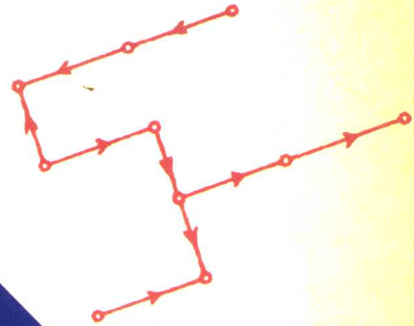
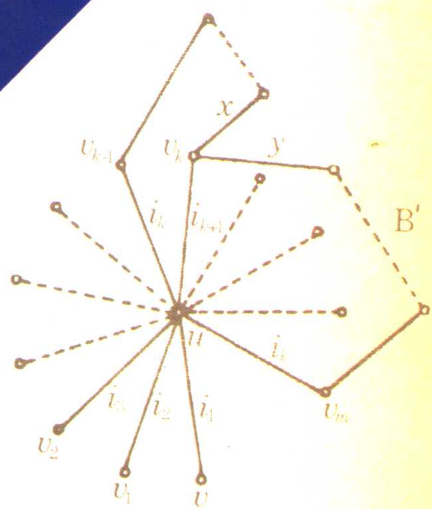
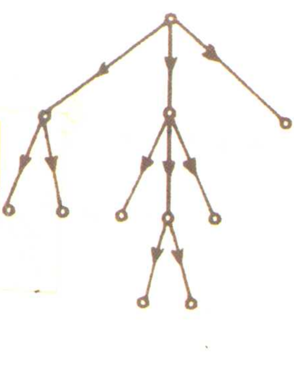
Lisan Shuxue

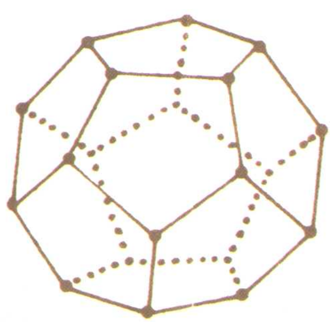
离散数学

Lisan Shuxue









刘任任 编著

湖南科学技术出版社

离散数学

刘任任 编著

湖南科学技术出版社

离散数学

编 著 者：刘任任
责任编辑：杨　林
出版发行：湖南科学技术出版社
（长沙市展览馆路 8 号）
印　　刷：湖南省政府印刷厂
（印装质量问题直接与本厂联系）
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1995 年 12 月第 1 版第 1 次
开　　本：850×1168 毫米　1/32
印　　张：13
字　　数：337,000
印　　数：1—3100
ISBN 7—5357—1903—1/O・61
定　　价：13.00 元

序　言

离散数学是计算机科学的基础数学，它以离散量为研究对象，充分描述了计算机科学离散性的特点。

离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立的，尽管它的主要内容在计算机出现之前就已散见于数学的各个分支中。它形成于本世纪 70 年代初，因此，国外也有人称之为“计算机数学”。

离散数学包括的内容主要有：集合论、图论、数理逻辑以及代数结构，并且其内容一直随着计算机科学的发展而不断地扩充和完善。作为计算机专业的核心课程，它为后续课程提供了必要的数学基础。这些后续课程主要有：数据结构、编译理论、算法分析、自动机理论、计算机密码学、人工智能和可计算性理论等。

本书是作者在多年讲授离散数学课程的基础上编写而成的，其目的在于通过讲授离散数学中的基本概念、基本定理和运算技巧及其在计算机科学中的应用，培养学生的数学抽象能力、用数学语言描述问题的能力、逻辑思维能力以及数学论证能力。因此，本书力求概念阐述严谨，证明推演详尽，较难理解的概念用实例说明。

全书共分五篇：第一篇是集合论，主要介绍集合、关系、映射以及可数集与不可数集，这些内容是全书的基础知识和基本工具；第二篇是图论，主要介绍图与子图、树，平面图、匹配、图的着色、有向图、网络流等内容。由于图为任何一个包含二元关系的系统提供了一种离散数学模型，因此，应用图论来解决计算机科学以及工程技术等领域中的问题已显示出极大的优越性。此外，图论对于锻炼学生的组合思维能力，提高运用数学工具描述

