高等学校财经类专业核心课程教材

经济数学基础

（第二分册　线性代数）

主　编　龚德恩　　副主编　范培华　胡显佑

四川人民出版社

高等学校财经类专业核心课程教材

经济数学基础

（第二分册 线性代数）

主　编　龚德恩
副主编　范培华 胡显佑
编写者　胡显佑 靳云汇

四川人民出版社
1992年·成都

川新登字：001号

特约编辑：朱　平
责任编辑：王　茴
封面设计：魏天禄
技术设计：古　蓉

经济数学基础（第二分册：线性代数）
龚德恩 主编　范培华　胡显佑 副主编

四川人民出版社出版（成都盐道街3号）
四川省新华书店经销
内江新华印刷厂印刷

开本850×1168mm　1/32　印张9.75 插页1　字数210千
1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷
ISBN7—220—01727—8/F·141　印数：1—10000册

定价：5.05元

出版说明

1990年，财经类专业核心课程的10门教学大纲通过了审定并正式出版。当年暑期，国家教委根据教学大纲组织了全国性的师资培训工作．在此基础上，为了进一步加强财经类专业的核心课程建设，国家教委决定委托教学大纲的主编根据教学大纲的要求编写教材，并争取在今、明两年内使这10本教材出版，供普通高等学校财经类本科专业使用．

在着手组织编写教材时，我们确定的指导思想是：教材编写应以马克思主义为指导，坚持四项基本原则，贯彻理论联系实际的原则，反映和体现中国特色；注重本学科基本理论、基本知识的介绍以及基本技能的训练，注意吸收本学科新的、比较成熟的研究成果；教材内容应观点正确、鲜明，取材准确，起点、份量适中．在介绍外国经济理论时，应根据我国与外国在国情和意识形态上的差异，本着思想性与科学性统一的原则，作必要的评论和批判．

这套教材是基本按照教学大纲编写的，除包括本课程基本内容外，选学内容比较广泛．在使用时，各专业在保证基本内容讲授的前提下，可以根据各自的要求对教学内容作必要的调整和增

删．教学大纲出版后，许多同志对教学大纲的修订提供了重要而中肯的意见．主编对这些意见进行了认真的研究，并在教材编写中予以相应采纳．因此，教材的体系和内容在教学大纲的基础上有了一些改进和调整．

编写教学大纲和教材是财经类专业核心课程建设的一项重要基础工作，有利于逐步深化教学改革，提高我国高等财经教育的教学质量．我们希望全国高等财经类专业的广大教师继继关心和支持这项工作，及时将使用这套教材中遇到的问题和改进意见向我司和作者反映，以供修订教学大纲和教材时参考．

这套《经济数学基础》教材由中国人民大学龚德恩副教授主编,北京大学范培华副教授和中国人民大学胡显佑副教授副主编。编写组成员有张学贞、靳云汇、袁荫棠．参加本教材审稿讨论的有：南开大学周概容教授，上海财经大学朱幼文副教授，江西财经学院刘序球副教授，（以下按姓氏笔划为序）内蒙古自治区财经学院马华副教授，山东经济学院王好民副教授，中国金融学院王新民副教授，陕西财经学院叶玉琴副教授，东北财经大学刘文龙副教授，天津财经学院张源教授，北京经济学院张广梵副教授，广东商学院郑万伏副教授,中央财政金融学院单立波副教授，湖南财经学院周江雄副教授，浙江财经学院周继高副教授，北京商学院顾瑾副教授，西南财经大学倪训芳副教授，中南财经大学彭勇行副教授，西北师范大学熊烈副教授．

国家教委社会科学
研究与艺术教育司
1992年1月

编著者说明

受国家教委委托，中国人民大学和北京大学共同承担了编写核心课程《经济数学基础》教材的任务．这套教材是按照国家教委高等教育司1989年10月审定的“高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲”的要求编写的．全套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率统计》三个分册．《微积分》分册由张学贞（一、二、三、四、七章）和龚德恩（五、六、八、九、十章）编写，龚德恩统纂；《线性代数》分册由胡显佑（一、二、三章）和靳云汇（四、五、六章）编写，胡显佑统纂；《概率统计》分册由袁荫棠（一、二、三章）和范培华（四、五、六、七章）编写，范培华统纂．

