

平面四杆机构运动综合

卢子馨 编著



12.1

石油大学出版社

内 容 提 要

全书分两篇共九章。第一篇为运动几何法(分为七章)。第二至第六章以布尔梅斯特两条基本曲线即圆心曲线和圆点曲线为主干,就连杆运动平面具有五个有限接近的相关位置、两连架杆具有五组对应有限接近位置以及再现给定连杆曲线的平面四杆机构综合问题进行了讨论;第七章以环点曲线和轴心曲线为主干,就连杆曲线的曲率分析及其在机构综合中的应用进行了讨论。第二篇为代数法(第八至第九章)。第八章为函数逼近法;第九章为最优化综合法。

本书可作为高等工科院校机械类专业《机械原理》课程的补充教材,可作为本科生、研究生的选修课或必修课教材。也可供有关专业教师和工程技术人员参考。

平面四杆机构运动综合

卢子馨 编著

*

石油大学出版社出版

(山东省 东营市)

新华书店发行

山东电子工业印刷厂印刷

(淄博市周村)

*

开本850×1168 1/32 6.75印张 175千字

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数1—3000册

ISBN 7-5636-0164-3/TH·07

定价: 3.40元



前 言

平面四杆机构不仅是主要的常用基本机构之一，而且也是其它多杆机构的基础，其应用也十分广泛。由于其运动副全为低副这一特征以及从动件运动形式和连杆曲线的多样性，因而作为机构分析的逆命题即运动综合来说，是一个相当复杂且颇具实用意义的研究课题。

平面四杆机构运动综合的基本问题，无非是实现从动件预期的运动规律和再现给定连杆曲线这两类问题。就其方法而言，大体可分为精确法和近似法，而直至目前为止，还没有一套较为完整实用的精确综合法。当以只作近似重演给定条件的四杆机构代替理论上精确的多杆机构时，由于四杆机构的弹性变形、制造安装误差、自锁可能性等均较多杆机构为小，因而四杆机构要比多杆机构简单实用且精确度高。近似综合法大体又可分为运动几何法和代数法两种。

为了不与机械原理教材内容相脱节以及编写的系统性，因而考虑了与机械原理教材有关内容的衔接与联系，以便由浅入深，方便教学与自学。

由于作者水平有限，书中错误与不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

本书在编写过程中，承蒙西安石油学院傅则绍教授给予多方面悉心指导，并对全书进行全面审阅。又蒙南京林业大学王长钧副教授和内蒙古工学院汪萍副教授对本书提出了很多中肯的具体建议，在此一并深表谢忱。

编 者

1989年10月

目 录

第一章 平面四杆机构及其综合的基本问题	1
§ 1-1 平面四杆机构及其基本型式	1
§ 1-2 平面四杆机构的基本知识	2
§ 1-3 平面四杆机构运动综合的基本问题及其 基本方法	9

第一篇 运动几何法

第二章 按给定机构运动特性综合平面四杆机构	13
§ 2-1 按照给定的行程速比系数和部分机构参数综合 平面四杆机构	13
§ 2-2 具有急回运动的平面四杆机构综合中应 注意的问题	19
第三章 实现给定连杆平面三个有限接近位置的平面 四杆机构综合	24
§ 3-1 基本概念	24
§ 3-2 等视角定理	26
§ 3-3 极三角形与镜极三角形	29
§ 3-4 基点与三相关点所在圆的中心的关系	32
§ 3-5 关于三相关点共线和四相关点共线问题 的讨论	36
§ 3-6 关于三相关线共点和四相关线共点问题 的讨论	41
§ 3-7 实现给定连杆运动平面三个相关位置时的 平面四杆机构综合	45