并解决实际问题的能力也大有益处；第三篇是数理逻辑，包括命题逻辑与一阶逻辑，它们是数理逻辑中与计算机科学关系较密切的内容；第四篇是代数结构，主要内容有群、环、域以及格与布尔代数，这些内容是自动机理论、计算机密码学等学科的基础；第五篇是组合论初步，主要介绍组合数学中关于存在性、计数、构造、分类以及最优化等基本内容，目的在于向学生介绍组合分析这一强有力的数学工具。

本书主要用作计算机专业基础课教材，它也可以作为与计算机相关专业的基础知识教材。对于计算机专业本科学生而言，本书可分作两个学期讲授，约 140 学时；对于计算机专业专科学生而言，本书可作为一个学期的教材使用，建议删去其中带 * 号的章节；对其它专业的学生，可根据需要讲授。

本书在编写过程中，得到了湘潭大学计算机科学系的大力支持。湘潭大学罗铸楷教授在百忙中指导制定了编写大纲，审阅了全部书稿，并提出修改意见。在此，谨表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，加之时间仓促，难免存在错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

最后，我们引用计算机科学巨匠、图灵奖获得者 D.E.Knuth 说过的一段话，来说明数学，特别是离散数学在计算机科学中的重要地位。

“除了无穷维 Hibert 空间不大可能用得上以外，其它数学理论都可能在计算机科学中得到应用。概括地说：在计算机科学的研究领域中，凡一问题要求形式化、精确化表示，最可能用到的数学理论是数理逻辑、某些部分可能用到代数，甚至拓扑学；凡一问题要求表示出算法执行过程中各部分的逻辑结构或关系，最可能用到的数学理论是图论和数理逻辑，某些部分可能用到代数；凡一问题要求给出量的测定，最可能用到的数学理论是组合数学、数论和概率论等；凡一问题要求得出最优方案，最可能用到的数学理论是运筹学、数论，甚至将来有可能用到数学分析。”

目　　录

第四篇 代数结构

第一篇 集合论

集合论是现代数学的基础，它作为一门独立的数学分支诞生于 19 世纪.当时，由于科学和技术的发展，极大地推动了微积分、抽象代数、几何学等领域的理论与应用研究.就整个经典数学而言，迫切需要建立一个能够统括各个数学分支，并能建树其上的理论基础.正是在数学发展的这样一个历史背景下，康托尔(Deorg Cantor) 系统地总结了长期以来对数学的认识与实践，创立了集合论.

集合论的创立，使数学研究对象从有限推进到无限，并为整个经典数学的各个分支提供了一个共同的理论基础.目前，集合论的概念几乎已渗透到现代数学的各个领域，并且在计算机科学、经济学、语言学和心理学等学科中有着重要的应用.

本篇主要介绍集合论中的有关集合、关系、映射以及可数集与不可数集等基本知识.

第一章 集合

众所周知，任何一个理系统，都要包含着一些不加定义而直接引入的基本概念.例如，欧几里德几何学系统中的“点”和“直线”，而“三角形”、“圆”等几何概念都是可以通过“点”和“直线”来定义.在集合论中，集合就是这样一个唯一不精确定义而直接引用的基本概念.集合论是现代数学中最重要的基本概念之一.

本章主要介绍集合的概念及其表示、集合的运算和笛卡尔积.

§ 1.1 集合的概念及其表示

由于集合是一个不能精确定义的概念，因此，只能给它以直观的描述.所谓集合，可描述为"由一些任意确定的、彼此有区别的对象所组成的一个整体".集合中的对象就称为该集合中的元素.通常用大写英文字母表示集合，而用小写字母表示元素.

如果 a 是集合 S 中的元素，则记为 $a\in S$，读作"a 属于 S"；如果 a 不是 S 中的元素，则记为 $a\notin S$，读作"a 不属于 S".

[例1] 以下是一些集合的例子:

(1) 教室里所有课桌的集合;

(2) 全体自然数的集合;

(3) 100以内的素数集合;

(4) 方程$x^2+x+1=0$的实根的集合;

定义 1.1.1 设 A 为集合，用 $|A|$ 表示 A 中所含元素的数目:

(1) 若$|A|=0$，则称A为空集，空集常用$\varnothing$表示;

(2) 若$|A|=n$（自然数），则称A为有限集;

(3) 若$|A|=\infty$，则称A为无限集;

(4) 若$|A|\neq 0$，则称A为非空集.

在例 1 所举的 4 个集合中，(1) 和 (3) 为非空有限集，(2) 为无限集，(4) 为空集.

