

材料力学

(下 册)

北京航空学院

西北工业大学 合编

南京航空学院

单 辉 祖 主编



国防工业出版社

内 容 简 介

本书分上、下两册。上册包括：绪论、杆的拉伸与压缩、轴的扭转、梁的内力、梁的正应力、梁的剪应力、梁的变形、复杂应力状态的应力和应变分析、强度理论及其应用等九章。下册包括：按能量法计算位移、静不定结构分析、考虑材料塑性的强度计算、连接件的强度计算、压杆稳定问题、疲劳强度问题、实验应力分析的电测法和光弹性法、弹性理论平面问题和断裂力学简介等九章。全书各章后均附有习题并给出了答案。

本书可作为机械类、航空类材料力学课程的教材，也可供工程技术人员参考。

材 料 力 学

(下 册)

北京航空学院

西北工业大学 合编

南京航空学院

单辉祖 主编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张9³/₁₆ 234千字

1981年8月第一版 1981年8月第一次印刷 印数：00,001—18,500册

统一书号：15034·2256 定价：1 15元

目 录

第十章 按能量法计算位移	1
§ 10-1 基本概念	1
§ 10-2 外力功的计算	1
§ 10-3 变形能的计算	5
§ 10-4 卡氏定理	11
§ 10-5 虚功原理和单位载荷法	16
§ 10-6 图形互乘法	27
* § 10-7 剪力对位移的影响	34
* § 10-8 冲击变形和冲击应力	37
§ 10-9 功的互等定理和位移互等定理	42
习题	44
第十一章 静不定结构分析	54
§ 11-1 引言	54
§ 11-2 用力法分析静不定问题	56
§ 11-3 对称条件在分析静不定问题时的利用	63
* § 11-4 连续梁和三弯矩方程	69
* § 11-5 力法正则方程	75
* § 11-6 位移法概念	82
习题	85
第十二章 考虑材料塑性的强度计算	90
§ 12-1 引言	90
§ 12-2 静不定杆系的极限载荷	91
§ 12-3 圆截面轴的极限扭矩	95
§ 12-4 梁的极限弯矩	96
§ 12-5 梁的极限载荷	99
习题	105

第十三章 连接件的强度计算	109
§ 13-1 引言	109
§ 13-2 铆接的强度计算	110
§ 13-3 对称受载铆钉群的强度计算	116
* § 13-4 偏心受载铆钉群的强度计算	118
* § 13-5 焊接的强度计算	126
习题	129
第十四章 压杆稳定问题	133
§ 14-1 基本概念	133
§ 14-2 两端铰支压杆的临界载荷	135
§ 14-3 支持方式对临界载荷的影响	138
§ 14-4 临界应力概念和超过比例极限时压杆的临界应力	143
§ 14-5 压杆的稳定计算	148
* § 14-6 用能量法确定压杆的临界载荷	154
习题	158
第十五章 疲劳强度问题	165
§ 15-1 引言	165
§ 15-2 交变应力及其应力比	166
§ 15-3 S-N曲线和材料的疲劳性能	168
§ 15-4 等寿命曲线	170
§ 15-5 影响疲劳极限的主要因素	172
§ 15-6 拉-压、弯曲或扭转交变应力下构件的强度计算	179
§ 15-7 弯扭组合交变应力下构件的强度计算	185
* § 15-8 程序加载与线性累积损伤理论	188
§ 15-9 提高构件疲劳强度的措施	192
习题	194
第十六章 实验应力分析的电测法和光弹性法	196
§ 16-1 概述	196
§ 16-2 电测法的基本原理	197
§ 16-3 应变测量和应力计算	202
* § 16-4 光弹性仪和偏振光场	210
* § 16-5 光弹性法的基本原理	212