第四章	实现给定连杆平面四个及五个有限接近位置的	
	平面四杆机构综合	51
§ 4-1	四相关点共圆的圆心与极间的关系	51
§ 4-2	圆心曲线及其作图法	55
§ 4-3	圆点曲线及其作图法	60
§ 4-4	对极四边形为一简单几何图形时的 圆心曲线	63
§ 4-5	实现连杆运动平面四个有限接近位置的 平面四杆机构综合	68
§ 4-6	实现连杆运动平面五个有限接近位置的 平面四杆机构综合	74
第五章	实现给定两连架杆若干组对应角位移的	
	平面四杆机构综合	79
§ 5-1	相对运动转换和相对极的概念	79
§ 5-2	实现两连架杆一组和两组对应角位移的 平面四杆机构综合	82
§ 5-3	相对转动极的极三角形和对极四边形	87
§ 5-4	实现给定两连架杆三组和四组对应角位移的 平面四杆机构综合	90
第六章	近似实现给定连杆曲线的平面四杆机构综合	95
§ 6-1	极点曲线	95
§ 6-2	借助极点曲线实现给定连杆曲线的 平面四杆机构综合	97
§ 6-3	平面四杆机构轨迹综合与位置综合的点位 同一性	99
第七章	连杆曲线的曲率分析与应用	114
§ 7-1	速度瞬心、瞬心线和三点共射线	114
§ 7-2	欧拉-萨瓦利方程	117
§ 7-3	公切线PT的求法——包比利尔法	121

§ 7-4	环点曲线·····	125
§ 7-5	轴心曲线·····	128

第二篇 代 数 法

第八章	用代数法进行平面四杆机构综合 ·····	134
§ 8-1	机构近似综合中函数逼近法的基本思想·····	134
§ 8-2	用插值逼近法综合铰链四杆机构·····	143
§ 8-3	用平方逼近法综合铰链四杆机构·····	153
§ 8-4	用最佳逼近法综合铰链四杆机构·····	163
§ 8-5	用函数逼近法综合铰链四杆机构·····	170
第九章	平面四杆机构的最优化综合 ·····	184
§ 9-1	设计变量、约束条件和可行域·····	185
§ 9-2	目标函数和数学模型·····	187
§ 9-3	再现两连架杆给定函数的铰链四杆机构最优化 综合数学模型·····	193
§ 9-4	再现给定连杆曲线的铰链四杆机构最优化综合 数学模型·····	198
§ 9-5	再现连杆角位移的铰链四杆机构最优化综合 数学模型·····	201
参考文献	·····	205

第一章 平面四杆机构及其综合的基本问题

§ 1-1 平面四杆机构及其基本型式

一、连杆机构及其特征

连杆机构又名低副机构，它是由许多刚性构件通过低副即回转副或移动副联结而成。它的构造特征是机构的原动件与从动件之间都要通过一个不与机架相连的中间构件即连杆联结而构成一个连动装置，因此称为连杆机构。

连杆机构可根据其各构件之间的相对运动为平面运动或空间运动，将其分为平面连杆机构与空间连杆机构；又可根据机构中构件数目的多少分为四杆机构、多杆机构等。连杆机构中最为简单、最为基本、应用最为广泛的机构乃是平面四杆机构，它是构成和研究多杆机构的基础。

连杆机构之所以能被广泛地应用于各种机械及仪表中，这是由于它具有显著的优点：由于运动副元素为圆柱面或平面而易于加工、安装并能保证精度要求，且因各构件之间为面接触而压强小，便于润滑，故其磨损小且承载能力大；两构件间的接触靠其本身的几何锁合来实现，而无须增加其它装置便能保证其接触；当主动件的运动规律不变时，每一机构中构件的相对长度有所改变，则可使从动件得到多种不同的运动规律；另外，也可利用连杆曲线的多样性来满足工程上的各种轨迹要求。

然而，连杆机构也有其不足之处：连杆机构的运动综合较为繁难，一般情况下只能近似地实现给定的运动规律与运动轨迹的

要求；由于连杆机构通常具有较长的运动链，加上运动副元素表面的磨损，因而将产生较大的运动累积误差；由于连杆机构的惯性力不能得到完全平衡，因而不宜用于高速传动中。尽管如此，连杆机构仍不失为一种基本的、主要的机构，且其应用越来越广泛。

二、平面四杆机构的基本型式

平面四杆机构最基本的型式为图 1-1 所示的曲柄摇杆机构。图中， A_0B_0 为机架， A_0A 和 B_0B 为连架杆。其中构件 A_0A 能绕其固定铰链中心 A_0 作整周转动而称为曲柄。构件 B_0B 只能绕其固定铰链中心 B_0 在一定范围内往复摆动而称为摇杆。构件 AB 不与机架直接相联而仅仅连绕两连架杆

