

高等学校教材

矩阵理论和代数基础

李正良 编

(126)

(131)

矩阵理论和代数基础

李正良 编

科技大学出版社

989.

内 容 提 要

本书是根据高等院校工科硕士研究生的学习和科研的需要，在工科工程数学《线性代数》的基础上，选择科技中常用的矩阵基本理论法编写的。全书共分十章：线性空间、线性变换、内积空间、矩阵的和方分解、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数及其应用、特征值的分布、广义逆矩阵、代数基础。每章都附有一定数量的习题。

本书可作为工科硕士研究生和理科应用数学专业本科生的教材，也可供工程技术人员和科技工作者参考。对工科高年级大学也是一本合适的参考书。

高等学校教学用书

矩阵理论和代数基础

李正良 编

*

电子科技大学出版社出版

(中国成都市建设北路二段四号)

成都师范学校印刷厂印刷

四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/32 印张 21 字数 451千字

版次 1989年12月第一版 印次 1989年12月第一次印刷

印数 1—3200册

ISBN-7-81016-199-7/O·5

13452 定价 6.50元

前 言

用矩阵的理论和方**法**处理现代工程技术中的各种问题已越来越普遍。在工程技术中使用矩阵理论不仅使工程理论表达极为简洁,且对理论实质的刻画也更为深刻。这一点已被越来越多的科技工作者所认识。特别是由于计算机和计算方法的普及和发展,不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景,也为工程技术开拓了崭新的研究途径。例如系统工程与控制、优化方法、稳定性理论等,无不与矩阵理论有着紧密的联系。因此矩阵理论和方法是研究现代工程技术的重要数学基础。本书是编者经过多年教学实践后在自编讲义的基础上,作了比较大的修改和充实而写成的。

本书以大学通用的工程数学《线性代数》作为预备知识,并假定读者已具有向量空间、线性变换等基本概念和矩阵的一些初等运算知识。考虑到本书的主要教学对象是工科硕士研究生,教学时数有限。一方面,数学概念尽可能从大量的实践中抽象出来,使之通俗易懂;另一方面,也对数学本身的严谨性、系统性作了适当的考虑,即着重于介绍一些基本概念、基本理论和基本方法,至于理论证明和推导的严谨性就不过于苛求了。鉴于本书的读者是从事科技方面工作的,因此在编写时既重视基本的理论,也注重应用,使得选材更为恰当,结构更为合理。编者还力求把矩阵方法和线性变换方法、向量空间方法结合起来;把代数方法和几何方法结合起来;把代数方面的结构和测度论方面的结构结合起来。

来,以便为学习《泛函分析》等课程奠定一定的基础。

本书的主要内容可以分成三部分:第一部分包括线性空间、线性变换和内积空间,它是作为本科工程数学《线性代数》内容的衔接和引申,也为学习第二部分打下必要的基础。第二部分包括矩阵的分解、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数及其应用、特征值的分布和广义逆矩阵。这一部分是考虑到当前各工程学科硕士研究生的实际需要而精选的,全面介绍了矩阵的基本概念、理论和方法。第三部分是代数基础,这一部分内容不仅在科技中有着直接的应用,而且还是前面两部分内容的数学基础,当然也是对数学抽象化方法及逻辑推理方法的深化,从而为读者进一步学习打下必要的基础。书中各章都配有一定数量的习题,以使读者加深对本课程的理解。

本书在编写过程中,承蒙电子科技大学赵善中教授和向敬成教授审核,提出了许多宝贵意见和建议,并得到电子科技大学研究生部和教务处的大力支持和帮助,谨此致谢。

限于编者的水平,书中难免存在遗漏和不当之处,热忱欢迎读者批评指正。

编 者

1989年1月于电子科技大学

目 录

第一章 线性空间

§1 集合及其运算.....	(1)
§2 映射及其运算.....	(15)
§3 线性空间及其性质.....	(18)
§4 维数, 基与坐标.....	(21)
§5 基变换与坐标.....	(26)
§6 线性子空间.....	(33)
§7 子空间的交与和.....	(37)
§8 子空间的直和.....	(43)
§9 商空间.....	(49)
§10 线性流形与凸闭包.....	(56)
§11 线性空间的同构.....	(64)

