

# 点集拓扑

余玄冰 编译



北京师范大学出版社

# 点 集 拓 扑

余玄冰 编译

北京师范大学出版社

1983年11月

---

044996

**点集拓扑**

余玄冰 编译

\*

北京师范大学出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
湖南省新华印刷二厂印刷

•

开本：787×1092 1/32 印张：6.75 字数：140千

1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷

印数：1—13, 500

统一书号：13243·32 定价：0.70元

## 内 容 提 要

本书是近几年来北京师范大学数学系为高年级学生、研究生开设〈点集拓扑〉课所编写的讲义。内容取材于 James Dugundji 所著〈拓扑学〉一书。包括集论初步，一般拓扑空间，子空间、积空间、商空间（粘合拓扑和弱拓扑），特殊拓扑空间，分离公理、复盖公理、用滤子基描述收敛，连通性和紧致性分别列入以上两大部分，附录中的函数空间和同伦列为选读。

本书可作大专院校高年级、研究生选课教材或参考。也可供数学科技人员参考。

## 前 言

本书是近几年来为系里高年级学生、研究生开设的《点集拓扑》选修课编写的讲义。内容取材于 James Dugundji 所著《拓扑学》一书。

前五章是对一般拓扑空间的研究，包括子空间、积空间和商空间。这部分内容的主要特点是，对商空间采用了“粘合”和“粘贴”两种不同的观点，并在引进弱拓扑的基础上，建立了空间的“切割”和“粘贴”的观念。

后五章是对特殊拓扑空间的研究。包括分离公理、复盖公理和度量空间。这部分内容的主要特点是，在复盖公理中，重点介绍了仿紧空间，仿紧空间和度量化定理、单位分解存在定理之间的关系。并且，为了深入研究一般拓扑空间的性质，引进了“滤子基”的概念。

此外，连通空间和紧致空间依次分别列入以上两大部分。

对集合论部分，我们假定读者已经具备了一般集合论的常识，只是作为复习和必要的补充，放在第一章。并且，省去了基数和序数定义。

全书小字部分是供选读的内容。在最后的附录中，介绍了函数空间和同伦，是为学生进一步选修代数拓扑课所编写的参考资料。

根据我们的经验，按每周讲授4学时计算，这本书的必读内容，一学期之内可以完成。

在讲授及编写本讲义的过程中，适当参考了 James R. Munkres 的《拓扑学》，Murray Eisenberg 的《拓扑学》，江泽涵先生的《拓扑学引论》以及李孝传先生的讲义《一般拓扑学导引》。

蒋人璧、王敬庚二同志在与编者共同的教学过程中，对讲义的内容提出了许多宝贵意见，并对习题的配备付出了很大劳动。北京师院数学系王景福教授认真而细致地审阅了全书稿，指出了原稿中的不足之处。在此，编者表示衷心的感谢。

编 者

1982年6月

# 目 录

<b>第一章 集论初步</b> .....	( 1 )
§ 1. 集合.....	( 3 )
§ 2. 映射.....	( 11 )
§ 3. 序.....	( 15 )
§ 4. 基数.....	( 18 )
习题.....	( 22 )
<b>第二章 拓扑空间</b> .....	( 25 )
§ 1. 拓扑空间.....	( 25 )
§ 2. 拓扑基.....	( 28 )
§ 3. 集合的拓扑化.....	( 30 )
§ 4. 基本概念(闭集、闭包、内部、边界和稠密) .....	( 36 )
§ 5. 子空间.....	( 41 )
§ 6. 连续映射.....	( 43 )
§ 7. 映射的分段定义.....	( 47 )
§ 8. 连续的实值函数.....	( 50 )
§ 9. 开映射和闭映射.....	( 53 )
§ 10. 同胚.....	( 55 )
习题.....	( 58 )
<b>第三章 积空间</b> .....	( 63 )
§ 1. 卡氏积拓扑.....	( 63 )