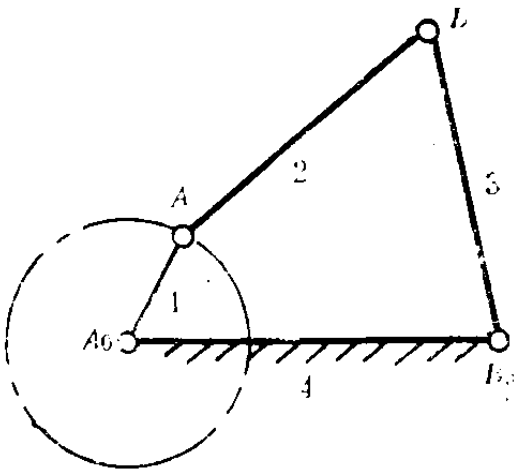


图 1-1

架直接相联而仅仅连绕两连架杆 A_0A 和 B_0B ，因而称为连杆。连杆机构正是因为连杆的存在而得名。

曲柄摇杆机构其所以是平面四杆机构中最基本的机构，乃是由于其它平面四杆机构均可视为它的派生机构。例如图 1-1 所示的

曲柄摇杆机构中，若将构件 1 作为机架，则为一双曲柄机构；若将构件 3 作为机架，则为一双摇杆机构；若将构件 2 作为机架，则成为另一曲柄摇杆机构。至于曲柄滑块机构、转动导杆机构、曲柄摇块机构及移动导杆机构等，均可视为是由曲柄摇杆机构通过不同的演化途径直接或间接派生而来，具体如图 1-2 所示。搞清以上派生关系，这对以后的平面四杆机构运动综合是很有帮助的。

§ 1-2 平面四杆机构的基本知识

在具体讨论平面四杆机构的运动综合之前，有必要就与机构

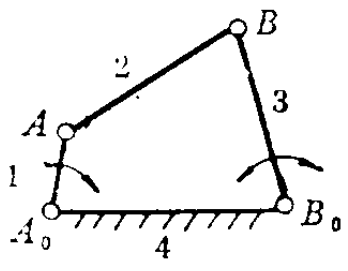
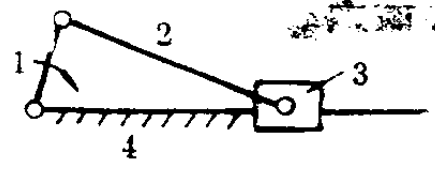
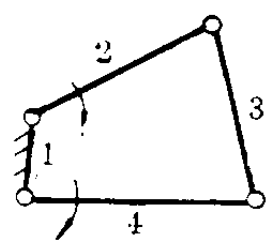
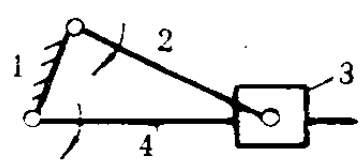
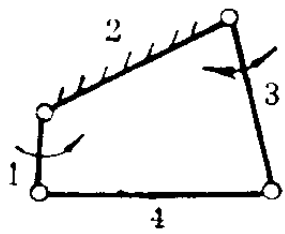
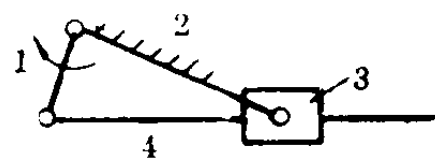
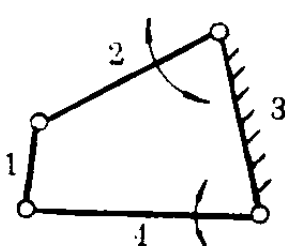
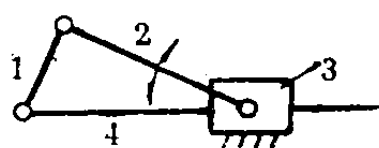
机架 构件号	铰链四杆机构	将 B_0 移至无穷远后派生的机构($e=0$)
4号	 曲柄摇杆机构	 曲柄滑块机构
1号	 双曲柄机构	 转动导杆机构
2号	 曲柄摇杆机构	 曲柄摇块机构
3号	 双摇杆机构	 移动导杆机构