在编写教材时，既要考虑到教学大纲对内容和学分的要求（学分减少而内容有所增加），又要考虑到数学学科的特点和目前国内财经类专业的实际教学情况．因此，要编写一套适合实际教学需要的高质量教材，其难度是很大的．为此，我们在编写教材时着重考虑了以下几个问题：

1．在符合教学大纲规定的内容和学分要求的前提下，希望能尽可能多地介绍一些财经类专业所必需的数学知识．为此，教材

对内容取舍、结构安排、程度要求和某些具体内容的处理等问题进行了认真的分析和研究，与现有教材相比较有所变化．另外，教材中有些内容注有“＊”号，是否讲授这些内容，各校可根据专业特点和实际教学情况决定．

2．《经济数学基础》作为财经类专业的一门基础课，编写教材时既要考虑到财经类专业对数学知识的直接或间接需要，又要考虑到学习数学对培养学生逻辑思维能力的重要性．因此，为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，除一些超出大纲要求或过于繁琐的定理（法则）的证明外，教材对大多数定理（法则）都给出了严格的证明，而且尽量采用文科学生易于接受的证明方法．希望这样处理既能保持数学学科本身的系统性、逻辑严密性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维能力．

3．目前国内已出版了不少《经济数学基础》教材，这些教材都是各兄弟院校数学教师在总结实际教学经验的基础上编写而成的，我们编写这套教材时，希望能将各兄弟院校编写《经济数学基础》教材的先进经验反映出来．为此，在编写教材过程中，我们听取了部分兄弟院校数学教师对编写教材的意见，也参考了不少兄弟院校编写的有关教材．

4．为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，教材中选编了相当数量的典型例题．为了提高读者运用数学知识分析和处理实际经济问题的能力，教材中介绍了一定数量的经济应用例题．为了使读者有较多的练习机会，教材中选配了大量的习题，书后附有习题参考答案．授课教师可根据实际教学情况，布置习题中的一部分给学生练习，其余部分留给学有余力的学生自行练习．

1991年7月28日至8月2日，国家教委聘请有关专家对这套教材的初稿进行了评审．评审组的各位专家以高度负责的精神，

对教材初稿进行了严肃认真的审核，认为教材初稿基本体现了数学大纲的要求，并提出了很多具体的宝贵修改意见．这些修改意见对保证和提高教材的质量，无疑是非常有益的．在此向参加评审会的各位专家表示衷心的感谢．

1991年7月中下旬，在国家教委委托中国人民大学举办的《经济数学基础》暑期师资研讨班上，各兄弟院校的老师也对教材初稿提出过很多宝贵的修改意见．在此向提出过修改意见的各校老师表示衷心的感谢．

西北师范大学熊烈副教授对《微积分》的编写曾提出过书面意见，中国人民大学莫颂清副教授曾仔细审阅过《微积分》初稿，南开大学周概容教授曾仔细审阅和修改过《概率统计》修改稿．在此向他们表示衷心的感谢．

虽然我们尽了很大的努力，希望能写出一套质量较高、适合实际教学需要的教材，但由于水平有限和时间仓促，教材中一定还会存在这样或那样的缺点和问题，敬请读者不吝指正，我们将万分感谢．

龚德恩、范培华、胡显佑

1992年1月10日于北京

目　　录

第一章　行列式 ……………………………………………… (1)
§1.1　n阶行列式 ………………………………………… (1)
§1.2　行列式的性质 ………………………………… (12)
§1.3　行列式按行（列）展开 ………………………… (20)
§1.4　克莱姆法则 ………………………………………… (29)
习题一……………………………………………………… (33)
第二章　线性方程组 ………………………………………… (43)
§2.1　消元法 ……………………………………………… (43)
§2.2　n维向量 …………………………………………… (60)
§2.3　向量组的秩 ………………………………………… (71)
§2.4　矩阵的秩 …………………………………………… (74)
§2.5　线性方程组解的一般理论 ………………………… (84)
习题二……………………………………………………… (98)
第三章　矩阵 ……………………………………………… (107)
§3.1　矩阵的运算……………………………………… (107)
§3.2　几种特殊的矩阵………………………………… (120)
§3.3　分块矩阵………………………………………… (124)