§ 2.	映射的连续性	(68)
§ 3.	积空间中的“平行线”	(74)
	习题	(75)
<b>第四章</b>	<b>连通空间</b>	(77)
§ 1.	连通性	(77)
§ 2.	应用	(82)
§ 3.	连通支	(85)
§ 4.	局部连通	(86)
§ 5.	道路连通	(89)
	习题	(94)
<b>第五章</b>	<b>粘合拓扑; 弱拓扑</b>	(97)
§ 1.	粘合拓扑	(98)
§ 2.	粘合拓扑基本定理	(99)
§ 3.	商空间	(101)
§ 4.	空间的粘贴	(112)
§ 5.	弱拓扑	(114)
	习题	(119)
<b>第六章</b>	<b>分离公理</b>	(121)
§ 1.	豪斯朵夫空间(或“ $T_2$ ”)	(121)
§ 2.	正则空间(或“ $T_3$ ”)	(123)
§ 3.	正规空间(或“ $T_4$ ”)	(125)
§ 4.	正规性的乌里松(P. Urysohn)特征	(126)
§ 5.	正规性的铁兹(Tietze)特征	(130)
§ 6.	完全正则空间	(137)
	习题	(138)



<b>第七章</b>	<b>复盖公理</b> .....	(140)
§ 1.	空间的复盖.....	(140)
§ 2.	仿紧空间.....	(142)
§ 3.	加细型.....	(144)
§ 4.	单位分解.....	(147)
§ 5.	第二可数空间, 林德略夫(Lindelöf)空间 .....	(149)
	习题.....	(150)
<b>第八章</b>	<b>度量空间</b> .....	(152)
§ 1.	集合上的度量.....	(152)
§ 2.	由度量引进拓扑.....	(153)
§ 3.	等价的度量.....	(154)
§ 4.	度量拓扑的性质.....	(155)
§ 5.	$L^2(\mathcal{A})$ 空间(或: Hilbert 空间).....	(156)
§ 6.	拓扑空间的度量化.....	(158)
	习题.....	(162)
<b>第九章</b>	<b>收敛</b> .....	(164)
§ 1.	序列和网, 极限点和丛点.....	(164)
§ 2.	空间的滤基.....	(167)
§ 3.	滤基的收敛性质.....	(169)
§ 4.	用滤基描述闭包.....	(171)
§ 5.	用滤基描述连续.....	(172)
§ 6.	“序列”的适用范围.....	(172)
§ 7.	极大滤基.....	(175)
	习题.....	(177)

<b>第十章 紧致性</b> .....	(179)
§ 1. 紧致空间.....	(180)
§ 2. 定义在紧空间上的连续映射.....	(183)
§ 3. 可数紧.....	(185)
§ 4. 度量空间中的紧致性.....	(187)
§ 5. 局部紧.....	(190)
§ 6. 紧化.....	(191)
习题.....	(193)
<b>【附录】 函数空间和同伦</b> .....	(196)
(一) 函数空间.....	(196)
§ 1. 紧开拓扑.....	(196)
§ 2. 复合连续性; 赋值映射 .....	(198)
§ 3. 函数空间和积空间之间的关系 .....	(199)
(二) 同伦 .....	(201)
§ 1. 同伦 .....	(201)
§ 2. 同伦类 .....	(203)
§ 3. 相对同伦.....	(205)
§ 4. 收缩核和可扩张性 .....	(205)
§ 5. 同伦和形变保核收缩 .....	(206)

## 第一章 集论初步

与古典数学相对照，近代数学已经走出了数集的范围，在抽象的集合中去讨论数学问题了。

在《抽象代数》中，对任意一个集合，赋予它一个适合一定条件的运算，使它成为一个群、环或域，就说这个集合具有了一个代数结构，因而就可以在其中进行代数问题的研究了。

类似地，我们希望也能在任意集合上谈连续，于是产生了“拓扑”的思想。它以实数系为背景，在任意集合中赋予了拓扑结构，使它成为拓扑空间，因而也就可以在其中讨论连续问题了。

进而，还能在一个拓扑空间中赋予一个微分结构，使它成为一个微分流形，这样也就可以在其中讨论微分和积分等问题。

由此可见，《点集拓扑》是近代数学极其重要的基础之一。

假定读者已经熟悉了初等集合论的一般常识。这里，只是作为复习和对本课程所需用的部分，作必要的补充。包括两部分：（一）集合与映射；（二）序和基数。

首先给出本书常用的符号：

〔逻辑记号〕 设  $p$ 、 $q$  是两个命题，则

“ $p \vee q$ ”（读作：“ $p$  或  $q$ ”），表示  $p$ 、 $q$  的析取，当且仅当  $p$ 、 $q$  二者至少有一为真时，“ $p \vee q$ ”真。