习题一

第二章 线性变换

§1 线性变换的定义.....	(74)
§2 线性变换的运算.....	(78)
§3 线性变换的矩阵.....	(84)
§4 特征值与特征向量.....	(95)
§5 对角矩阵.....	(104)
§6 Hamilton-Cayley 定理, 最小多项式.....	(107)
§7 线性变换的值域与核.....	(115)
§8 不变子空间.....	(120)
§9 Jordan标准型.....	(126)
§10 对偶空间.....	(131)

习题二

第三章 内积空间

§1 欧氏空间的基本概念	(147)
§2 标准正交基	(153)
§3 欧氏空间的同构	(159)
§4 正交变换与正交矩阵	(160)
§5 子空间	(164)
§6 对称矩阵的标准型	(166)
§7 内积与线性函数的关系	(176)
§8 欧氏空间中的度量问题	(179)
§9 酉空间	(192)

习题三

第四章 矩阵的分解

§1 n 阶方阵的三角分解和UR分解	(208)
§2 投影算子及矩阵的谱分解式	(212)
§3 正规矩阵及分解	(219)
§4 Hermite矩阵及其分解	(224)
§5 矩阵的最大秩分解	(232)
§6 矩阵的奇值分解	(235)

习题四

第五章 向量与矩阵的范数

§1 向量的范数	(244)
§2 矩阵的范数	(253)
§3 算子范数	(256)
§4 矩阵的测度	(262)

习题五

第六章 矩阵分析

- §1 向量序列和矩阵序列的极限..... (270)
- §2 矩阵级数..... (279)
- §3 Kronecker积..... (285)
- §4 函数矩阵的微积分..... (299)

习题六

第七章 矩阵函数及其应用

- §1 矩阵有理函数..... (335)
- §2 矩阵幂级数..... (340)
- §3 矩阵指数函数与三角函数..... (350)
- §4 矩阵函数的一般定义..... (357)
- §5 矩阵函数的计算..... (365)
- §6 矩阵方程及其求解..... (382)
- §7 矩阵函数 e^{At} 的数值计算..... (402)

习题七

第八章 特征值的分布

- §1 特征值的估计定理..... (415)
- §2 特征值的变分原理..... (429)
- §3 圆盘定理 (Gerschgorin定理)..... (438)
- §4 谱半径..... (452)
- §5 非负矩阵的特征值估计..... (457)
- §6 特征值的摄动..... (467)

习题八

第九章 广义逆矩阵

- §1 广义逆矩阵及其分类..... (478)
- §2 矩阵的左逆和右逆..... (479)

§3 广义逆矩阵 A^-	(482)
§4 自反广义逆矩阵 A_+^-	(494)
§5 M-P 广义逆矩阵 A^+	(502)
§6 A^+ 的计算方法	(509)
§7 广义逆矩阵的应用	(524)

习题九

第十章 代数基础

§1 广义映射和代数运算	(544)
§2 同态与同构	(548)
§3 等价关系与集合分类	(554)
§4 群及其性质	(562)
§5 变换群	(571)
§6 置换群	(574)
§7 循环群	(581)
§8 子群及其陪集	(589)
§9 不变子群与商群	(598)
§10 环的基本概念	(606)
§11 除环与域	(618)
§12 子环, 环的同态	(622)
§13 无零因子环的特征	(628)
§14 同余类环, 同态与理想	(632)
§15 最大理想与域的构造	(638)
§16 数列环与数字滤波	(641)

习题十

主要符号说明	(662)
参考书目	(664)

