图和网络及其应用

费培之 编著

四川大学出版社

图和网络及其应用

费培之 编著

四川大学出版社

1996年·成都

(川）新登字 014 号

责任编辑：石大明
封面设计：唐利民
技术设计：徐　明

内 容 简 介

本书共有九章，包括图的基本概念和基本理论及其应用，图在计算机中的表示和图的基本算法，图论模型，网络及其应用，网络计划技术，网络规划等.

书中给出了 60 个常用算法，612 道例题和习题，这对于提高学习兴趣，加深对内容的理解，增强独立思考和应用的能力是大有裨益的.

本书具有系统性、理论性、实用性和新颖性，结构安排合理，语言流畅清晰，可作工程与计算机科学、数学、应用数学、经济数学与运筹学等理工科有关专业本科生和研究生的教材，对于《数学模型》课程和全国大学生数学模型竞赛是一本非常适用的参考书，也可供有关科技人员阅读.

图和网络及其应用

费培之　编著

四川大学出版社出版发行（成都市望江路 29 号）
四川省新华书店经销　　郫县犀浦印刷厂印刷
787×1092mm 16 开本　17.25 印张　380 千字
1996 年 8 月第 1 版　　1996 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
ISBN 7-5614-1239-8/O・106　　定价 18.00 元

前　　言

1736 年 Euler 解决七桥问题[19]标志图论的诞生．经过整整二百年，图论的第一部专著—— König 的《有限图与无限图的理论》[23]在 1936 年问世．图论的迅速发展出现在近三十几年，这是与图论的广泛应用，以及计算机技术和电子技术的发展密切相关的．

图论是研究图的组合关系及结构的一个数学分支．今天，图论在物理学、化学、计算机科学、通讯科学、经济学、运筹学、电气与土木工程、生物学、心理学、语言学、社会学与人类学等学科的应用已经是众所周知的．事实上，凡是包含二元关系的系统都可以用一个图来模拟，或者说用图论来建立数学模型，并用图的理论和方法加以研究和解决．由于图论在自然科学、社会科学、工程技术与经济管理等各方面的应用，并且图论具有形象直观的特点，所以受到人们的普遍重视，使图论在当今世界成为最活跃的数学分支之一．

本书是在作者多年从事本科生和研究生的教学中所使用的讲义的基础上，并参考近代有关文献编写而成的．

内容包括图和网络的基础、理论、方法、应用和算法，共有九章．第一至五章是图的基本概念和基本理论及其应用．第六章是图在计算机中的表示和图的基本算法．第七章是图论模型，讨论如何把实际问题转化为图论问题来解决．第八至九章是网络和网络规划及其应用．

图和网络的计算是在计算机上实现的．本书在第六章讨论了图的基本算法，并在全书给 出了 60 个图和网络的常用算法．

各章都精心配置了例题和习题，全书共有 612 道．这些题紧密配合正文，深浅适度，也有一些较难的题．根据教学需要，可将部分习题提到正文中讲授．

为便于教学，在内容上自成体系，所需预备知识主要是线性代数，在第九章需要线性规划的有关知识，可参考文献［12］，［13］和［14］．

本书可作理工科有关专业本科生和研究生的教材．注意到各校各专业对图和网络的要求不完全相同，在内容和结构的安排上尽可能方便使用者对教材的取舍．可供选择的教学时数为一学期每周四学时左右，或者一学年每周三学时左右．

