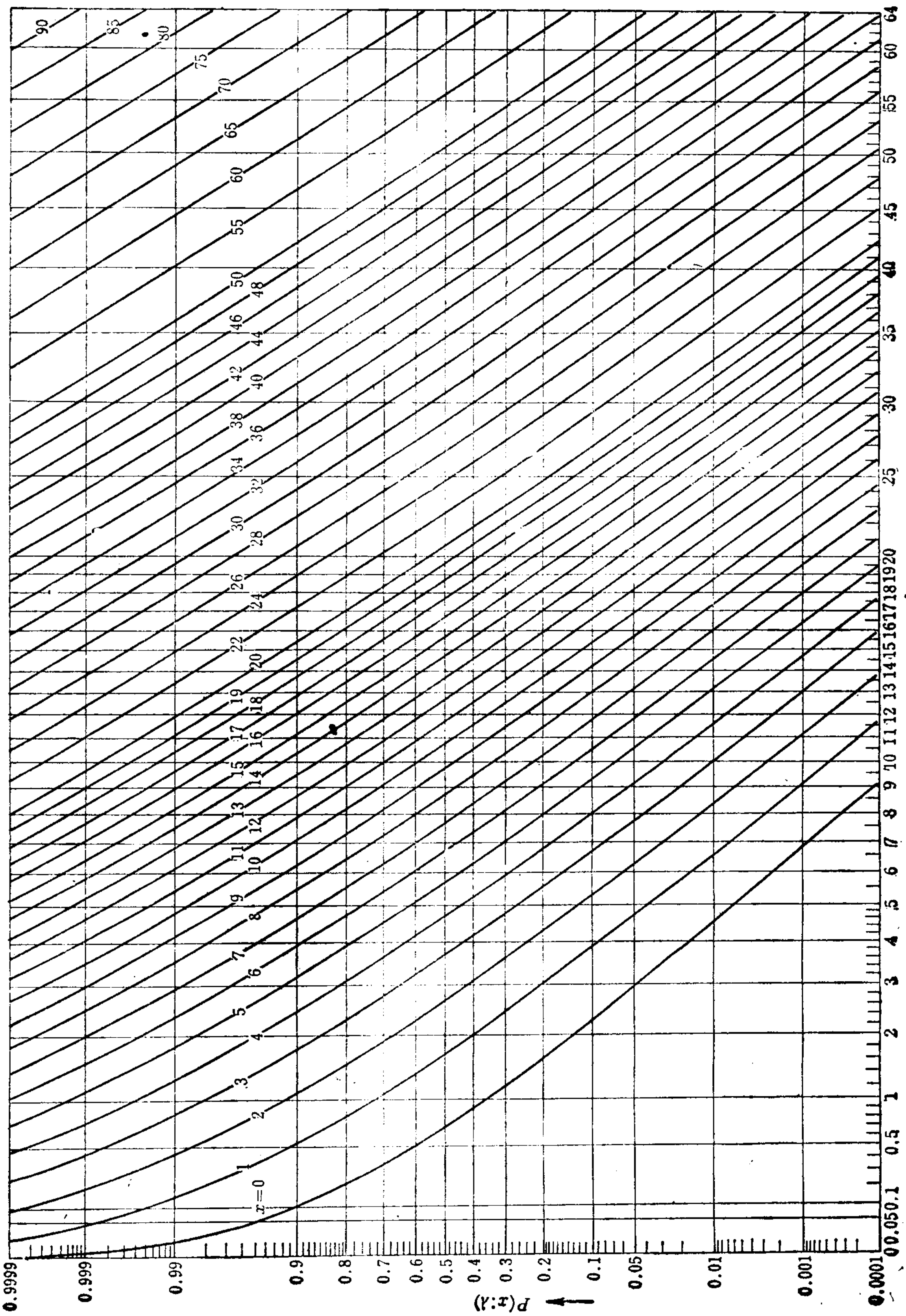

图 1.2.3 芳贺诺谟图

$$P(x;\lambda)=\sum_{i=0}^{x}P(X=i)=6.7\%$$

实际上，$P(5;10)=\sum_{i=0}^{5}P(X=i)$的精确值为 6.7086%。

比拉逊诺谟图更精确一些的是 Thorndike 诺谟图，经日本的芳贺加以改进于 1971 年发表。

芳贺诺谟图的横坐标为 λ，纵坐标为$\sum_{i=0}^{x}P(X=i)$。不同的 x 值对应于不同曲线。以例 1.2.2 为例，芳贺诺谟图的用法如下：

1. 对给定的 x 值找出相应的曲线。

本例即找出 $x=5$ 的曲线。

2. 横坐标为 λ 值在曲线上相应点的纵坐标值即 $\sum_{i=0}^{x}P(X=i)$。

本例的 $\lambda=10$，横坐标为 10，在曲线上相应点的纵坐标值查得为 0.067，故

$$\sum_{i=0}^{5}P(X=i)=6.7\%$$

【连续随机变量，正态分布】

按一定概率可以在一个特定数集中取值的变量称为"随机变量"，其中可以取一个有限(或无限)区间所有值的称为"连续随机变量"(Continuous random variable)。对任意值 x，随机变量 X 小于或等于 x 的概率是 x 的函数，记为

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

$F(x)$ 称为 X 的"分布函数"(Distribution function)。如果分布函数的微商存在，

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

此中 $f(x)dx$ 是概率元，$f(x)\,dx=P(x<X<x+dx)$，则 $f(x)$ 为连续随机变量 X 的"概率密度函数"(Probability density function for a continuos random variable X)

设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\quad -\infty<x<\infty$$

则 X 叫具有"正态分布"(Normal distribution) 的随机变量。它的典型图形如图 1.2.4。正态分布的概率密度函数的曲线图形完全为两个参数 μ、σ 所决定，曲线 $y=p(x)$ 对于直线 $x=\mu$ 对称，σ 表示曲线胖瘦程度。如 σ 的值大，曲线显得胖；如 σ 的值小，曲线显得瘦。如果 X 是上述概率密度函数的正态分布，则记作 $N(\mu,\sigma)$。(日本著作中用 $N(\mu,\sigma^2)$ 符号，今从西方)。如 $\mu=0,\sigma=1$，则称为"标准正态分布"(Standardized normal distribution)，记为 $N(0,1)$。