第一章 线性空间

§1 集合及其运算

一、集合的概念与表示法

集合是数学中最基本的概念之一，但它又是一个不能精确定义的基本概念。一般地说，把具有共同性质的一堆东西，汇集成一个整体，就形成一个集合。例如，一个班就是由一些同学组成的集合；一个线性方程组解的全体组成一个集合，即所谓解集合；在几何中，把点看成基本对象，则一条直线就是一个由点组成的集合；一条曲线，一个平面也都是由一些点组成的集合。组成集合的东西称为这个集合的元素，我们用

$$a \in M$$

表示 a 是集合 M 的元素，读作 a 属于 M 。用

$$a \notin M$$

表示 a 不是集合 M 的元素，读作 a 不属于 M 。一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称作有限集，否则称作无限集。

表示集合的办法有两种：一种是将某集合的元素都列举出来称为列举法。比如，我们说， M 是由数1, 2, 3组成的集合，记为 $M = \{1, 2, 3\}$ ，又比如 $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ ，

$B = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ 等。

另一种是给出这个集合的元素所具有的特殊性质，称为叙述法。例如：

$$M = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

$$A = \{x \mid x \text{ 是正奇数} \}$$

$$B = \{x \mid x \leq 10\}$$

两个集合相等是按下述原理定义的。

外延性原理：两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的成员。记作 $A = B$ 。

集合的元素还可以允许是一个集合，例如：

$$M = \{a, \{1, 2\}, b, \{c\}\}$$

必须指出： $c \in \{c\}$ ，但 $c \notin M$ ；同理 $1 \in \{1, 2\}$ ，但 $1 \notin M$ 。

例如：设 A 是小于 10 的素数的集合，即 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ ，又设 B 为 $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$ 的所有根的集合，则正好 B 也是 $\{2, 3, 5, 7\}$ ，因此 $A = B$ 。

又如： $\{1, 2, 4\} = \{1, 2, 2, 2, 4\}$

$$\{1, 4, 2\} = \{1, 2, 4\}$$

但 $\{1, 2\} \neq \{1, 2, 4\}$

定义1 设 A, B 是任意两个集合，若 A 的每一个元素是 B 的成员，则称 A 为 B 的子集，或 A 包含在 B 内，或 B 包含 A ，记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。

根据子集的定义，显然有：

自反性 $A \subseteq A$ 。

传递性 若 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。但“包含”这种关系不满足对称性，故不是等价关系。

定理1 集合 A 和集合 B 相等的充要条件是这两个集合互为子集。

证 设任意两集合相等,则由定义,有相同的元素。即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

反之,若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,假若 $A \neq B$,则 A 与 B 的元素不完全相同,设某一元素 $x \in A$,但 $x \notin B$,这与 $A \subseteq B$ 条件矛盾;或设某一元素 $x \in B$ 但 $x \notin A$,这就与 $B \subseteq A$ 条件矛盾,故 A, B 的元素必须相同,即 $A=B$ 。(证毕)

这个定理很重要,今后证明两集合相等,主要利用这个互为子集的判定条件。

注意:两个集合相等不是指两个集合的元素个数相等。其实两个集合的元素个数不等也可能相等,即使元素个数相等的集合也可能不相等。

定义2 如果集合 A 的每一个元素都属于 B ,但集合 B 中至少有一个元素不属于 A ,则称 A 为 B 的真子集,记作 $A \subset B$ 。

例如,全体偶数集是全体整数集的真子集,全体整数集是全体有理数集的真子集。

定义3 不包含任何元素的集合是空集,记为 ϕ 。注意: $\phi \neq \{\phi\}$,但 $\phi \in \{\phi\}$; ϕ 不等于0。

定理2 对于任意一个集合 A , $\phi \subseteq A$ 。

证 假设 $\phi \subseteq A$ 是假,则至少有一个元素 x ,使 $x \in \phi$ 且 $x \notin A$ 。因为空集 ϕ 不包括任何元素,所以这是不可能的。(证毕)

不难看出,每个非空集合 A ,至少有 A 和 ϕ 两个不同的子集,我们称 A 和 ϕ 是 A 的平凡子集。一般来说, A 的每一个元素都能确定 A 的一个子集,即若 $a \in A$ 则 $\{a\} \subseteq A$ 。