对于《数学模型》课程和全国大学生数学模型竞赛，这是一本非常适用的参考书．也可供有关科技人员阅读．

本书是四川大学教材基金委员会重点资助的教材．感谢校系领导和四川大学出版社的大力支持．感谢石大明同志为本书出版付出的辛勤劳动．

由于水平有限，错漏之处不吝批评指正．

费 培 之
一九九五年七月于
四川大学数学系

符号说明

一般数学符号

R	实数集
R^n	n维欧氏空间
$\varnothing$	空集
I	单位矩阵
$A_{i\cdot}$	矩阵A的i行
$A_{\cdot j}$	矩阵A的j列
$r(A)$	矩阵A的秩
$A>0$	矩阵A的每个元大于零
$A\geqslant 0$	矩阵A的每个元大于等于零
A^T	矩阵A的转置
$\det A$	方阵A的行列式
$f\mid S$	函数f在S上的限制
$\lvert A\rvert$	集A的基数或元素个数
$\rho(A)$	集A的幂集
$a\in A$	a是集A的元
$a\notin A$	a不是集A的元
$\cup$	集的并
$\cap$	集的交
$\backslash$	集的差
$\oplus$	集的对称差
$\subseteq$	含于
$\subset$	含于且不等于
$[x]$	不大于x的最大整数
$\{x\}$	不小于x的最小整数
$\binom{n}{m}$	n个选m个的组合数
$\gg$	远大于
$\langle\alpha,\beta\rangle$	向量α与β的内积
$\approx$	近似相等
$\triangleq$	定义为或表示为
$1\sim n$	从1到n
n/m	n除以m

$\Longrightarrow$	必要的
$\Longleftarrow$	充分的
$\Longleftrightarrow$	充分必要的
$\vee$	逻辑加
$\wedge$	逻辑乘
u和/或v	u,或v,或u与v
$\dim V$	线性空间V的维数
$\bmod n$	模n

图论符号

$V(G)$或V	图G的顶点集
$E(G)$或E	图G的边集
$\Gamma^+(v)$	顶点v的后继域
$\Gamma^-(v)$	顶点v的前趋域
$\Gamma(v)$	顶点v的邻域
$d_G^+(v)$或$d^+(v)$	顶点v的出度
$d_G^-(v)$或$d^-(v)$	顶点v的入度
$d_G(v)$或$d(v)$	顶点v的度
$\delta(G)$或δ	最小顶点度
$\delta^+(G)$或δ^+	最小出度
$\delta^-(G)$或δ^-	最小入度
$\Delta(G)$或Δ	最大顶点度
$\Delta^+(G)$或Δ^+	最大出度
$\Delta^-(G)$或Δ^-	最大入度
$N^+(S)$	尾在S头不在S的边集
$N^-(S)$	头在S尾不在S的边集
$N(S)$或$[S,\bar{S}]$	边割
(S,T)	尾在S头在T的边集
$[S,T]$	一个端点在S另一个端点在T的边集
K_n	n个顶点的完全图
(X,Y,E)	偶图
$K_{r,s}$	完全偶图
$(V_1,\cdots,V_k,E)$	k分图

$K_{r_1,\cdots,r_k}$	完全 k 分图
$G[V']$	点导出子图
$G[E']$	边导出子图
$G-V'$	删点子图
$G-E'$	删边子图
$G+E'$	加边图
$G\cdot e$	边 e 的缩并图
$H\cong G$	同构
$H\subseteq G$	子图
$H\subset G$	真子图
G^c	补图
$\overline{H}(G)$	H 在 G 的补图
$G_1\cup G_2$	子图的并
$G_1\cap G_2$	子图的交
$G-G_1$	子图的差
$G_1\oplus G_2$	子图的对称差
$H(G)$ 或 H	邻接矩阵
$A(G)$ 或 A	关联矩阵
A_f	基本关联矩阵
$B(G)$ 或 B	圈矩阵
B_f	基本圈矩阵
$Q(G)$ 或 Q	余圈矩阵
Q_f	基本余圈矩阵
$P(G)$ 或 P	可达矩阵
$D(G)$ 或 D	距离矩阵
$X(G)$ 或 X	控制矩阵
Φ	圈空间
Θ	余圈空间
$\Lambda(G)$	G 的自同构群
$b(G)$	块 - 分离点图
$c(v)$	顶点 v 的色度
val f	流 f 的值
cap K	割 K 的容量
$F(G)$	平面图 G 的面的集
$d(u,v)$	顶点 u 与 v 的距离
$d(G)$	图 G 的直径
$\sigma(G)$ 或 σ	图 G 的块数
$\varepsilon_0(G)$ 或 ε_0	图 G 的闭迹数
$\varepsilon_1(G)$ 或 ε_1	图 G 的圈数
$\nu_0(G)$ 或 ν_0	图 G 的边割数
$\nu_1(G)$ 或 ν_1	图 G 的余圈数
$\alpha_0(G)$ 或 α_0	图 G 的覆盖数
$\alpha_1(G)$ 或 α_1	图 G 的边覆盖数
$\beta_0(G)$ 或 β_0	图 G 的独立数
$\beta_1(G)$ 或 β_1	图 G 的匹配数
$\gamma_0(G)$ 或 γ_0	图 G 的控制数
$\omega(G)$ 或 ω	图 G 的连通支数
$\omega_0(G)$ 或 ω_0	图 G 的奇连通支数
$\kappa(G)$ 或 κ	图 G 的连通度
$\lambda(G)$ 或 λ	图 G 的边连通度
$\chi(G)$ 或 χ	图 G 的色数
$\chi'(G)$ 或 χ'	图 G 的边色数
$\xi(G)$ 或 ξ	图 G 的秩或余圈秩
$\eta(G)$ 或 η	图 G 的零度或圈秩
$\tau(G)$ 或 τ	图 G 的生成树数目
N	网络
$N(f)$	伴随网络
F	开关网络的传输矩阵
Z	开关网络的连接矩阵
W	开关网络的路矩阵
W_f	开关网络的基本路矩阵
$r(k,l)$	拉姆瑟数

