点集拓扑

余玄冰 编译

北京师范大学出版社

点　集　拓　扑

余玄冰　编译

北京师范大学出版社

1983年11月

点集拓扑

余玄冰 编译

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷二厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：6.75 字数：140千
1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷
印数：1—13，500
统一书号：13243·32 定价：0.70元

内 容 提 要

本书是近几年来北京师范大学数学系为高年级学生、研究生开设《点集拓扑》课所编写的讲义。内容取材于 James Dugundji 所著《拓扑学》一书。包括集论初步；一般拓扑空间；子空间、积空间、商空间（粘合拓扑和弱拓扑）；特殊拓扑空间：分离公理、复盖公理、用滤子基描述收敛，连通性和紧致性分别列入以上两大部分，附录中的函数空间和同伦列为选读。

本书可作大专院校高年级、研究生选课教材或参考。也可供数学科技人员参考。

前　　言

本书是近几年来为系里高年级学生、研究生开设的《点集拓扑》选修课编写的讲义。内容取材于 James Dugundji所著《拓扑学》一书。

前五章是对一般拓扑空间的研究，包括子空间、积空间和商空间。这部分内容的主要特点是，对商空间采用了“粘合”和“粘贴”两种不同的观点，并在引进弱拓扑的基础上，建立了空间的“切割”和“粘贴”的观念。

后五章是对特殊拓扑空间的研究。包括分离公理、复盖公理和度量空间。这部分内容的主要特点是，在复盖公理中，重点介绍了仿紧空间，仿紧空间和度量化定理、单位分解存在定理之间的关系。并且，为了深入研究一般拓扑空间的性质，引进了“滤子基”的概念。

此外，连通空间和紧致空间依次分别列入以上两大部分。

对集合论部分，我们假定读者已经具备了一般集合论的常识，只是作为复习和必要的补充，放在第一章。并且，省去了基数和序数定义。

全书小字部分是供选读的内容。在最后的附录中，介绍了函数空间和同伦，是为学生进一步选修代数拓扑课所编写的参考资料。

根据我们的经验，按每周讲授4学时计算，这本书的必读内容，一学期之内可以完成。

在讲授及编写本讲义的过程中，适当参考了 James R. Munkres 的《拓扑学》，Murray Eisenberg的《拓扑学》，江泽涵先生的《拓扑学引论》以及李孝传先生的讲义《一般拓扑学导引》。

蒋人璧、王敬庚二同志在与编者共同的教学过程中，对讲义的内容提出了许多宝贵意见，并对习题的配备付出了很大劳动。北京师院数学系王景福教授认真而细致地审阅了全书稿，指出了原稿中的不足之处。在此，编者表示衷心的感谢。

编　者

1982年6月

目　　录

第一章　集论初步

与古典数学相对照，近代数学已经走出了数集的范围，在抽象的集合中去讨论数学问题了。

在《抽象代数》中，对任意一个集合，赋予它一个适合一定条件的运算，使它成为一个群、环或域，就说这个集合具有了一个代数结构，因而就可以在其中进行代数问题的研究了。

类似地，我们希望也能在任意集合上谈连续，于是产生了“拓扑”的思想。它以实数系为背景，在任意集合中赋予了拓扑结构，使它成为拓扑空间，因而也就可以在其中讨论连续问题了。

进而，还能在一个拓扑空间中赋予一个微分结构，使它成为一个微分流形，这样也就可以在其中讨论微分和积分等问题。

由此可见，《点集拓扑》是近代数学极其重要的基础之一。

假定读者已经熟习了初等集合论的一般常识。这里，只是作为复习和对本课程所需用的部分，作必要的补充。包括两部分：（一）集合与映射；（二）序和基数。

首先给出本书常用的符号：

〔逻辑记号〕　设 p、q 是两个命题，则

“$p\vee q$”（读作：“p 或 q”）：表示 p、q 的析取，当且仅当 p、q 二者至少有一为真时，“$p\vee q$”真。

“$p\wedge q$”（读作：“p与q”）：表示p、q合取，当且仅当 p、q

二者皆为真时，“$p\wedge q$”真。

“$\neg q$”（读作：“非 q”）；表示q的否定，当且仅当“q”假时，“$\neg q$”真。

“$p\Longrightarrow q$”（读作：“p蕴涵q”）；定义为“$(\neg p)\vee q$”。可以证明，“$p\Longrightarrow q$”成立，当且仅当“$\neg q\Longrightarrow\neg p$”成立。（称为前者的逆否命题。今后证明定理时，常用证明逆否命题的方法。）