* § 16-6 等差线和等倾线的观测	216
习题	217
*第十七章 弹性理论的平面问题	219
§ 17-1 引言	219
§ 17-2 外力、应力和应变的概念	219
§ 17-3 平面应力和平面应变问题	221
§ 17-4 平衡方程和应力边界条件	223
§ 17-5 几何方程和变形协调方程	225
§ 17-6 物理方程	228
§ 17-7 按应力法求解平面问题的基本方程	230
§ 17-8 利用应力函数求解平面问题	232
§ 17-9 利用多项式求解平面问题	233
§ 17-10 圣维南原理	237
§ 17-11 自由端承受集中载荷的悬臂梁	238
§ 17-12 承受均布载荷的简支梁	240
§ 17-13 按极坐标解平面问题的基本方程	243
§ 17-14 轴对称平面问题的基本方程	249
§ 17-15 厚壁圆筒	252
§ 17-16 板中圆孔所产生的应力集中	254
§ 17-17 曲杆的弯曲问题	258
习题	261
*第十八章 断裂力学简介	262
§ 18-1 引言	262
§ 18-2 应力强度因子和断裂韧度	263
§ 18-3 应力强度因子的计算	265
§ 18-4 应力强度因子的塑性区修正	268
§ 18-5 断裂韧度的测试原理	271
§ 18-6 断裂判据的应用	273
§ 18-7 疲劳裂纹扩展和构件的剩余寿命	275
附录	279
下册习题答案	279

第十章 按能量法计算位移

§ 10-1 基 本 概 念

在外力作用下，弹性体发生变形，载荷作用点随之产生位移。载荷作用点沿载荷作用方向的位移分量称为该载荷的**相应位移**。因此，在变形过程中，载荷在相应位移上作功。

另一方面，当弹性体变形时，在其内部将贮存能量。例如，被拧紧的发条在放松过程中能带动齿轮转动；被拉弯的弓在回弹时能将箭射出。这些实例说明，弹性体因变形而具有作功的本领，即具有能量。弹性体因变形而贮存的能量称为**变形能**或**应变能**。

根据能量守恒定律可知，如果载荷是由零逐渐地、缓慢地增加，即所加载荷为静载荷时，则贮存在弹性体内的变形能 U 数值上应等于载荷所作之功 W ，即

$$U = W。 \quad (10-1)$$

此原理称为弹性体的**功能原理**。

利用功、能概念，提供了分析弹性体变形和应力等问题的一般方法，这种方法称为**能量法**。本章介绍用能量法分析弹性杆件或杆系位移的有关原理和方法，包括卡氏定理、变形体虚功原理、功的互等定理、位移互等定理、单位载荷法和图形互乘法等，重点讨论单位载荷法及其应用。

§ 10-2 外力功的计算

由以上各章可知，如果材料服从虎克定律，而且，构件（或结构）变形微小不影响外力的作用，则构件（或结构）的内力、应力和位移等均与载荷成正比。在这种条件下工作的构件（或结构）称为**线性弹性体**。本节研究作用在线性弹性体上的载荷在加

载过程中所作之功。

一、计算外力功的基本公式

图 10-1(a) 所示线性弹性体，在任一点 A 受载荷 p 作用。载荷 p 由零逐渐增加，最后达到最大值 P ； A 点的相应位移 δ 也随之增长，最后达到最大值 Δ 。在此过程中，当载荷由 p 增加微量 dp 时，位移 δ 也相应增加 $d\delta$ (图 10-1, b)。这时，载荷 p