目　　录

第七章　图论模型

第一章　图的基本概念

§1.1　什么是图

在18世纪的东普鲁士有一个城市叫哥尼斯堡，流经该城市有一条河，河中有两个小岛把市区分为四块陆地，陆地间有七座桥相连，如图1.1所示．当时，人们在环城游览中总是在尝试并议论着一个伤脑筋的问题：能否从自己的居住地出发作环城游览，走过每座桥恰好一次最后回到出发地？所有的尝试都失败了，为什么？

瑞士数学家欧拉(Euler)在1736年发表了著名的论文"依据几何位置的解题方法"[19]，这是图论的第一篇论文，他标志图论的诞生．欧拉用四个小圆圈代表四块陆地，用七条边代表七座桥，画出了七桥问题的模拟图，如图1.2．利用这个模拟图，欧拉指出：若每块陆地所连接的桥都是偶数座，则从任一陆地出发必能通过每座桥恰好一次而回到出发地，否则是不可能的．由此，欧拉完全解决了七桥问题．

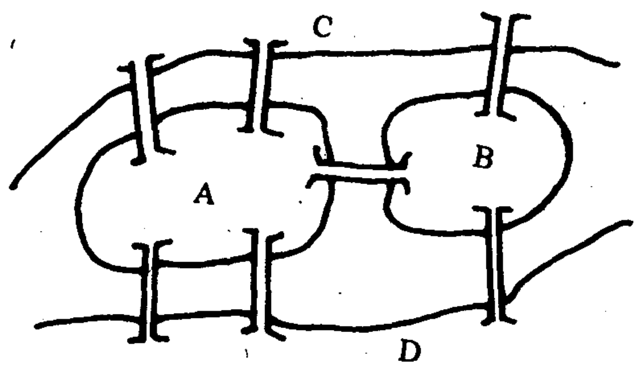


图1.1　哥尼斯堡七桥示意图

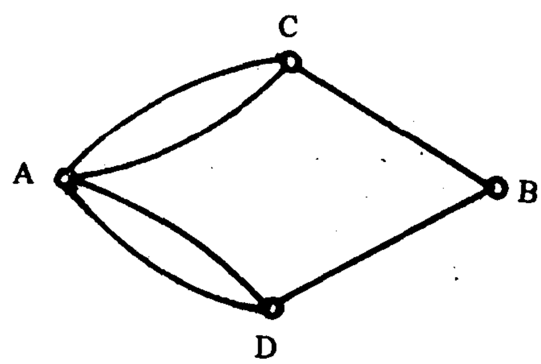
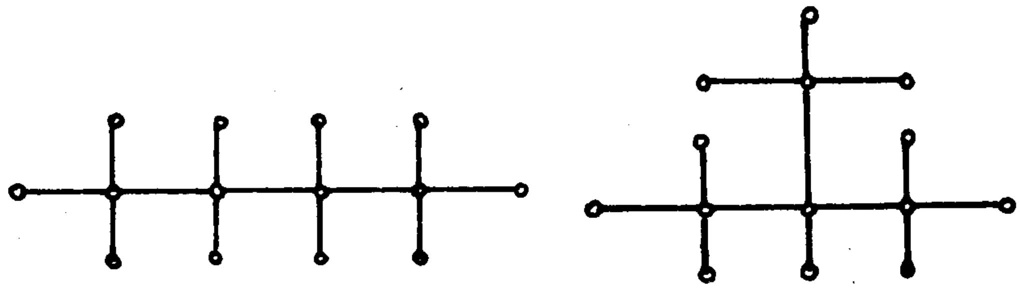