图 1-2

运动综合有关的一些基本知识作一简单介绍。

一、平面四杆机构具有曲柄的条件

所谓曲柄，即在以上所述的平面四杆机构中能做整周回转运动的连架杆。现以图1-3 所示的铰链四杆机构 $ABCD$ 为例，来讨

论连架杆 AB 能够成为曲柄的几何条件。如图所示，设机构中各杆的长度分别为 a, b, c 和 d ，且 $a < d$ 。显然，机构在运动过程中，运动副 B 和 D 的中心之间的连线 f 的长度是不断改变的。如果连架杆 AB 能够成为曲柄，则构件 AB 可以绕其固定铰链 A 转至任意位置而不会出现图 1-4 所示的极限状态。因此，各构件的长度必须保证连架杆 AB 处于任意位置时，图中 B, C, D 三点为顶点的 $\triangle BCD$ 均能存在。此时，各构件长度必须满足一定的关系式。

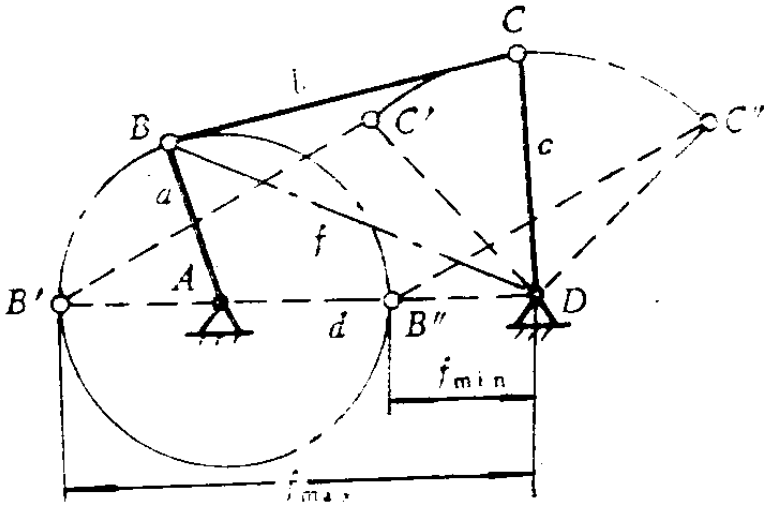


图 1-3

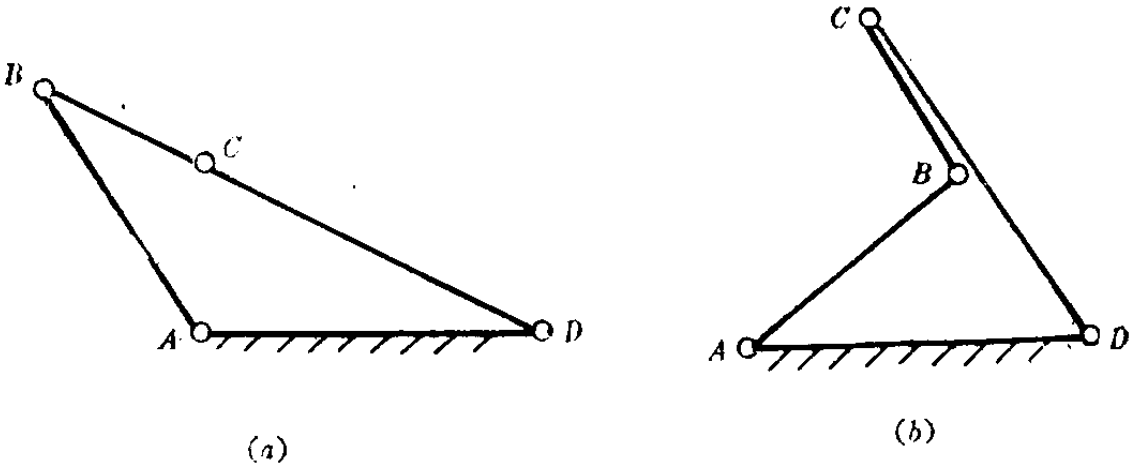


图 1-4

当机构处于 $AB'C'D$ 位置时，有

$$b + c \geq f_{\max} \tag{a}$$

当机构处于 $AB''C''D$ 位置时，有

$$b + f_{\min} \geq c \tag{b}$$

$$c + f_{\min} \geq b \tag{c}$$

又因

$$f_{\max} = a + d$$

$$f_{\min} = d - a$$

代入关系式(a), (b)及(c)后, 得

$$\left. \begin{aligned} a + d &\leq b + c \\ a + b &\leq d + c \\ a + c &\leq b + d \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式(1-1)中各式两两相加, 可得

$$\left. \begin{aligned} a &\leq c \\ a &\leq b \\ a &\leq d \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