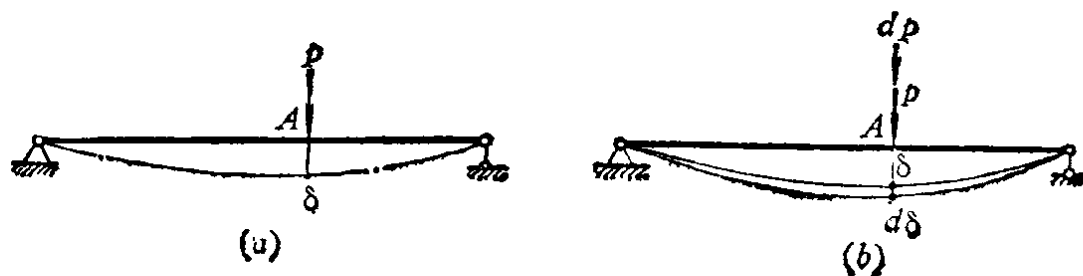


图 10-1

所作之功为 $p d\delta$ 。因此，在整个加载过程中，载荷所作之总功为

$$W = \int_0^{\Delta} p d\delta. \quad (a)$$

对于线性弹性体，载荷 p 与相应位移 δ 成正比，即

$$p = k\delta. \quad (b)$$

式中， k 为比例常数，代表产生单位位移所需之载荷，称为刚度系数。将式 (b) 代入式 (a)，得

$$W = \int_0^{\Delta} k\delta d\delta = \frac{k\Delta^2}{2} = \frac{k\Delta \cdot \Delta}{2},$$

或

$$W = \frac{P\Delta}{2}. \quad (10-2)$$

上式表明，当载荷与相应位移保持正比关系并由零逐渐增加时，载荷所作之功等于载荷 P 与相应位移 Δ 的乘积之半。式(10-2) 为计算外力功的一个基本公式。要注意的是：式中的 P 应理解为广义力，它可以是力，也可以是力偶矩，或是一对大小相等、方向相反的力（或力偶矩），等等；式中的 Δ 则应理解为相应于

广义力的广义位移，例如，与集中力相应的位移为线位移，与集中力偶相应的位移为角位移，与一对大小相等、方向相反的力相应的位移则为相对线位移，等等。总之，广义力在相应的广义位移上作功。

二、多个载荷作用时外力功的计算

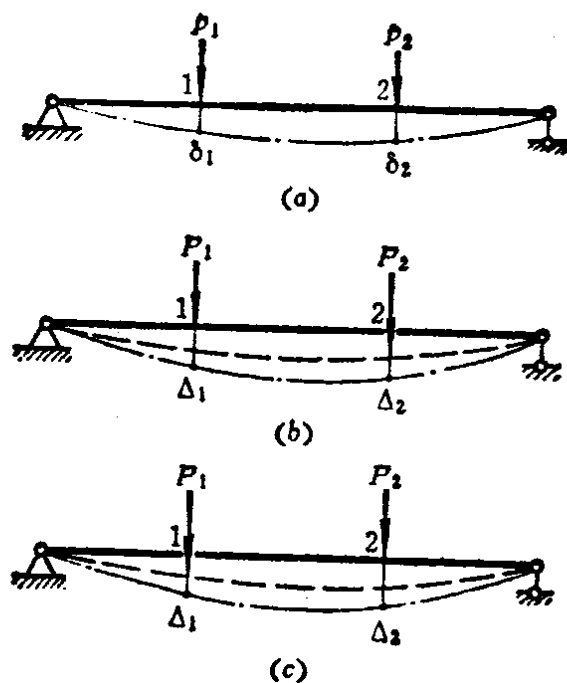


图 10-2

考虑图 10-2(a) 所示线性弹性体，在任意点 1 和 2 分别作用载荷 p_1 和 p_2 ，而且，在加载过程中， p_1 和 p_2 之间始终保持一定的比例关系，即

$$\frac{p_1}{p_2} = c. \quad (c)$$

式中， c 为比例常数。按这种“比例加载”方式， p_1 和 p_2 同时由零分别增加至 P_1 和 P_2 ，而相应位移 δ_1 和 δ_2 则分别增长至 Δ_1 和 Δ_2 。