图1.2　七桥问题模拟图

欧拉利用模拟图解决七桥问题的方法当时还是一种孤立现象，并未引起人们的普遍兴趣．一个世纪之后，1847年，克希霍夫在解决电网络方程中如何确定独立方程数目的问题时，提出了树的概念[20]．如果把一棵树的树梢及树枝生长点作为图的"点"，树枝作为"边"，则在抽象意义下，树就是连通的、无圈的——此即是图论中的树的概念．1857年，凯莱在研究有机化学中碳水化合物的同分异构物时，也独立地发现了树[21]，如图1.3．对于树的研究是图的发展的一个重要标志．

图论中的另一个著名问题就是哈密顿圈，这个问题从1858年提出至今仍然没有完全解决．1858年哈密顿[22]发明了一种被称为Icosian的游戏(Icosian是个希腊字，意指20)．游戏的方法是以十二面体的20个顶点代表世界上的20个城市，游戏者从某个城市出发，在十二面体上依次经过每个城市恰好一次，最后回到出发点．十二面体如图1.4，相应画在平面上的模拟图如图1.5．由此，这个游戏又称为环球旅行游戏．



(*a*) 丁烷　　(*b*) 异丁烷

图 1.3　同分异构物的分子结构图

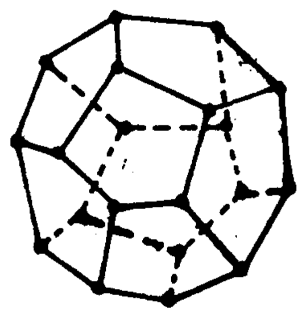


图 1.4　环球旅行游戏示意图

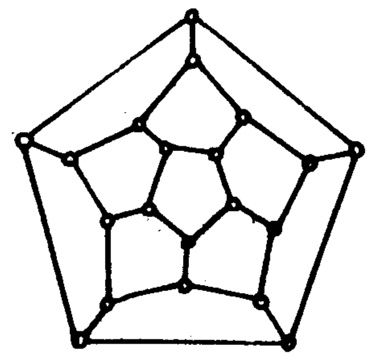


图 1.5　环球旅行游戏模拟图

对图的研究和应用虽早在 1736 年从欧拉研究七桥难题就开始了，但一直是点上的工作，没有面上的发展. 直到漫长的二百年过去之后的 1936 年，图论的第一本专著，匈牙利数学家 O. König 所著《有限图与无限图的理论》[23] 才得以问世.

图论的迅速发展是在本世纪五六十年代开始的. 大体说来这与电子技术和计算机技术的发展是同步的. 由此我们说图论是一门古老而年轻的学科，并且正显示其生机勃勃的活力，其发展及应用前景是十分明显的.

假定自然界和人类社会中的事物用一个小圆圈代表，称为顶点. 如果两事物间有某种关系，则用一条线段连接代表该事物的二个顶点，从而得到一个图，称为该系统的模拟图，正如七桥问题模拟图，环球旅行游戏模拟图等. 因此，一个具有二元关系的系统总可以用一个图来模拟. 直观地说，图就是由一些点(至少一个顶点) 以及连接这些点的线段(直线段或曲线段) 所组成的图形. 这些点称为**顶点**，这些线段称为**边**. 例如，我们常见的运输网络图，电网络图，通讯网络图，工程流程图，天燃气管网图，分子结构图，生物链图，人体经络图，神经网络图，管理系统图，组织机构图，销售连锁图，交通图(铁路、公路、航海、航空、航天等)，导游图，家谱图等等. 总之，无论在自然科学，社会科学，工程技术与经济管理各方面，常可用图来描述事物及事物间的关系，并可根据对图的性质的分析来研究和揭示各种系统的特性，提供对系统进行决策的科学依据.

§1.2　图的定义

定义 1.1　称 $G = (V, E)$ 是一个图，如果

(1) V 是一个非空有限集合,①

(2) E 是 V 中元素的无序对所组成的有限集合,

并把 V 的元素叫做图的**顶点**,E 的元素叫做图的**边**.