“ $p \wedge q$ ”（读作：“ $p$  与  $q$ ”），表示  $p$ 、 $q$  合取，当且仅当  $p$ 、 $q$

二者皆为真时，“ $p \wedge q$ ”真。

“ $\neg q$ ”（读作：“非  $q$ ”）；表示  $q$  的否定，当且仅当 “ $q$ ” 假时，“ $\neg q$ ” 真。

“ $p \implies q$ ”（读作：“ $p$  蕴涵  $q$ ”）；定义为 “ $(\neg p) \vee q$ ”。可以证明，“ $p \implies q$ ” 成立，当且仅当 “ $\neg q \implies \neg p$ ” 成立。（称为前者的逆否命题。今后证明定理时，常用证明逆否命题的方法。）

“ $p \iff q$ ”（读作：“ $p$  与  $q$  等价”）；定义为 “ $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$ ”。

[量词符号]

“ $\exists$ ”：读作“存在”。

“ $\forall$ ”：读作“对于每一个”。

例如：“ $\forall x, f(x) = 0$ ” 表示 “对于每一个  $x, f(x) = 0$ 。” 它的否命题是 “ $\exists x, \neg(f(x) = 0)$ 。”

一般地，“ $\forall x, p(x)$ ” 的否定是 “ $\exists x, \neg p(x)$ 。” “ $\exists x, p(x)$ ” 的否定是 “ $\forall x, \neg p(x)$ ”。

[常用的集合符号]

空集： $\emptyset$

有限集： $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ 。

单元集： $\{A\}$ 。其中  $A$  可以是一个点，也可以是一个集。

整数集： $Z$ 。

正整数集： $Z^+ = \{n \in Z \mid n > 0\}$ 。

非负整数集： $N = \{n \in Z \mid n \geq 0\}$ 。

有理数集： $Q$ 。

正有理数集： $Q^+ = \{q \in Q \mid q > 0\}$ 。

实数集(或实直线)： $E^1$ 。

$[a, b] = \{x \in E^1 \mid a \leq x \leq b\}$  称为闭区间。

$]a, b[ = \{x \in E^1 \mid a < x < b\}$  称为开区间。

$]a, b]$  或  $[a, b[$  称为半开区间。

$[0, 1]$  记作  $I$ 。

$n$  维欧氏空间:  $E^n$ 。它的元素  $x$  称为向量, 记作  $x = (x_1, \dots, x_n)$ 。

$n$  维单位球面:  $S^n = \left\{ x \in E^{n+1} \mid |x| = \sqrt{\sum_1^{n+1} x_i^2} = 1 \right\}$ 。

$S^1$  是  $E^2$  中单位圆;  $S^0 = \{x \in E^1 \mid x = \pm 1\}$ 。

$n$  维单位球体:  $V^n = \{x \in E^n \mid |x| \leq 1\}$ 。

## § 1. 集 合

### 1.1 集合概念

我们把“集合”当作一个不加定义的概念, 因为通常用“具有相同性质对象的全体”来定义集合将会导致矛盾。下面是著名的罗素悖论:

令  $R(p)$  是所有不包含自己的集合的集合。

则 (1) 若  $R(p) \in R(p) \implies R(p) \notin R(p)$ 。矛盾。

(2) 若  $R(p) \notin R(p) \implies R(p) \in R(p)$ 。矛盾。

为了避免已知的集论悖论, 可以对“集合”这一名词的使用, 用一定的公理系统加以控制, 这里不介绍公理化集论, 只指出下列几点:

“所有集合的全体”不是集。(称它是一个类)

空集  $\emptyset$  是集。

幂集  $\mathcal{P}(X) = \{A \mid X \text{ 是集, } A \subset X\}$  是集。

若对一非空集 $\mathcal{A}$ 的每个元素 $\alpha \in \mathcal{A}$ 都对应着一个集 $A_\alpha$ ，则称 $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是一个集合族。并称 $\mathcal{A}$ 是标集。（ $\mathcal{A}$ 可以有有限，也可以无限。）“族”和“集”的不同之处是：“族”中两个相同的集可以表示族中不同的元素。即不要求不同的指标对应不同的集。集合族的并（ $\cup$ ）、交（ $\cap$ ）和卡氏积都是集。

$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \{x | \exists \alpha, x \in A_\alpha\}$ 是集。

$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \{x | \forall \alpha, x \in A_\alpha\}$ 是集。

$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \{\{x_\alpha\} | \forall \alpha, x_\alpha \in A_\alpha\}$ 是集。并说 $x_\alpha$ 是点 $\{x_\alpha\}$ 的第 $\alpha$ 个坐标。