为了计算载荷 P_1 和 P_2 所作之功，首先应研究载荷与相应位移间的关系。

根据叠加原理可知，

$$\delta_1 = ap_1 + bp_2。$$

式中， a 和 b 均为比例常数。将式 (c) 代入上式，得

$$\delta_1 = ap_1 + \frac{b}{c} p_1 = \left(a + \frac{b}{c} \right) p_1，$$

可见，

$$\delta_1 \propto p_1。$$

同理可证

$$\delta_2 \propto p_2。$$

上述分析表明，在比例加载时，各载荷仍分别与其相应位移成正比。因此，根据公式 (10-2) 可知， P_1 、 P_2 所作之总功为

$$W = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2}。 \quad (d)$$

现在研究非比例加载时外力所作之总功。例如研究先加 P_1 后加 P_2 (图 10-2, b) 或先加 P_2 后加 P_1 (图 10-2, c) 时外力所作之总功。根据叠加原理可知，在上述两种情况下，点 1 和点 2 沿载荷方向的总位移仍分别为 Δ_1 和 Δ_2 。这样，如果逐渐卸去载荷，而且在卸载过程中 p_1 和 p_2 间始终保持一定的比例关系，即按比例卸载，那么，在卸载过程中弹性体所作之总功为

$$W' = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2}，$$

而此功应等于加载时外力所作之总功。也就是说，即使在上述非比例加载时，外力所作之总功仍可写成式 (d) 的形式。

由此可见，不论按何种次序加载，作用在线性弹性体上的静载荷 (广义力) P_1 、 P_2 、 $\dots$ 、 P_n 在相应位移 (广义位移) Δ_1 、 Δ_2 、 $\dots$ 、 Δ_n 上所作之总功恒为

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2}。 \quad (10-3)$$

例 1 图 10-3 所示悬臂梁，受载荷 P 、 M 作用，试计算 P 、 M 所作之总功。设抗弯刚度 EI 为常数。

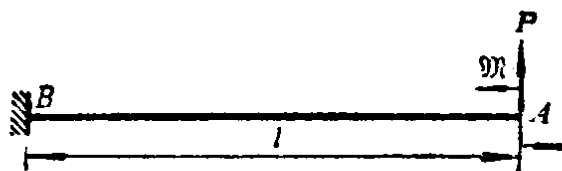


图 10-3

解：由叠加原理可知，截面 A 的挠度和转角分别为

$$y_A = y_{A,P} + y_{A,M} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} \quad (\uparrow),$$

$$\theta_A = \theta_{A,P} + \theta_{A,M} = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI} \quad (\curvearrowleft).$$

因此，根据公式 (10-3) 可知，载荷 P 与 M 所作之总功为

$$W = \frac{Py_A}{2} + \frac{M\theta_A}{2} = \frac{P^2l^3}{6EI} + \frac{PMl^2}{2EI} + \frac{M^2l}{2EI}.$$

由上式可以看出，

$$W \neq \frac{Py_{A,P}}{2} + \frac{M\theta_{A,M}}{2} = \frac{P^2l^3}{6EI} + \frac{M^2l}{2EI}.$$

即外载荷所作之总功不能利用叠加原理进行计算。这是因为，在一般情况下，各载荷所作之功并非仅与该载荷有关。

§ 10-3 变形能的计算

杆件的变形能可利用功能原理通过外力功来计算。下面分几种情况进行讨论。

一、拉（压）杆的变形能

当杆件处于轴向拉伸或压缩时（图 10-4），杆件的轴向变形为

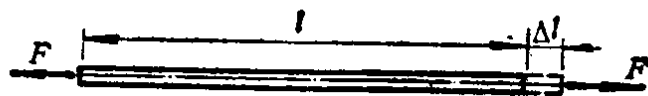


图 10-4

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA},$$

即

$$\Delta l \propto F。$$

所以，外力所作之功为

$$W = \frac{F \cdot \Delta l}{2} = \frac{F^2 l}{2EA}。$$

根据功能原理可知，拉（压）杆的变形能即为

$$U = W = \frac{F^2 l}{2EA}。 \quad (10-4)$$

由此不难看出，对于由 n 根拉（压）杆所组成的桁架，其变形能则为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 l_i}{2E_i A_i}。 \quad (10-5)$$