图 $G=(V,E)$ 常简记为图 G,并以 $V(G)$ 或 V,$E(G)$ 或 E 分别表示图 G 的顶点集,边集.设 S 是一个集合,则以 $|S|$ 表示集 S 的基数或元素个数.于是 $|V(G)|$ 或 $|V|$,$|E(G)|$ 或 $|E|$ 分别表示图 G 的顶点数,边数.由定义,边是顶点的无序对,若边 e 是顶点 u 和 v 的无序对,则记 $e=(u,v)$ 或 $e=(v,u)$.

设 $e=(u,v)$,则称 u,v 是 e 的**端点**,或 e 连接 u 与 v.两个端点重合的边称为**环**.若两条或两条以上的边有相同的端点,则这些边称为**平行边**.若顶点 u 是边 e 的一个端点,则称顶点 u 与边 e **关联**.不与任何边关联的顶点称为**孤立点**.两个顶点称为**相邻**,如果它们与同一条边关联.两条边称为**相邻**,如果它们与同一个顶点关联.

有 n 个顶点 m 条边的图称为 (n,m) 图.$(0,0)$ 图叫**空图**.$(n,0)$ 图称为**零图**,n 是正整数.当 $n=1$,$(1,0)$ 图叫**平凡图**.没有环与平行边的图称为**简单图**.任意相异二顶点都相邻的简单图称为**完全图**.有 n 个顶点的完全图记为 K_n.K_3 称为**三角形**.设 $k\geqslant 2$ 为正整数,若 $V(G)$ 有一个分解 $V_1,V_2,\cdots,V_k$,即

$$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k=V(G)\ ,\quad V_i\cap V_j=\varnothing\quad \text{当 } i\neq j,$$

且每个 V_i 自身的顶点都互不相邻,则称图 G 为 **k 分图**,记为 $G=(V_1,\cdots,V_k,E)$;不在同一子集中的任意相异二顶点都相邻的简单 k 分图,称为**完全 k 分图**,记为 $K_{r_1,\cdots,r_k}$,其中 $|V_i|=r_i,i=1,\cdots,k$.当 $k=2$ 时,2 分图又称**偶图**,完全 2 分图又称**完全偶图**.

定义 1.2 顶点 v 的**邻域** $\Gamma(v)$ 定义为

$$\Gamma(v)\triangleq\{u\in V(G)\,|\,u\text{ 与 }v\text{ 相邻}\}.$$

若 $S\subseteq V$,则 S 的**邻域** $\Gamma(S)$ 定义为

$$\Gamma(S)\triangleq\bigcup\{\Gamma(v)\,|\,v\in S\}.$$

显然 $\Gamma:V(G)\rightarrow\rho(V(G))$ 是一个映射,这里 $\rho(V(G))$ 表示 $V(G)$ 的幂集,即 $V(G)$ 的所有子集的集合.

对于简单图,边由顶点的相邻关系唯一决定,因此简单图 $G=(V,E)$ 可以表示为 $G=(V,\Gamma)$.

例 1.1 用映射 Γ 表示图 1.6 的简单图.

图 G 可表示为 $G=(V,\Gamma)$,这里

$\Gamma(v_1)=\{v_2,v_3\}$,

$\Gamma(v_2)=\{v_1,v_3,v_4\}$,

$\Gamma(v_3)=\{v_1,v_2\}$,

$\Gamma(v_4)=\{v_2\}$,

$\Gamma(v_5)=\varnothing$.

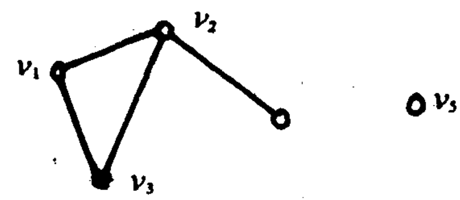


图 1.6 简单图 G

对任意的一个图 G,若去掉环,去掉平行边,则得到一个简单图,称为图 G 的**基图**.

① 为方便,当 $V=\varnothing$ 时称为空图.