§3.4 逆矩阵 …………………………………………… (133)
§3.5 初等矩阵 …………………………………………… (140)
习题三 …………………………………………… (148)
第四章 向量空间 …………………………………………… (159)
§4.1 向量空间 …………………………………………… (159)
§4.2 向量内积 …………………………………………… (173)
§4.3 正交矩阵 …………………………………………… (178)
习题四 …………………………………………… (185)
第五章 矩阵的特征值与特征向量 …………………………… (191)
§5.1 矩阵的特征值和特征向量 ………………………… (191)
§5.2 相似矩阵与矩阵可对角化条件 …………………… (200)
§5.3 实对称矩阵的对角化 ……………………………… (209)
§5.4 非负矩阵 …………………………………………… (219)
*§5.5 对角优势矩阵 ……………………………………… (230)
*§5.6 矩阵级数 …………………………………………… (235)
*§5.7 投入产出分析简介 ………………………………… (239)
习题五 …………………………………………… (247)
第六章 二次型 …………………………………………… (252)
§6.1 二次型及其矩阵 …………………………………… (252)
§6.2 化二次型为标准形 ………………………………… (258)
§6.3 化二次型为规范形 ………………………………… (268)
§6.4 正定矩阵 …………………………………………… (275)
习题六 …………………………………………… (284)
习题参考答案 …………………………………………… (287)

第一章 行列式

行列式的概念来源于解线性方程组的问题．在中学代数中，我们已讨论了用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组．在一定的条件下，这一方法可以推广到解n元线性方程组．同时，行列式也是研究线性代数的一个重要工具，本书的各章都要用到行列式的概念和性质．在这一章，我们将介绍n阶行列式的概念、性质、计算方法以及解n元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1 n阶行列式

一．二阶、三阶行列式

考虑含有两个未知量x_1、x_2的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为了求得方程组(1.1)的解，可以利用加减消元法得到

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}\end{cases}$$

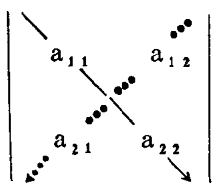
当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

并称它为二阶行列式．二阶行列式的计算也可根据图1—1来记忆．



(−)　　　　(+)

图 1 — 1

利用二阶行列式的概念，(1.2)中的分子可以分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix};\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

因此，对于方程组(1.1)，在行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

例1. 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ 4x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases}$$

解 方程组中未知量的系数所构成的二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3-(-3)\times 4 = 15 \neq 0$$

所以方程组有唯一解．由(1.3)，还需计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -30, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-30}{15} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{15}{15} = 1.$$

对于含有三个未知量x_1、x_2、x_3的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

可以进行类似的讨论．为此，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.5}$$

并称它为三阶行列式．行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列．数a_{ij}(i，j=1，2，3)称为它的元素．三阶行列式所表示的代数和可以利用图1—2来记忆．图中，沿各实线相连的三个数的积取正号，沿各虚线相连的三个数的积取负号．它们的代数和就是(1.5)所表示的三阶行列式．

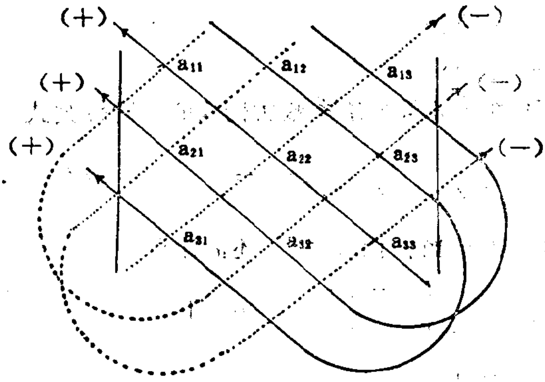


图1—2

例2. 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 $D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5$
$-(-3)\times4\times3-2\times(-2)\times1$
$=75$