二、轴的变形能

对于受扭圆截面轴（图 10-5），由于

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p},$$

所以，该轴的变形能为

$$U = \frac{T\varphi}{2} = \frac{T^2 l}{2GI_p}。 \quad (10-6)$$

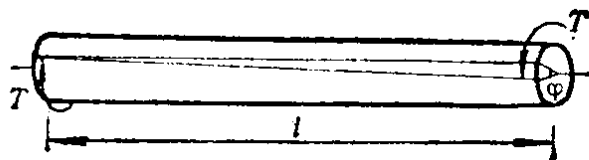


图 10-5

对于受扭单闭室闭口薄壁杆（图 10-6, a），微体 $a b c d$ 的受力和变形如图 10-6(b) 所示。根据公式 (3-45) 和 (3-5) 可知，该微体的剪流和剪切变形分别为

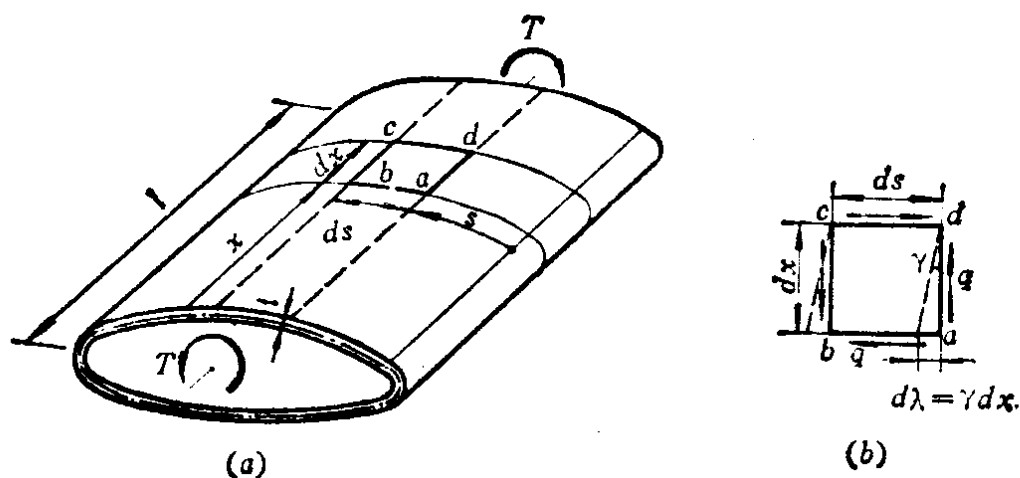


图 10-6

$$q = \frac{T}{2\Omega},$$

$$d\lambda = \gamma dx = \frac{q dx}{tG} = \frac{T dx}{2\Omega G t}.$$

所以，微体的变形能为

$$dU = \frac{q ds \cdot d\lambda}{2} = \frac{T^2 ds dx}{8\Omega^2 G t},$$

而整个薄壁杆的变形能则为

$$U = \int_l \oint \frac{T^2}{8\Omega^2 G t} ds dx = \int_l \frac{T^2}{8\Omega^2 G} \oint \frac{ds}{t} dx.$$