例 1.2 求图 1.7(a) 的图的基图，如图 1.7(b)。

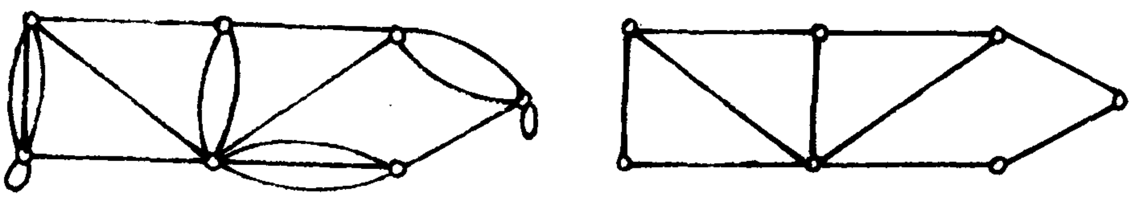


图 1.7 (a) 图 G (b) 图 G 的基图

§1.3 子图及其运算

定义 1.3 若 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称图 H 是图 G 的**子图**，G 是 H 的**母图**，记为 $H\subseteq G$. 若 $H\subseteq G$，$H\neq G$，则称 H 是 G 的**真子图**，记为 $H\subset G$. 若 $H\subseteq G$，$V(H)=V(G)$，则称 H 是 G 的**生成子图**.

设 $G=(V,E)$，若 $\varnothing\neq V'\subseteq V$，令

$$E'=\{(u,v)\in E\,|\,u,v\in V'\},$$

则子图 (V',E') 称为 G 的**由 V' 导出的子图**，简称为**点导出子图**或**导出子图**，记为 $G[V']$. 若 $V'=\{v_{i_1},\cdots,v_{i_k}\}$，则

$$[v_{i_1},\cdots,v_{i_k}]\triangleq G[V'].$$

若从 G 中删去 V' 以及所有与 V' 的顶点关联的边，所得到的子图称为 G 的**删点子图**，记为 $G-V'$. 若 $V'=\{v\}$，则

$$G-v\triangleq G-\{v\}.$$

设 $G=(V,E)$，若 $\varnothing\neq E'\subseteq E$，令

$$V'=\{v\in V\,|\,v \text{ 与 } E' \text{ 的边关联}\}.$$

则子图 (V',E') 称为 G 的**由 E' 导出的子图**，简称为**边导出子图**，记为 $G[E']$. 若 $E'=\{e_{i_1},\cdots,e_{i_r}\}$，则

$$[e_{i_1},\cdots,e_{i_r}]\triangleq G[E'],$$

若从 G 中删去 E' 的所有的边，所得到的子图称为**删边子图**，记为 $G-E'$. 若 $E'=\{e\}$，则

$$G-e\triangleq G-\{e\}.$$

设 E' 是 G 中不相邻顶点的无序对所组成的边集，则 $G+E'$ 表示在 G 中添加 E' 的所有的边所得到的图，称为 G 的**加边图**. 若 $E'=\{e\}$，则

$$G+e\triangleq G+\{e\}.$$

容易证明(习题 1.8)：

$$G[V\backslash V']=G-V',\quad G[E\backslash E']\subseteq G-E'.$$

例 1.3 给定图 G 如图 1.8(a)，其点(边)导出子图，删点(边)子图与加边图如图 1.8(b)～(f).