同理, 当设 $d < a$ 时, 经过推导, 亦可得

$$\left. \begin{aligned} d + a &\leq b + c \\ d + b &\leq a + c \\ d + c &\leq b + a \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} d &\leq c \\ d &\leq b \\ d &\leq a \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

由式(1-1)至(1-4)可知, 铰链四杆机构具有曲柄时, 必须同时满足以下两个几何条件:

1. 连架杆或机架中必有一个为最短杆;
2. 最短杆与最长杆的长度和不大于其它两杆的长度和。

如果机构中各构件的长度不能同时满足以上两个条件, 则机构中将不存在曲柄而成为双摇杆机构。

二、行程速比系数

在图1-5所示的曲柄摇杆机构中, 当主动件曲柄 AB 等速回转时, 从动件摇杆 CD 则往复变速摆动。由图可知, 曲柄 AB 在回转一周中有两次与连杆 BC 共线, 此时, 摇杆 CD 分别位于极左 C_1D

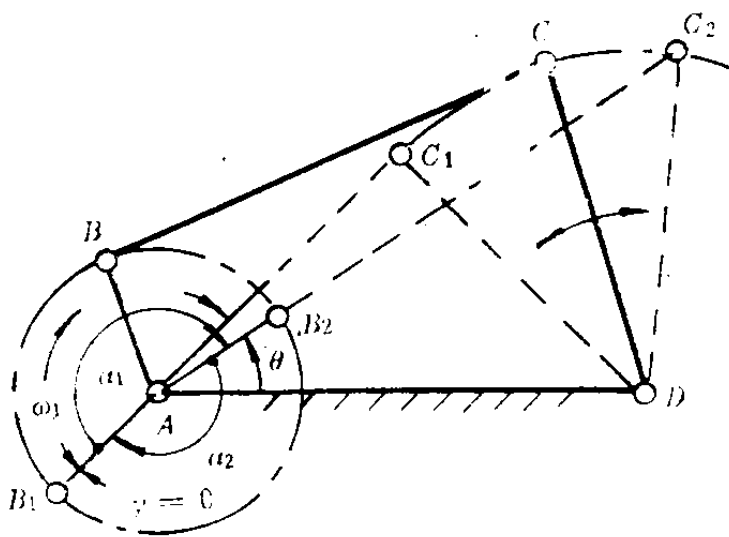


图 1-5

和极右 C_2D 两个极限位置。当曲柄 AB 由位置 AB_1 顺时针转过 α_1 角到达位置 AB_2 时，摇杆 CD 则由位置 C_1D 摆至位置 C_2D ，设其所需的时间为 t_1 ，而 C 点的平均速度为 v_1 ；又当曲柄 AB 再由位置 AB_2 继续顺时针转过 α_2 角到达位置 AB_1 时，摇杆 CD 则由位置 C_2D 变速摆到位置 C_1D ，设其所需的时间为 t_2 ，而 C 点的平均速度为 v_2 。在以上两个极限位置即曲柄与连杆两次共线位置之间所夹的锐角 θ 称为极位夹角。由于 $\alpha_1 (=180^\circ + \theta) > \alpha_2 (=180^\circ - \theta)$ ，所以 $t_1 > t_2$ ；又因 $\widehat{C_1C_2} = \widehat{C_2C_1}$ ，故 $v_2 (= \widehat{C_2C_1}/t_2) > v_1 (= \widehat{C_1C_2}/t_1)$ 。由此可知，当曲柄 AB 等速回转时，摇杆 CD 往复摆动的平均速度是不同的，且具有急回运动的特征。

为了表达上述摇杆 CD 的急回运动特征，我们引入比值

$$K = v_2/v_1$$

来表达上述往复运动快慢的相对性。该比值 K 称为从动件的行程速度变化系数，简称行程速比系数，其值为

$$K = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\widehat{C_2C_1}/t_2}{\widehat{C_1C_2}/t_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta} \quad (1-5)$$

亦可由上式求得极位夹角

$$\theta = 180^\circ \frac{K-1}{K+1} \quad (1-6)$$

这里尚须指出：

(1) K 值的大小表示从动件急回运动的程度。一般情况下 $K \leq 2$ ，因此， θ 常为锐角。

(2) 连杆机构有无急回作用，完全取决于极位夹角 θ ，当 $\theta = 0$ ($K = 1$) 时，从动件则无急回作用，说明从动件往复运动的平均速度相等。