令

$$J_k = \oint \frac{ds}{t},$$

则

$$U = \int_l \frac{T^2}{2G J_k} dx,$$

由此得

$$U = \frac{T^2 l}{2G J_k}. \quad (10-7)$$

至于矩形截面受扭轴，其变形能亦可按上式计算，只是式中的 J_k 应按公式 (3-33) 进行计算。

三、梁的变形能

在一般情况下，梁的剪力和弯矩均沿梁轴变化，因此，梁的变形能应从微段 dx 入手进行计算（图 10-7, a）。

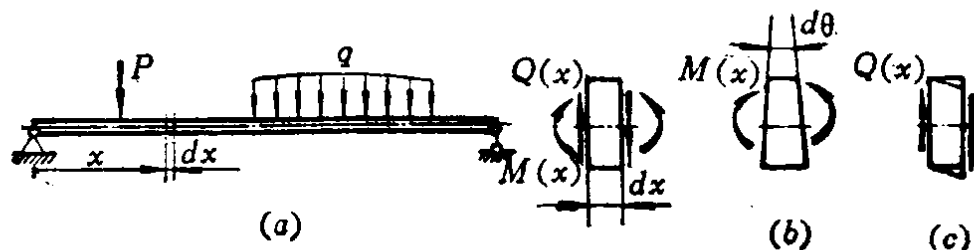


图 10-7

在弯矩 $M(x)$ 作用下，微段两端的横截面间作相对转动（图 10-7, b），相对转角为

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI} dx,$$

在剪力作用下，微段两端的横截面间作相对错动（图 10-7, c）。所以，弯矩在相应的弯曲变形 $d\theta$ 上做功，剪力在相应的剪切变形上做功。但是，在一般细长梁中，剪力所作之功远小于弯矩所作之功，因而剪力所作之功可略去不计（见 § 10-7）。所以，梁微段 dx 的变形能为

$$dU = dW = \frac{M(x)d\theta}{2} = \frac{M^2(x)dx}{2EI},$$

而整个梁的变形能则为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx. \quad (10-8)$$

四、杆件处于组合变形时的变形能

当杆件处于组合变形时，其微段受力的一般形式如图 10-8(a) 所示。可以看出（图 10-8, b），轴力 $F(x)$ 只在轴力所引起的轴向变形 $d\delta$ 上做功，而扭矩 $T(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 则只分别在各自引起的扭转变形 $d\varphi$ 和弯曲变形 $d\theta$ 上做功，它们相互独立，互不影响。所以，在忽略剪力影响的情况下，微段 dx 的变形能为

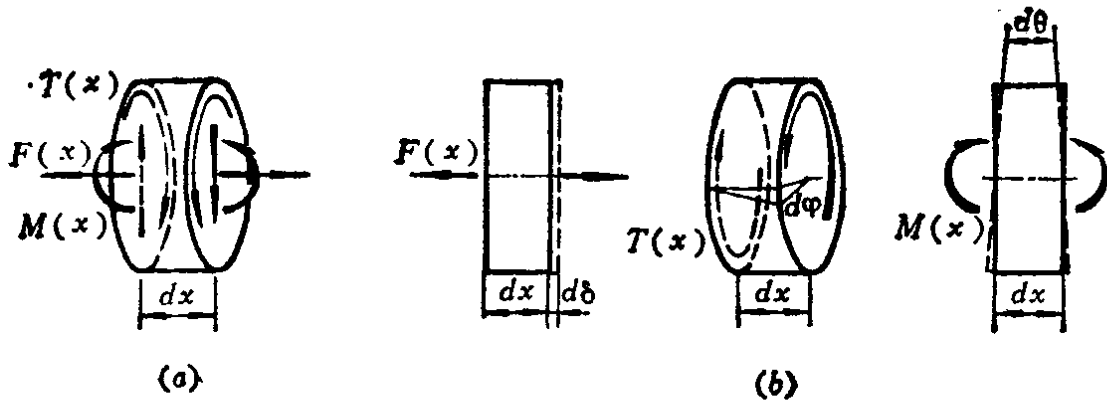


图 10-8

$$\begin{aligned}
 dU = dW &= \frac{F(x) d\delta}{2} + \frac{T(x) d\varphi}{2} + \frac{M(x) d\theta}{2} \\
 &= \frac{F^2(x) dx}{2EA} + \frac{T^2(x) dx}{2GI_p} + \frac{M^2(x) dx}{2EI},
 \end{aligned}$$