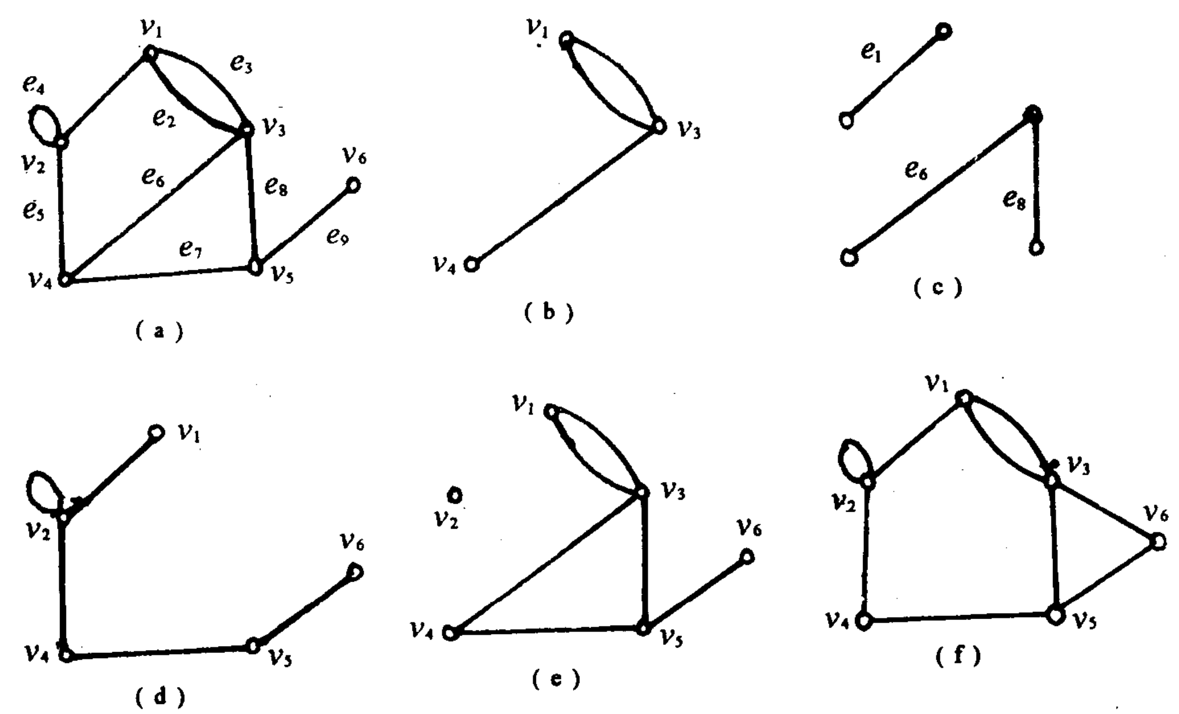


图 1.8 (a) 图 G (d) 删点子图 $G - v_3$
(b) 点导出子图$[v_1, v_3, v_4]$ (e) 删边子图 $G - \{e_1, e_4, e_5\}$
(c) 边导出子图$[e_1, e_6, e_8]$ (f) 加边图 $G + (v_3, v_6)$

设 G_1, G_2 是 G 的二个子图，若 $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$，则称 G_1 与 G_2 是**不相交的**. 若 $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$，则称 G_1 与 G_2 是**边不交的**. 不相交一定边不交，反之不一定.

定义 1.4(交) 设 G_1, G_2 是 G 的子图，则 G_1 与 G_2 的**交** $G_1 \cap G_2$ 定义为

$$G_1 \cap G_2 \triangleq G[E(G_1) \cap E(G_2)].$$

若 G_1 与 G_2 边不交，则 $G_1 \cap G_2$ 是空图.

定义 1.5(并) 设 G_1, G_2 是 G 的子图，则 G_1 与 G_2 的**并** $G_1 \cup G_2$ 定义为

$$G_1 \cup G_2 \triangleq G[E(G_1) \cup E(G_2)].$$

若 G_1 与 G_2 边不交，则把 $G_1 \cup G_2$ 记为 $G_1 + G_2$.

定义 1.6(差) 图 G 与子图 H 的**差** $G - H$ 定义为

$$G - H \triangleq G[E(G) \backslash E(H)].$$

定义 1.7(补) 设 H 是 G 的子图，则 H 在 G 的**补图** $\overline{H}(G)$ 定义为

$$\overline{H}(G) \triangleq G - E(H).$$

若 G 是简单图，则 G 的**补图** G^c 是与 G 有相同顶点集的一个简单图，且在 G^c 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻.

定义 1.8(对称差) 设 G_1, G_2 是 G 的子图，则 G_1 与 G_2 的**对称差** $G_1 \oplus G_2$ 定义为

$$G_1 \oplus G_2 \triangleq (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2).$$

例 1.4 给定图 G 及子图 G_1, G_2 如图 1.9(a) ～ (c)，其交，并，差，对称差与补如图 1.9(d) ～ (i).