定义4 在一定范围内,如果所有集合均为某一集合的

子集，则称该集合为全集，记为 E 。

全集的概念相当于论域。如在初等数论中，全体整数组成了全集。又如在考虑某大学的部分学生组成的集合（如系、班级等）时，该大学的全体学生组成了全集，设全集 $E = \{a, b, c\}$ ，它的所有可能的子集计有： $S_0 = \phi$, $S_1 = \{a\}$, $S_2 = \{b\}$, $S_3 = \{c\}$, $S_4 = \{a, b\}$, $S_5 = \{a, c\}$, $S_6 = \{b, c\}$, $S_7 = \{a, b, c\}$ ，这些子集都包含在 E 中，即 $S_i \subseteq E$ ($i=0, 1, \dots, 7$)，但 $S_i \subsetneq E$ 。

定义5 给定集合 A ，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，称为集合 A 的幂集，记为 $F(A)$ 。

例如： $A = \{a, b, c\}$

$$F(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

定理3 如果有限集合 A 有 n 个元素，则其幂集 $F(A)$ 有 2^n 个元素。

证 因 $\phi \subseteq A$ ，故 $F(A)$ 的元素总数为

$$N = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

但又因

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \cdot y^{n-k}$$

令 $x=y=1$ ，得

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

故 $F(A)$ 的元素个数是 2^n 。

(证毕)

现在我们引进一种编码，用来唯一地表示有限幂集的元素

素，仍以上面 $B = \{a, b, c\}$ 这个集合为例。

$F(S) = \{S_i | i \in J\}$, $J = \{i | i \text{ 是二进制数 } 000 \leq i \leq 111\}$

例如, $S_3 = S_{011} = \{b, c\}$, $S_6 = S_{110} = \{a, b\}$ 等。

一般地, $F(S) = \{S_0, S_1, \dots, S_{2^n-1}\}$, 即 $F(S) = \{S_i |$

$i \in J\}$, $J = \{i | i \text{ 是二进制数 } \overbrace{000 \dots 0}^n \leq i \leq \overbrace{111 \dots 1}^n\}$ 。

二、集合的运算

定义6 设任意两个集 A, B , 由 A 和 B 的所有共同元素组成的集合 S , 称为 A 和 B 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

例如: $2x - y = 1$ 的解集合与 $x - 2y = 2$ 的解集合的交集就是

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

的解集合。又比如, 所有矩形集合与所有菱形集合的交集是所有正方形集合。

为了叙述简练, 以下用 $\vee$ 表示“或”, $\wedge$ 表示“与”, $\Leftrightarrow$ 表示等价。

集合的交运算具有如下性质:

1) $A \cap A = A$, $A \cap \phi = \phi$; $A \cap E = A$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;

2) $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。

事实上, $(A \cap B) \cap C = \{x | (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in C)\}$

$$A \cap (B \cap C) = \{x | ((x \in A) \wedge (x \in B \cap C))\}$$

$$(x \in A \cap B) \wedge (x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$$

因此 $(A \cap B) \cap C \Leftrightarrow A \cap (B \cap C)$

3) 设 $A \subseteq B$, 则 $A \cap C \subseteq (B \cap C)$ (读者自证)。

定义7 设任意两集合 A, B , 所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合 S , 称为 A 和 B 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

集合并的运算具有如下性质:

1) $A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B; A \cup A = A, A \cup E = E, A \cup \phi = A;$

2) $A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

3) 若 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 则 $A \cup C \subseteq B \cup D$ 。

事实上, 对任意 $x \in A \cup C$, 则有 $x \in A$ 或 $x \in C$ 。若 $x \in A$, 由 $A \subseteq B$ 则 $x \in B$, 故 $x \in B \cup D$; 若 $x \in C$, 由 $C \subseteq D$ 则 $x \in D$, 因此, $A \cup C \subseteq B \cup D$ 。