而整个杆件或杆系的变形能则为

$$U = \int_1 \frac{F^2(x)}{2EA} dx + \int_1 \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx + \int_1 \frac{M^2(x)}{2EI} dx. \quad (10-9)$$

要注意的是, 上式只适用于圆截面杆。对于非圆截面杆, 则应将弯矩沿截面主形心轴 y 、 z 分解为 $M_y(x)$ 和 $M_z(x)$ 两个分量, 并以 J_k 代替 I_p , 这样, 式 (10-9) 变为

$$\begin{aligned}
 U &= \int_1 \frac{F^2(x)}{2EA} dx + \int_1 \frac{T^2(x)}{2GJ_k} dx + \\
 &+ \int_1 \frac{M_y^2(x)}{2EI_y} dx + \int_1 \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx. \quad (10-10)
 \end{aligned}$$

例 2 图 10-9 所示简支梁, 受载荷 P 作用, 试计算梁的变形能 U 和截面 C 的挠度 f_c 。设 EI 为常数。

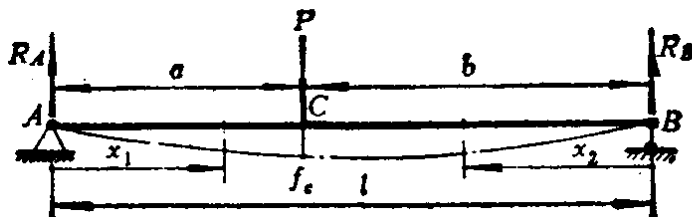


图 10-9

解：由 $\Sigma M_B = 0$ 和 $\Sigma M_A = 0$ ，求得

$$R_A = \frac{Pb}{l}, \quad R_B = \frac{Pa}{l}。$$

将梁分为 AC 和 CB 两段，并选坐标 x_1 和 x_2 如图所示，显然，

$$M(x_1) = \frac{Pb}{l}x_1, \quad (0 \leq x_1 \leq a),$$

$$M(x_2) = \frac{Pa}{l}x_2, \quad (0 \leq x_2 \leq b)。$$

根据公式 (10-8)，梁的变形能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \frac{M^2(x_1)}{2EI} dx_1 + \int_0^b \frac{M^2(x_2)}{2EI} dx_2 \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{l}x_1 \right)^2 dx_1 + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{l}x_2 \right)^2 dx_2 \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI}。 \end{aligned}$$

根据功能原理，

$$\frac{Pf_s}{2} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI}。$$

由此得

$$f_s = \frac{Pa^2 b^2}{3EI} (\downarrow)。$$

例 3 图 10-10 所示悬臂梁，受载荷 P 、 M 作用，试计算梁的变形能。设 EI 为常数。

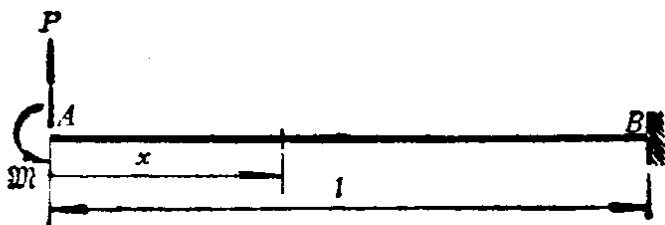


图 10-10

解：由图可知，

$$M(x) = Px - M。$$

代入公式 (10-8), 得梁的变形能为

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^l (Px - M)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI} - \frac{PMl^2}{2EI} + \frac{M^2 l}{2EI}.$$

设截面 A 的挠度为 f_A , 转角为 θ_A , 则外力所作之总功为

$$W = \frac{Pf_A}{2} + \frac{M\theta_A}{2}.$$

根据功能原理,

$$\frac{Pf_A}{2} + \frac{M\theta_A}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EI} - \frac{PMl^2}{2EI} + \frac{M^2 l}{2EI}.$$

显然, 由此式尚不能确定 f_A 和 θ_A .