下面几个简单的事实，是经常要用的：

(1)  $\emptyset$  是任何集合的子集。

(2) 若 $A, B$ 是两个集，则

$$A = B \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

这是证明两个集合相等常用的方法。

(3) 若 $A, B$ 是两个集，则

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

(4) 若 $A, B$ 是集，且 $A \subset B$ ，则

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B.$$

## 1.2 集合的运算

无论是有限个集合或无限个集合，它们的并（ $\cup$ ）、交（ $\cap$ ）、余（ $\complement$ ）运算都适合我们所熟悉的运算规律。设 $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ 是一集合族：

(1)  $\cup$  和  $\cap$  适合结合律、交换律

若标集  $\mathcal{A} = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_\lambda$  则有

$$\bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} [\bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_\lambda\}].$$

$$\bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{\lambda \in \mathcal{I}} [\bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_\lambda\}].$$

(2)  $\cup$  对  $\cap$ ,  $\cap$  对  $\cup$  都适合分配律

$$\begin{aligned} [\bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}] \cap [\bigcup \{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}] \\ = \bigcup \{A_\alpha \cap B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}] \cup [\bigcap \{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}] \\ = \bigcap \{A_\alpha \cup B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

(3) 幂等律

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = A \quad (A_\alpha = A)$$

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = A \quad (A_\alpha = A).$$

这些结论的证明是简单的，直接从  $\cup$ 、 $\cap$  的定义出发即可。

(4) “ $\mathcal{C}$ ”的运算适合 De Morgan 律

$$\mathcal{C}(\bigcup_{\alpha} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha} (\mathcal{C}A_\alpha)$$

$$\mathcal{C}(\bigcap_{\alpha} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha} (\mathcal{C}A_\alpha)$$

注意：“余”是“差”的特例。若  $A, B \subset X$  是两个集，定义  $A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ 。当  $A = X$  时， $A - B = X - B$

$= \mathcal{E}B$ . 不难证明:

$$A - B = A \cap \mathcal{E}B$$

$$\text{因为 } \forall x \in A - B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

$$\iff (x \in A) \wedge (x \in \mathcal{E}B)$$

$$\iff x \in A \cap \mathcal{E}B. \blacksquare$$

因此, 虽然“差”没有很好的算律, 但是它可以化作“余”和“交”去运算.

### 1.3 卡氏积

在1.1中我们已经定义了一般卡氏积  $\prod A_i$ . 这里, 之所以还要专门提出卡氏积, 是因为它是集合论中重要概念之一, 它使我们能够用集合的语言表达很多概念.

例如,  $Z$  是整数集, 则  $Z \times Z$  可以用来表示平面上的格点集.

$E^1$  是实数集, 则  $E^1 \times E^1$  可以用来表示平面上的全体点集.

$S^1$  是平面上的单位圆,  $I = [0, 1]$ , 则  $S^1 \times I$  可以用来表示以  $S^1$  为底, 以  $I$  为高的圆柱面上的点集.

还可以用  $S^1 \times S^1$  来表示环面上的点集等等.

卡氏积对  $\cup$ 、 $\cap$ 、 $-$  都是分配的:

(1) 在有限的情况有

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

(2) 在无限的情况有



$$\begin{aligned} & \cup \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \times \cup \{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\} \\ &= \cup \{A_\alpha \times B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cap \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \times \cap \{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\} \\ &= \cap \{A_\alpha \times B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

(3) 令  $\{Y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  是非空集的一个族.  $\forall \alpha \in \mathcal{A}, A_\alpha, B_\alpha \subset Y_\alpha$  则

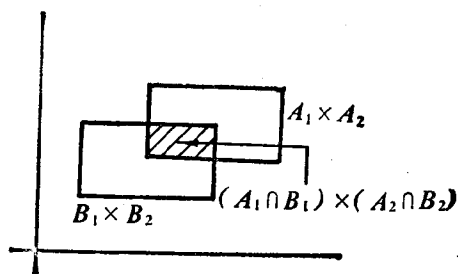


图1-1

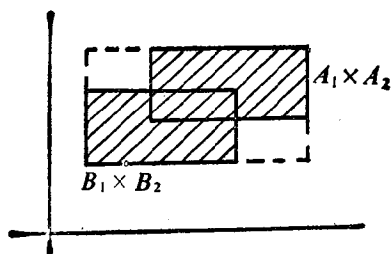


图1-2