正态分布是一种最常见的分布。产品的性能参数多数是正态分布，产品的应力及强度也多是正态分布，部品构件、组件的寿命亦多是正态分布。

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx$$

X 落在(a,b)之间的概率为

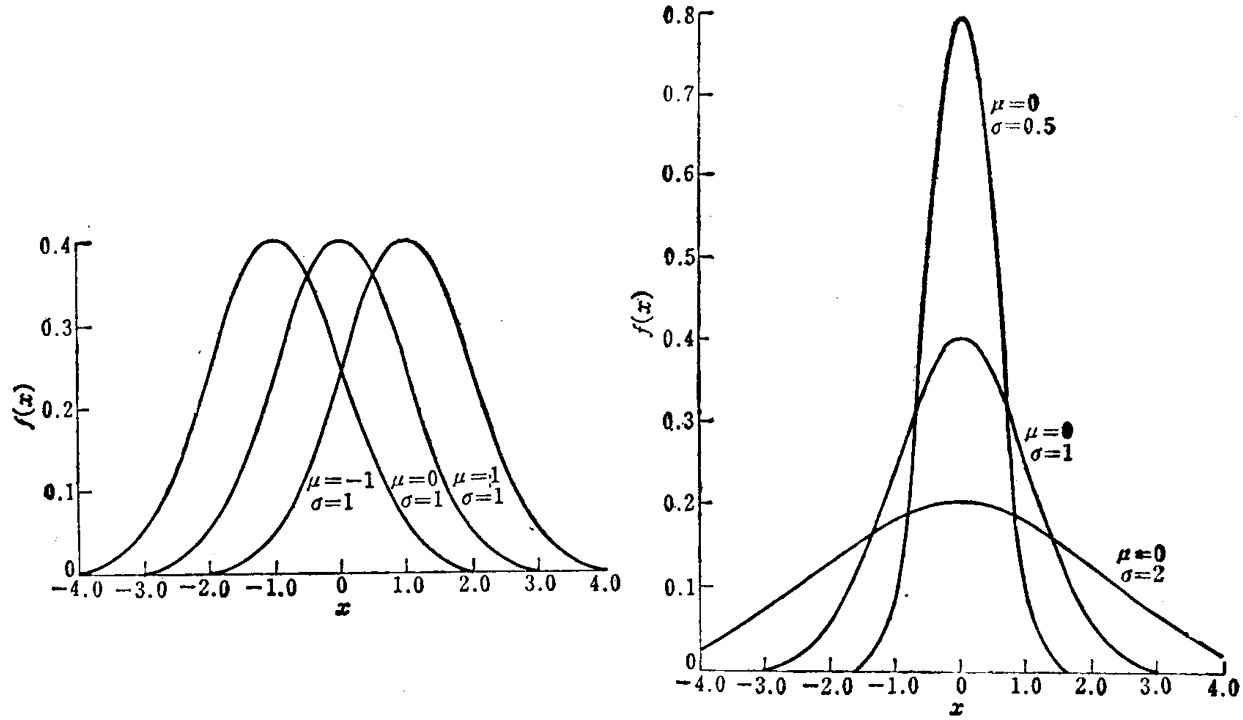

图 1.2.4 正态分布图

$$P(X\in(a,b))=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

即概率密度函数曲线 $y=f(x)$ 以下，(a,b) 区间上的面积。由于 $P(X\in(-\infty,\infty))=1$，故曲线$y=f(x)$ 以下，x 轴上的总面积为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

X 的"期望"(或"均值") (Expectation, mean) 定义为

$$\mu_X\equiv E[X]=\int xf(x)\,dx$$

这里的积分区域即 x 的取值范围。随机变量的期望就是它的概率分布的期望。

期望等于零的随机变量称为"中心化随机变量" (Centred random variable)。设 X 的期望为 μ_X，则相应的中心化随机变量为 $X-\mu_X$。

随机变量 X 的 q 次幂的期望 $E[X^q]$ 称为 X 的 "q 阶原点矩" (moment of order q about the origin)，记为 μ'_q。一阶原点矩就是随机变量的期望。X的中心化随机变量 $X-\mu_X$ 的 q 次幂的期望 $E[(X-\mu_X)^q]$称为 X 的"q 阶中心矩"(Centred moment of order q)，记为 μ_q。

X 的二阶中心矩为 μ_2，特记为

$$\sigma_X^2\equiv\mu_2\equiv E[(X-\mu_X)^2]=\int(x-\mu_X)^2f(x)\,dx$$

这里的积分区域即 X 的取值范围。σ_X^2 称为 X 的"方差"(variance)，即相应的中心化随机变量平方的期望。σ_X 是方差的正平方根，称为"标准差"或 "标准偏差" (Standard deviation)。

对于正态分布 X: $N(\mu,\sigma)$ 而言

$$\mu'_q=\int_{-\infty}^{\infty}x^q f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

可算得

$$\mu'_1=\mu$$

故 $X: N(\mu,\sigma)$ 的均值亦即一阶原点矩就是 μ，即 $\mu_X=\mu$。又

$$\mu'_2=\sigma^2+\mu^2$$