由以上二例可以看出, 只有当弹性体上仅作用一个广义力, 且所求位移为相应的广义位移时, 才可能直接利用功能原理计算位移。

§ 10-4 卡氏定理

本节介绍计算线性弹性体位移的一个重要定理——卡氏定理。

图 10-11(a) 所示线性弹性体, 受载荷 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$ 作用, 各载荷作用点的相应位移分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n$ 。现在拟求 Δ_k , 即计算载荷 P_k 作用点沿 P_k 方向的位移。为此, 使载荷 P_k 增加一增量 dP_k (图 10-11, b), 并研究在此状态时弹性体的变形能 U_1 和相应的外力功 W_1 。

当 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$ 作用时 (图 10-11, a), 外力所作之总功为

$$W_0 = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} + \dots + \frac{P_k \Delta_k}{2} + \dots + \frac{P_n \Delta_n}{2},$$

弹性体的变形能为

$$U_0 = W_0. \quad (a)$$

由于弹性体的变形能是独立变量 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$ 的函数, 所以, 当 P_k 增加 dP_k 后, 变形能的增量为

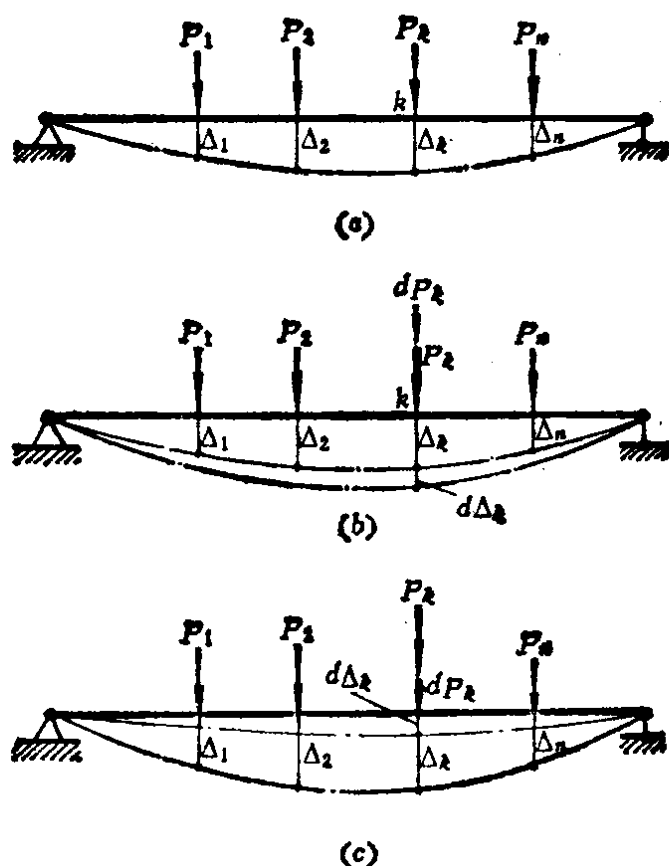


图 10-11

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k,$$

而总变形能则为

$$U_1 = U_0 + \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k. \quad (b)$$

如前所述, 弹性体上载荷所作之总功与加载次序无关。因此, 为便于计算外力功 W_1 , 可以先加 dP_k , 然后再加 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$ (图10-11, c)。设 dP_k 作用时 k 点的相应位移为 $d\Delta_k$, 当 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$ 作用后, 由于线性弹性体的变形可以叠加, 各载荷作用点由此引起的附加位移仍分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_n$, 即与 dP_k 的存在无关。所以, 在整个加载过程中, 外力所作之总功为

$$W_1 = \frac{dP_k \cdot d\Delta_k}{2} + \left(\frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} + \dots + \frac{P_k \Delta_k}{2} + \dots + \frac{P_n \Delta_n}{2} \right) + dP_k \cdot \Delta_k,$$