为方便起见，本书用以下符号表示固定集合:

N——自然数集合；Z——整数集合;

Q——有理数集合；R——实数集合.

由集合的概念可知，要确定一个集合，只需指出哪些元素属于该集合，哪些元素不属于该集合.常用以下两种方法描述一个集合:

1. 列举法

按任意一种次序，不重复地将集合中的元素全部或部分地列

出来，未列出来的元素用“…”代替，并用花括号括起来．例如，

10以内的素数的集合$M=\{2，3，5，7\}$；

26个英文小写字母的集合$M=\{a，b，c，\cdots，x，y，z\}$；

所有整数的集合$Z=\{\cdots，-2，-1，0，1，2，\cdots\}$；

全体正偶数的集合$E=\{2，4，6，\cdots\}$．

部分地列举元素时，一般所列出的元素要能反映出该集合元素的构造规律．

2. 描述法

用集合中元素所共同具有的某个性质来刻划该集合．于是，任何一个元素属于该集合当且仅当该元素具有那个性质．例如，在直角坐标系平面内，坐标满足方程$x^2+y^2=1$的全部点所组成的集合D可以表示为:

$$D=\{(x,y)|x,y\in R且x^2+y^2=1\}$$

其中，(x,y)表示集合D的元素.

我们知道，元素与集合之间是属于或不属于的关系，对于集合之间的关系，我们有

定义1.1.2　设A，B为任意两个集合:

(1) 若对每个$x\in A$均有$x\in B$，则称A为B的子集，也称A含于B或B包含A，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$.

(2) 若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等，记为$A=B$，否则称A与B不相等，记为$A\neq B$.

(3) 若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称A为B的真子集，也称A真含于B或B真包含A，记为$A\subset B$或$B\supset A$.

由集合的概念可知，一个集合也可以作为另一个集合的元素．

定义1.1.3　设A为任意集合，令$\rho(A)=\{X|X\subseteq A\}$

称$\rho(A)$为A的幂集（即A的所有子集做成的集合），A的

幂集也可记为 2^A.

例如，设 $A=\{a,\{b\}\}$，则 A 的幂集为

$$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{a,\{b\}\}\}$$

显然，若 A 为有限集，且 $|A|=n$，则 $\rho(A)$ 的元素个数为

$$|\rho(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

§ 1.2 集合的基本运算

以下设 E 是这样一个集合，它包含我们所讨论的所有集合，并称 E 为全集 .

定义1.2.1 设 A、B 为任意两个集合.令

$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$ $\quad A\cap B\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$

$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$ $\quad A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

分别称 $A\cup B$、$A\cap B$、$A-B$ 和 $A\oplus B$ 为集合 A 与 B 的并、交、差和对称差 .

特别，差集 $E-A$ 称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$.

如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交.

例如，若取全集 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,4\}$，$B=\{3,5\}$，则有

$A\cup B=\{1,3,4,5\}$， $\quad A\cap B=\{3\}$，

$A-B=\{1,4\}$， $\quad B-A=\{5\}$，

$A\oplus B=\{1,4,5\}$， $\quad \overline{A}=\{2,5\}$

$\overline{B}=\{1,2,4\}$

不难证明，对任意集合 A、B 和 C，下面的运算规律成立:

(1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$ （幂等律）

(2) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ （交换律）

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ （结合律）

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(5) $A\cap(A\cup B)=A$ （吸收律）

$A\cup(A\cap B)=A$

(6) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap E=A$ （同一律）

(7) $A\cup E=E$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ （零律）

(8) $A\cup\overline{A}=E$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$ （互补律I）

(9) $\overline{E}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=E$ （互补律II）

(10) $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$ （De Morgan律）

$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$ （De Morgan律）

(11) $\overline{(\overline{A})}=A$ （对合律）

例如，我们来证明分配律之一：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

任取 $x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$. 于是，$x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$，故 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即证得

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{1.1}$$

另一方面，任取 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，或者 $x\in A$ 且 $x\in C$，于是有 $x\in A$，且 $x\in B$ 或者 $x\in C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，因此，$x\in A\cap(B\cup C)$，故

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C) \tag{1.2}$$

总之，由 (1.1) 和 (1.2) 可得：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

我们再来证明德·摩尔根(De Morgan)律：$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$.