(3) 其它四杆机构，如曲柄滑块机构、导杆机构等的极位夹角 θ 的表达式与式(1-6)完全相同。

三、平面四杆机构的压力角和传动角

在图1-6所示的曲柄摇杆机构 $ABCD$ 中，若不考虑构件的惯性力和运动副中的摩擦力的影响，当曲柄 AB 为主动件时，则通过连杆 BC 作用于从动件摇杆 CD 上的力 P 即沿 BC 方向。该力 P 的作用线与其作用点 C 的绝对速度 v_c 之间所夹的锐角 α 称为压力角。由图可见，力 P 可分解为沿点 C 绝对速度 v_c 方向的分力 P_t 及沿构件 CD 方向的分力 P_n 。分力 P_n 只能使铰链 C 及 D 产生径向压力，而分力 P_t 才是推动从动件 CD 运动的有效分力，其值 $P_t = P \cos \alpha = P \sin \gamma$ 。显然，压力角 α 越小，其有效分力 P_t 则越大，亦即机构的传动效益越高。为了便于度量，引入压力角 α 的余角 $\gamma = 90^\circ - \alpha$ ，该角 γ 称为传动角。显然，角 γ 越大，则有效分力 P_t 越大而 P_n 就越小，因此在机构中常用其传动角 γ 的大小及其变化情况来表示机构的传力性能。

传动角 γ 的大小是随机构位置的不同而变化的。为了保证机构具有良好的传动性能，综合机构时，通常应使 $\gamma_{\min} \geq 40^\circ$ ；在传递力矩较大时，应使 $\gamma_{\min} \geq 50^\circ$ 。尤其对于一些具有短暂高峰载荷的机构，可利用其传动角接近最大值 $\gamma_{\max}$ 时进行工作，从而节省动力。

关于最小传动角 $\gamma_{\min}$ 出现时的机构位置，可由图 1-6 所示的 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中求得。设 B, D 两点之间的变化距离为 f ，则

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\angle BCD$$

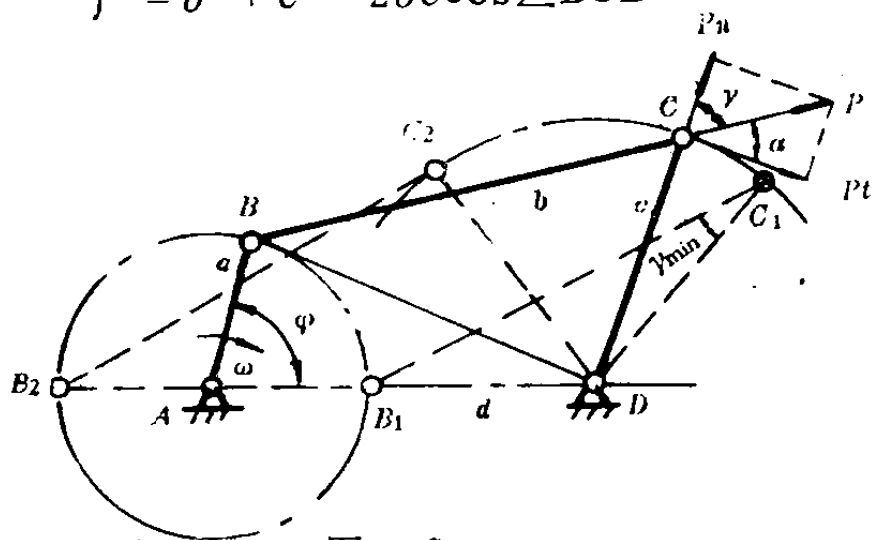


图 1-6

由以上两式解得

$$\angle BCD = \cos^{-1} \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad\cos\varphi}{2bc} \quad (1-7)$$

在式(1-7)中, 当 $\angle BCD \leq 90^\circ$ 时, 传动角 $\gamma = \angle BCD$; 而当 $\angle BCD > 90^\circ$ 时, 则传动角 $\gamma = 180^\circ - \angle BCD$ 。由此可见, 最小传动角 $\gamma_{\min}$ 将分别出现在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = 180^\circ$ 这两个位置, 即

$$\varphi = 0 \text{ 时 } \gamma_{1\min} = \cos^{-1} \frac{b^2 + c^2 - (d-a)^2}{2bc} \quad (1-8)$$

$$\varphi = 180^\circ \text{ 时, } \gamma_{2\min} = \cos^{-1} \frac{b^2 + c^2 - (d+a)^2}{2bc} \quad (1-9)$$