$$\mu'_3=3\mu\sigma^2+\mu^3$$

$$\mu'_4=3\sigma^4+6\mu^2\sigma^2+\mu^4$$

……

对于正态分布 $X: N(\mu,\sigma)$ 而言

$$\mu_q=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^q f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

可算得

$$\mu_2=\sigma^2$$

故 $X: N(\mu,\sigma)$ 的方差亦即二阶中心矩，就是 σ^2，即 $\sigma_X^2=\sigma^2$。

$$\mu_3=0$$

$$\mu_4=3\sigma^4$$

……

期望等于零、标准差等于 1 的随机变量称为"标准化随机变量"(standardized variate)。设 X 的期望即均值为 μ_X，标准差为 σ_X，则相应的标准化随机变量为

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$$

对于正态分布 $x: N(\mu,\sigma)$ 而言，它的 $\mu_X=\mu,\sigma_X=\sigma$，所以相应的标准化随机变量为

$$U=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

可以推得：U 的概率密度函数为

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}},\qquad -\infty<u<\infty$$

它的均值为 0，标准差为 1，即 U 为 $N(0,1)$，它是"标准正态分布"。标准正态分布的分布函数定义为

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

有的书上定义：$Q(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$，　则 $Q(u)=1-\Phi(u)$

$\Phi(u)$ 表见下页 ($u>0$)。

$\Phi(u)$ 表的用法如下：

情况 1　$u\geqslant 0$

设要求 $\Phi(u)$，u 是有一个个位数(可以是 0)、两位小数的数。设 $u=\varDelta.x\square$。则根据 $\varDelta.x$，查出相应的行；根据□，查出相应的列，行列交会处的数即 $\Phi(u)$。

例如要查 $\Phi(1.33)$。先查 1.3 所相应的行，再查 0.03 所相应的列，行列交会格中的数为 0.908241，故

$$\Phi(1.33)=0.908241$$

情况 2　$u<0$