定理4 设 A, B, C 为三个集合, 则下列分配律成立。

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

证 1) 设 $S = A \cap (B \cup C), T = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。若 $x \in S$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in A$ 且 $x \in C$ 也即 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$, 故 $x \in T$, 所以 $S \subseteq T$ 。

反之, 若 $x \in T$, 则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$, $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in A$ 且 $x \in C$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 于是 $x \in S$, 所以 $T \subseteq S$ 。因此 $T = S$ 。

2) 其证明完全与1)类似。 (证毕)

定理5 (吸收定理) 设 A, B 为任意两集合, 则下列吸收律成立。

1) $A \cup (A \cap B) = A$ 2) $A \cap (A \cup B) = A$

证 1) $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$

$$=A \cap (E \cup B) = A$$

$$\begin{aligned} 2) A \cap (A \cup B) &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (A \cap B) = A \quad (\text{证毕}) \end{aligned}$$

定理6 $A \subseteq B$, 当且仅当 $A \cup B = B$ 或 $A \cap B = A$.

证 若 $A \subseteq B$, 对任意 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 即 $A \cup B \subseteq B$, 又 $B \subseteq A \cup B$, 故得 $A \cup B = B$. 反之, 若 $A \cup B = B$, 因为 $A \subseteq A \cup B$, 故 $A \subseteq B$.

同理可证 $A \subseteq B$, 当且仅当 $A \cap B = A$. (证毕)

定义8 A, B 为任意两集合, 所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合 S 称为 B 对 A 的补集或相对补, 记为 $A - B$.

例如: 设 A 是素数集合, B 是奇数集合, 则 $A - B = \{2\}$.

定义9 设 E 为全集, 对任一集合 A 关于 E 的补 $E - A$, 称为集合 A 的绝对补, 记为 $\sim A$.

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

由补的定义不难证明如下性质:

$$1) \sim(\sim A) = A; \sim E = \phi; \sim \phi = E;$$

$$2) A \cup (\sim A) = E; A \cap (\sim A) = \phi.$$

定义10 设 A, B 为任意两个集合, A 和 B 的对称差为集合 S , 其元素或属于 A , 或属于 B , 但不能既属于 A 又属于 B , 记为 $A \ominus B$.

$$S = A \ominus B = (A - B) \cup (B - A)$$

由对称差定义很易推出如下性质:

$$1) A \ominus B = B \ominus A, A \ominus \phi = A, A \ominus A = \phi;$$

$$2) A \ominus B = (A \cap (\sim B)) \cup ((\sim A) \cap B);$$

$$3) A(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C);$$

$$4) A \cup B = (A \ominus B) \cup (A \cap B).$$

三、包含排斥原理

集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。设 A_1, A_2 为有限集合，其元素个数分别记为 $|A_1|, |A_2|$ ，根据集合运算的定义，显然以下各式成立。

$$|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$$

$$|A_1 \cap A_2| \leq \min(|A_1|, |A_2|)$$

$$|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$$

$$|A_1 \ominus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

这些公式可用文氏图（图1-1）直接来说明。但是在有限集的元素计数问题中，下述定理有着更广泛的应用。

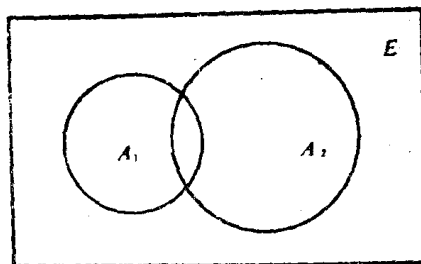


图 1-1

定理7 设 A_1, A_2 为有限集，其元素个数分别为 $|A_1|, |A_2|$ ，则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 。

证 a) 当 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 则显然 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

b) 若 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ，则

$$|A_1| = |A_1 \cap \sim A_2| + |A_1 \cap A_2|;$$

$$|A_2| = |\sim A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

所以

$$|A_1| + |A_2|$$

$$= |A_1 \cap \sim A_2| + |\sim A_1 \cap A_2| + 2|A_1 \cap A_2|$$