即当主动件曲柄AB处于与机架AD的轴线相重合的位置时, 将出现最小传动角。因此, 在检验机构最小传动角 $\gamma_{\min}$ 时, 可由机构在以上两个位置的比较中, 即 $\gamma_{1\min}$ 与 $\gamma_{2\min}$ 的比较中求得最小传动角 $\gamma_{\min}$ 的值。这里顺便指出, 在铰链四杆机构中, 当极位夹角 $\theta = 0 (K = 1)$ 时, 可以证明机构在以上两个位置的最小传动角相等, 即 $\gamma_{1\min} = \gamma_{2\min}$ 。至于具有急回运动的四杆机构 $\gamma_{1\min}$ 与 $\gamma_{2\min}$ 的比较, 将在§2-2中介绍。

四、死点位置

在图1-5所示的曲柄摇杆机构ABCD中, 如果摇杆CD为主动件, 则当机构处于图示的两个虚线位置之一时, 即当连杆与曲柄

处于拉直重合或折叠重合时，此时传动角 $\gamma = 0$ 。因此，主动件 CD 通过连杆作用在从动件 AB 上的力恰好通过其回转中心 A ，这时，即使主动件通过连杆作用在从动件 AB 上的力再大，也不能使从动件 AB 发生转动，即出现“顶死”现象，机构的这种位置称为死点位置。机构的死点位置对机构的运动来说显然是极为不利的，但可通过机构的错位排列或利用飞轮以增大转动惯量等办法加以克服。另外，在工程实践中，也不乏利用机构的死点位置以实现某种工作要求的实例。

§ 1-3 平面四杆机构运动综合的基本问题及其基本方法

一、平面四杆机构运动综合的基本问题

平面四杆机构运动综合的基本问题，是根据工程实际要求，首先选定合适的机构型式，并依据其运动条件确定出机构中各构件与运动有关的尺度参数，因此，机构的运动综合也称为机构尺度综合。这些尺度参数包括各转动副间的相对尺寸、移动副位置尺寸以及连杆平面上描绘连杆曲线的点的位置尺寸等。当以上尺寸确定之后，便可画出该机构的运动简图。由于根据工程实际所提出的综合条件是多种多样的，因而，对机构的运动综合来说也是要求不同的。尽管如此，仍可从极其广泛的实际问题中归纳为以下两类基本问题。

1. 要求实现预期的位置要求或满足预期的运动规律

这类问题的具体要求是：能够实现连杆平面依次占据若干个预期的给定位置与实现两连架杆若干组给定的对应位置，即实现预期位置要求的问题；或是实现主动与从动的两连架杆转角之间的某一给定函数关系 $\varphi = F(\alpha)$ 的问题，即实现两连架杆转角之间给定的某种运动规律问题。

如图1-7所示，在铰链四杆机构 A_0ABB_0 中，两连架杆 A_0A

和 B_0B 之间的转角关系仅仅取决于度量转角的初始值以及各构件之间的相对长度，而与各个构件的绝对长度无关。因此，机构中各构件的长度可用其相对长度来表示。即设机架 A_0B_0 长度 d 为单位长度1，则其余构件长度 a 、 b 及 c 的相对长度为

$$\frac{d}{d} = 1, \quad \frac{a}{d} = m, \quad \frac{b}{d} = n, \quad \frac{c}{d} = l。$$