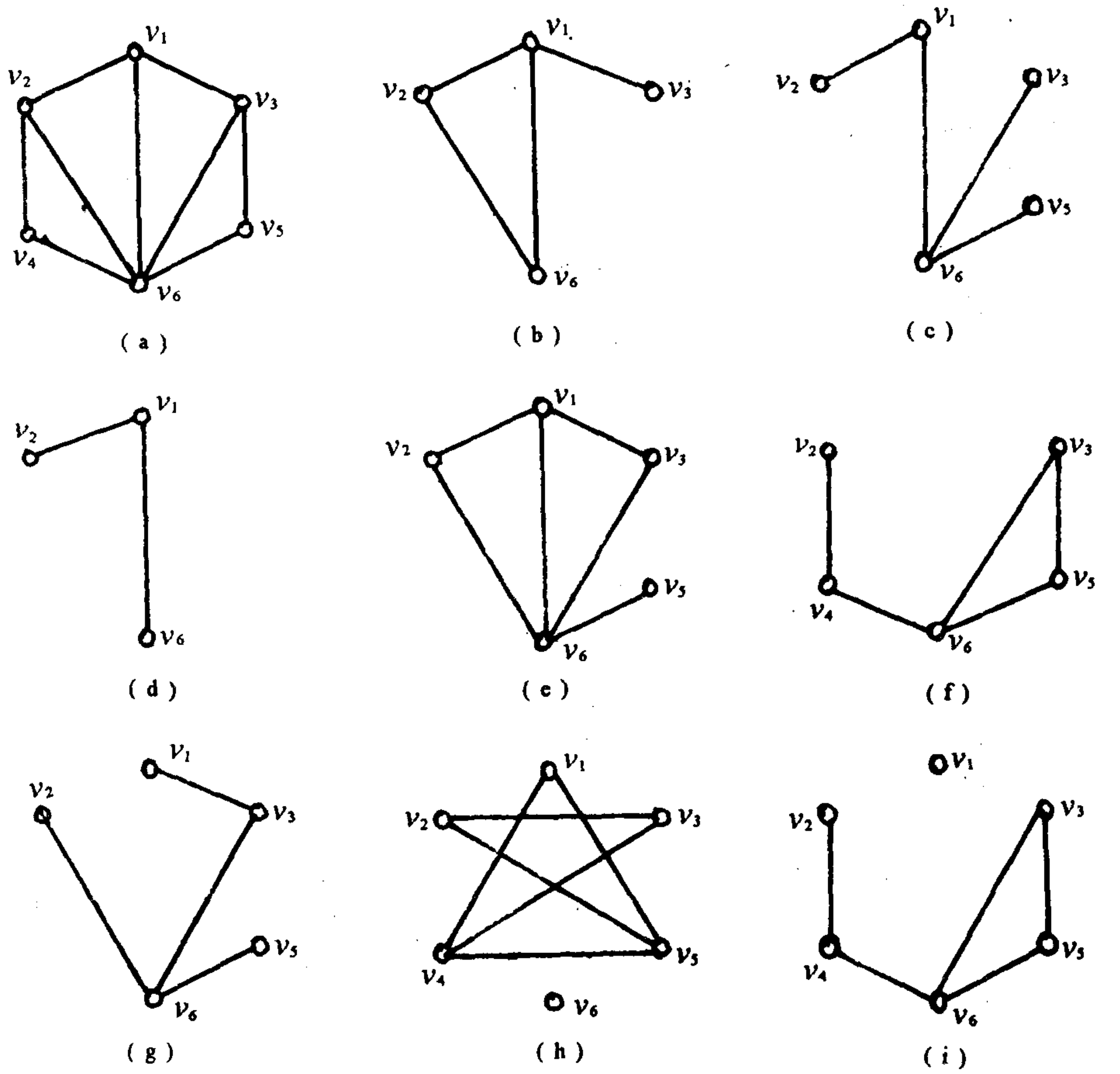


图 1.9　(a) 图 G　(b) 子图 G_1　(c) 子图 G_2
(d) 交 $G_1 \cap G_2$　(e) 并 $G_1 \cup G_2$　(f) 差 $G - G_1$
(g) 对称差 $G_1 \oplus G_2$　(h) 补 G^c　(i) G_1 在 G 的补图 $\overline{G}_1(G)$

§1.4　有向图

定义 1.9　称 $G=(V,E)$ 为**有向图**，如果

(1) V 是一个非空有限集合，

(2) E 是 V 中元素的有序对所组成的有限集合，

并把 V 的元素叫做图的**顶点**，E 的元素叫做图的**有向边**或**边**.

设 G 是有向图，$e=(u,v)\in E(G)$，则称 u 为 e 的**起点**或**尾**，e 为 u 的**出边**；并称 v 为 e 的**终点**或**头**，e 为 v 的**入边**；又称 u 为 v 的**前趋**，v 为 u 的**后继**. 若二条或二条以上的边有相同的头和尾，则这些边称为**平行边**.

对有向图，顶点 v 的**前趋域** $\Gamma^-(v)$ 是

$$\Gamma^-(v) \triangleq \{u \in V(G) \mid u \text{ 是 } v \text{ 的前趋}\},$$

顶点 v 的**后继域** $\Gamma^+(v)$ 是