利用加减消元法，不难求出方程组(1.4)的解，其结果可以用三阶行列式表示：当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时，方程组(1.4)有唯一解. 如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1.4)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

不难看出，(1.6)中各式的分母D就是方程组(1.4)中各未知量的系数按原来顺序排列所构成的三阶行列式．一般称D为方程组(1.4)的系数行列式．而D_1则是把D的第一列换成常数项b_1，b_2，b_3，同时其余各列不变时所构成的三阶行列式．D_2，D_3也有类似的特点．

对照求解二元线性方程组的公式(1.3)，可以发现公式(1.3)与(1.6)有类似的特点．以后我们将证明，在一定的条件下，具有更多未知量的线性方程组也有类似的求解公式．

例3． 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26 \\ 2x_1-4x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

所以方程组有唯一解．再计算

$$D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{55}{5}=11,\ x_2=\frac{20}{5}=4,\quad x_3=\frac{-15}{5}=-3.$$

二、排列及其逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式，首先引入排列的概念.

定义1.1 由自然数1，2，…，n组成的一个有序数组i_1，i_2，…，i_n称为一个n级排列.

例4. 由自然数1，2，3可组成的三级排列共有3!＝6个. 它们是

1 2 3；1 3 2；2 1 3；2 3 1；3 1 2；3 2 1.

一般地，n级排列的总数为n!个

定义1.2 在一个n级排列$i_1\ i_2\cdots i_n$中，如果较大的数i_s排在较小的数i_t的前面，即$i_s>i_t(t>s)$时，称这一对数$i_s i_t$构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为它的逆序数. 记为$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

例5. 在五级排列4 5 2 1 3中，构成逆序的数对有4 2，4 1，4 3，5 2，5 1，5 3，2 1. 因此

$$\tau(4\ 5\ 2\ 1\ 3)=7$$

例6. 在n级排列12…n中，各个数是按照由小到大的自然顺序排列的. 这一排列称为n元自然序排列. 由于其中任何一个数对都不构成逆序. 因此

$$\tau(1\ 2\cdots n)=0$$

定义1.3 如果排列$i_1\ i_2\cdots i_n$的逆序数为偶数，则称它为偶排

列．如果该排列的逆序数为奇数，则称它为奇排列．

逆序数为零的排列（如例6），我们规定它是偶排列．

如，例5中的排列4 5 2 1 3是一个奇排列．不难验证，例4中1 2 3，2 3 1，3 1 2是偶排列；1 3 2，2 1 3，3 2 1是奇排列．

定义1.4 在一个排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中，如果其中某两个数$i_s$和$i_t$互换位置，其余各数位置不变，就得到另一个排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$．这样的变换称为一个对换．记为$(i_s\ i_t)$．

例如，$4\ 5\ 2\ 1\ 3 \xrightarrow{(5,\ 1)} 4\ 1\ 2\ 5\ 3$．

定理1.1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性．

证明 首先考虑对换两个相邻的数的情形．设某一n级排列为

$$\cdots i\ \ j\cdots$$

经过对换$(i\ \ j)$得到另一个排列

$$\cdots j\ \ i\cdots$$

在这两个排列中，除i、j以外的其他任意两个数的顺序均未改变；i、j以外的任意一个数与i（或j）的顺序也未改变．因此，新排列比原排列或增加了一个逆序（当$i<j$时），或减少了一个逆序（当$i>j$时）．无论是哪一种情形，原排列与新排列的奇偶性都相反．即对换相邻的两个数，一定会改变排列的奇偶性．

一般，设对换的两个数i，j之间还有s个数k_1，k_2，…，k_s．即原排列为

$$\cdots i\ \ k_1\ \ k_2\cdots k_s\ \ j\cdots$$

经对换$(i,\ j)$得新排列

$$\cdots j\ \ k_1\ \ k_2\cdots k_s\ \ i\cdots$$

我们也可以在原排列中先把i依次与k_1，k_2，…，k_s，j作$s+1$次相邻数的对换，先化为

$$\cdots k_1\ \ k_2\cdots k_s\ \ j\ \ i\cdots$$

再把数j依次与k_s，…，k_2，k_1作s次相邻数的对换，就得到新排