因为，$x\in(\overline{A\cup B})$ 当且仅当 $x\notin A\cup B$ 当且仅当 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 当且仅当 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$ 当且仅当 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，因此，

$$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$$

其余的运算规律，都可以类似地证明.

§ 1.3 笛卡尔积

我们知道，集合中的元素是无次序的，例如 $\{x, y\} = \{y, x\}$. 然而，现实世界中，许多对象必须用两个具有固定次序的元素来描述．比如，直角平面坐标系中的点通常由横坐标 x 和纵坐标 y 表示 $\langle x, y\rangle$，而且当 $x\neq y$ 时，$\langle x, y\rangle$ 与 $\langle y, x\rangle$ 代表平面中不同的两点．我们称两个具有固定次序的对象为序偶，记为 $\langle x, y\rangle$.

定义 1.3.1 设 $\langle x, y\rangle$ 和 $\langle u, v\rangle$ 为两个序偶．若 $x=u$ 且 $y=v$，则称这两个序偶相等，记为 $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$.

序偶 $\langle x, y\rangle$ 中的两个元素可以来自两个不同的集合．例如，若 x 代表姓名，y 代表国名，则序偶 $\langle x, y\rangle$ 就可表示某公民及所属国籍的信息．更一般地，我们有:

定义 1.3.2 设 A、B 是任意两个集合．令

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle | x\in A \text{且} y\in B\}$$

称集合 $A\times B$ 为 A 与 B 的笛卡尔积或直积．

特别地，记 $A\times A$ 为 A^2.

[例1] 设 $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, 则

$$A\times B=\{\langle\alpha, 1\rangle,\langle\alpha, 2\rangle,\langle\alpha, 3\rangle,\langle\beta, 1\rangle,\langle\beta, 2\rangle,\langle\beta, 3\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 1, \alpha\rangle,\langle 2, \alpha\rangle,\langle 3, \alpha\rangle,\langle 1, \beta\rangle,\langle 2, \beta\rangle,\langle 3, \beta\rangle\}$$

$$A\times A=A^2=\{\langle\alpha, \alpha\rangle,\langle\alpha, \beta\rangle,\langle\beta, \alpha\rangle,\langle\beta, \beta\rangle\}$$

由例1可知，一般，$A\times B\neq B\times A$.

可以将序偶的概念推广为 n 元有序组．

定义 1.3.3 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意 n 个元素，$n\geqslant 2$，令:

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle=\langle\langle x_1, x_2, \cdots x_{n-1}\rangle, x_n\rangle;$$

$$\langle x_1\rangle=x_1$$

称 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ 为由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的 n 元有序组，并称 x_i 为第 i 个分量，$i=1, 2, \cdots, n$.

用归纳法可以证明 ,$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$

$= \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ 当且仅当 $x_i = y_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

定义1.3.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个集合.令:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle | x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n \}$$

称 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡尔积.当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，将 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 简记为 A^n.

例如，$n = 3$ 时，$R \times R \times R = R^3 = \{ \langle x, y, z \rangle | x \in R$（实数集）$\}$ 表示空间直角坐标系中所有点的集合.

不难证明，$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots |A_n|$

习 题 一

1. 用列举法表示下列集合:

   (1) 1到100之间的自然数的集合；(2) 小于5的正整数集合；

   (3) 偶自然数的集合；(4) 奇整数的集合.

2. 用描述法表示下列集合:

   (1) 偶整数的集合；(2) 素数的集合；

   (3) 自然数 a 的整数幂的集合.

3. 设 $S = \{2, a, \{3\}, 4\}$，$R = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$. 请判断下面的写法正确与否:

   (1) $\{a\} \in S$　　　　(2) $\{a\} \in R$

   (3) $\{a, 4, \{3\}\} \subseteq S$　　　　(4) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset R$

   (5) $R = S$　　　　(6) $\{a\} \subseteq S$

   (7) $\{a\} \subseteq R$　　　　(8) $\varnothing \subseteq R$

   (9) $\varnothing \subseteq \{\{a\}\} \subseteq R \subseteq E$　　　　(10) $\{\varnothing\} \subseteq S$

   (11) $\varnothing \in R$　　　　(12) $\varnothing \subseteq \{\{3\}, 4\}$

4. 设 A、B 和 C 为任意三个集合. 以下说法是否正确？若正确则证明之，否则举反例说明.

   (1) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \in C$；

   (2) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

   (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$；

   (4) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$；