“$p\Longleftrightarrow q$”（读作：“p与q等价”）；定义为“$(p\Longrightarrow q)\wedge(q\Longrightarrow p)$”。

〔量词符号〕

“$\exists$”：读作“存在”。

“$\forall$”：读作“对于每一个”。

例如：“$\forall x$，$f(x)=0$”表示“对于每一个 x，$f(x)=0$。”它的否命题是“$\exists x$，$\neg(f(x)=0)$。

一般地，“$\forall x$，$p(x)$”的否定是“$\exists x$，$\neg p(x)$。”“$\exists x$，$p(x)$”的否定是“$\forall x$，$\neg p(x)$”。

〔常用的集合符号〕

空集：$\varnothing$

有限集：$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$。

单元集：$\{A\}$。其中A可以是一个点，也可以是一个集。

整数集：Z。

正整数集：$Z^+=\{n\in Z|n>0\}$。

非负整数集：$N=\{n\in Z|n\geqslant 0\}$。

有理数集：Q。

正有理数集：$Q^+=\{q\in Q|q>0\}$。

实数集（或实直线）：E^1。

$[a,b]=\{x\in E^1 \mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间。

$]a,b[=\{x\in E^1 \mid a<x<b\}$称为开区间。

$]a,b]$或$[a,b[$称为半开区间。

$[0,\ 1]$记作I。

n维欧氏空间：E^n。它的元素x称为向量，记作$x=(x_1,\cdots,x_n)$。

n维单位球面： $S^n=\left\{x\in E^{n+1}\,\middle|\,|x|=\sqrt{\sum_1^{n+1}x_i^2}=1\right\}$。

S^1是E^2中单位圆；$S^0=\{x\in E^1 \mid x=\pm 1\}$。

n维单位球体：$V^n=\{x\in E^n \mid |x|\leqslant 1\}$。

§1. 集　　合

1.1 集合概念

我们把“集合”当作一个不加定义的概念，因为通常用“具有相同性质对象的全体”来定义集合将会导致矛盾。下面是著名的罗素悖论：

令$R(p)$是所有不包含自己的集合的集合。

则　(1) 若$R(p)\overline{\in}R(p)\Longrightarrow R(p)\in R(p)$。矛盾。

(2) 若$R(p)\in R(p)\Longrightarrow R(p)\overline{\in}R(p)$。矛盾。

为了避免已知的集论悖论，可以对“集合”这一名词的使用，用一定的公理系统加以控制.这里不介绍公理化集论，只指出下列几点：

“所有集合的全体”不是集.（称它是一个类）

空集$\varnothing$是集。

幂集$\mathscr{P}(X)=\{A \mid X是集，A\subset X\}$是集。

若对一非空集$\mathscr{A}$的每个元素$\alpha\in\mathscr{A}$都对应着一个集A_α，则称$\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$是一个集合族．并称$\mathscr{A}$是标集．（$\mathscr{A}$可以有限，也可以无限．）"族"和"集"的不同之处是："族"中两个相同的集可以表示族中不同的元素．即不要求不同的指标对应不同的集．集合族的并（$\cup$）、交（$\cap$）和卡氏积都是集．

$\bigcup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha=\{x|\exists\alpha,\ x\in A_\alpha\}$是集．

$\bigcap\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha=\{x|\forall\alpha,\ x\in A_\alpha\}$是集．

$\prod\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} A_\alpha=\{\{x_\alpha\}|\forall\alpha,\ x_\alpha\in A_\alpha\}$是集．并说$x_\alpha$是点$\{x_\alpha\}$的第$\alpha$个坐标．

下面几个简单的事实，是经常要用的：

（1）$\varnothing$是任何集合的子集．

（2）若A，B是两个集，则

$$A=B\Longleftrightarrow(A\subset B)\wedge(B\subset A)$$

这是证明两个集合相等常用的方法．

（3）若A，B是两个集，则

$$A\cap B\subset A\subset A\cup B$$

$$A\cap B\subset B\subset A\cup B.$$

（4）若A，B是集，且$A\subset B$，则

$$A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A\Longleftrightarrow A\cup B=B.$$