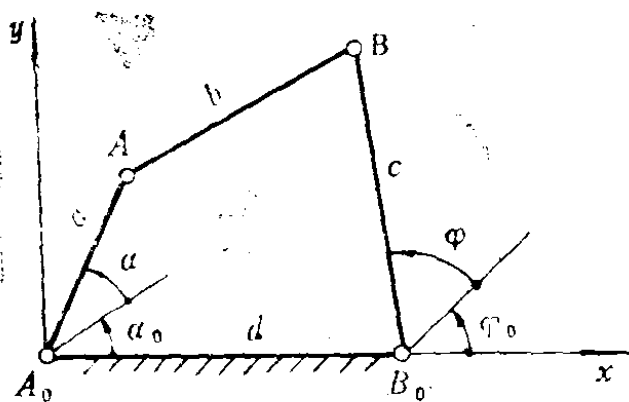


图 1-7

于是两连架杆的转角关系 $\varphi = F(a)$ 可表达为如下形式：

$$\varphi = F_1(m, n, l, \alpha_0, \varphi_0, \alpha) \tag{1-10}$$

由式(1-10)可见，当选择不同的 m, n, l, α_0 和 φ_0 这五个参数时，可以实现不同的运动规律。

但是，由于仅仅有五个机构参数可供选择，因此，使得机构所能精确实现的运动规律受到了限制。对于实现预期的给定位置来说，最多只能精确地实现五个给定位置，就五个位置而言，当两圆心曲线无实交点时，也不能实现。而对于多于五个给定位置的问题来说，只能近似地给予满足。因此，在后续章节中，我们仅仅讨论如何实现给定五个位置时的机构运动综合问题。

2. 要求实现预期的给定轨迹问题

这类问题的具体要求是：当给定连杆平面上某点的运动轨迹即连杆曲线时，要求确定出机构的运动参数，并在连杆平面上确定出能够实现给定的轨迹曲线的点的位置。

如图 1-8 所示，在铰链四杆机构 A_0ABB_0 中，设所给定的连杆平面上某点的轨迹曲线的方程为

$$y = F(x)$$

而对图 1-8 来说，连杆平面上 M 点的轨迹曲线 M_1M_2 是由该机构

在 xoy 坐标系中的位置及机构的尺度参数而决定的。此时，上式变为

$$y = F_j(x_{A0}, y_{A0}, a, a, b, c, d, \gamma, k, x) \quad (1-11)$$

由式(1-11)可见，欲实现 M 点的轨迹 M_iM_j 的要求，仅仅有九个参数可供选择。由于平面四杆机构可供选择的参数数目是有限的，因此，要实现上述连续曲线 M_iM_j 的要求，只能是近似地给予满足。但是，如果连杆曲线是按点位给出的，而且其点位不超过九个，则可准确地得到满足。

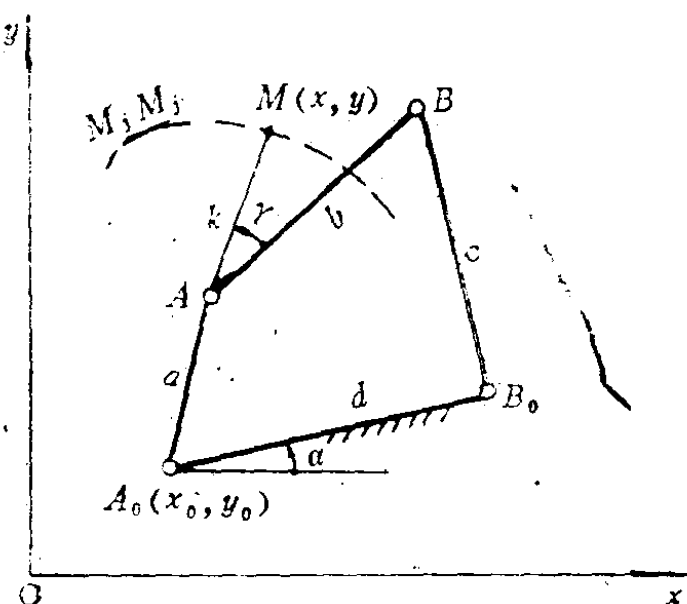


图 1-8

二、平面四杆机构运动综合的基本方法

平面四杆机构运动综合的基本方法，主要可分为精确综合法和近似综合法两大类。顾名思义，精确综合法要求精确地重演给定轨迹或者构件间的相互位置关系，而近似法则仅仅要求在足够精度条件下近似地重演运动轨迹或者位置关系。近年来，虽然不少学者在精确综合法方面做过大量的研究工作，但至今在许多情况下还没有一套系统实用的精确综合方法，因而近似综合方法得到了迅速的发展和应用。

近似综合的基本方法又可分为几何法和代数法，即图解法和解析法两种。运动几何法主要以德国学者 L. 布尔梅斯特为代表，他在苏联学者契贝歇夫代数法研究成果的基础上，提出了概念明确的运动几何法，即平面图形有限接近位置的运动几何学以及运动几何法，利用两条基本曲线即圆心曲线和圆点曲线进行机构的综合。而代数法则以苏联学者为代表，提出并发展了近似综