1.2 集合的运算

无论是有限个集合或无限个集合，它们的并（$\cup$）、交（$\cap$）、余（$\mathscr{C}$）运算都适合我们所熟习的运算规律．设$\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$是一集合族：

（1）$\cup$和$\cap$适合结合律、交换律

若标集 $\mathscr{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in\mathscr{L}}\mathscr{A}_\lambda$ 则有

$$\bigcup\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}=\bigcup_{\lambda\in\mathscr{L}}[\bigcup\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}_\lambda\}].$$

$$\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}=\bigcap_{\lambda\in\mathscr{L}}[\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}_\lambda\}].$$

(2) $\bigcup$ 对 $\bigcap$，$\bigcap$ 对 $\bigcup$ 都适合分配律

$$[\bigcup\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}]\cap[\bigcup\{B_\beta|\beta\in\mathscr{B}\}]$$
$$=\bigcup\{A_\alpha\cap B_\beta|(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$
$$[\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}]\cup[\bigcap\{B_\beta|\beta\in\mathscr{B}\}]$$
$$=\bigcap\{A_\alpha\cup B_\beta|(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$

(3) 幂等律

$$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=A\quad(A_\alpha=A)$$

$$\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}A_\alpha=A\quad(A_\alpha=A).$$

这些结论的证明是简单的，直接从$\bigcup$、$\bigcap$的定义出发即可。

(4) “$\mathscr{C}$”的运算适合 De Morgan 律

$$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$$

$$\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$$

注意：“余”是“差”的特例．若A，$B\subset X$是两个集，定义$A-B=\{x|(x\in A)\wedge(x\bar{\in}B)\}$．当$A=X$时，$A-B=X-B$

$=\mathscr{C}B$。不难证明：

$$A-B=A\cap\mathscr{C}B$$

因为$\forall x\in A-B\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge(x\overline{\in}B)$

$$\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in\mathscr{C}B)$$

$$\Longleftrightarrow x\in A\cap\mathscr{C}B。\blacksquare$$

因此，虽然"差"没有很好的算律，但是它可以化作"余"和"交"去运算。

1.3 卡氏积

在1.1中我们已经定义了一般卡氏积$\prod\limits_{\alpha}A_\alpha$。这里，之所以还要专门提出卡氏积，是因为它是集合论中重要概念之一，它使我们能够用集合的语言表达很多概念。

例如，Z是整数集，则Z×Z可以用来表示平面上的格点集.

E^1是实数集，则$E^1\times E^1$可以用来表示平面上的全体点集.

S^1是平面上的单位圆，$I=[0,1]$，则$S^1\times I$可以用来表示以S^1为底，以I为高的圆柱面上的点集.

还可以用$S^1\times S^1$来表示环面上的点集等等。

卡氏积对∪、∩、－都是分配的：

(1) 在有限的情况有

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

(2) 在无限的情况有

$$\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}\times\bigcup\{B_\beta \mid \beta\in\mathscr{B}\}$$
$$=\bigcup\{A_\alpha\times B_\beta \mid (\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$
$$\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}\times\bigcap\{B_\beta \mid \beta\in\mathscr{B}\}$$
$$=\bigcap\{A_\alpha\times B_\beta \mid (\alpha,\beta)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\}.$$

(3) 令$\{Y_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}$是非空集的一个族。$\forall\alpha\in\mathscr{A}$，$A_\alpha$，$B_\alpha\subset Y_\alpha$则

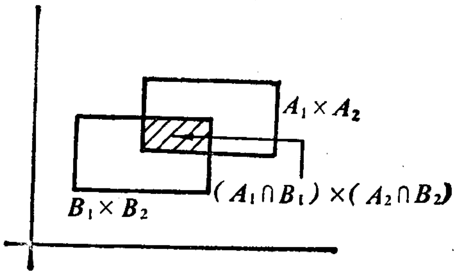

图1—1

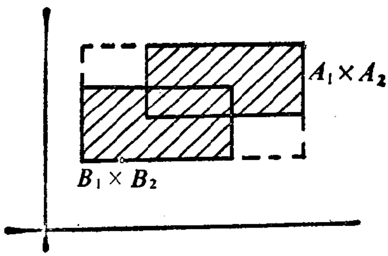

图1—2