

结构分析的计算机 方法及程序

阳 日 燕柳斌 编著

重庆大学出版社

结构分析的计算机 方法及程序

阳 日 燕柳斌 编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书把结构分析的基本原理与计算机方法结合起来,指导读者编出结构力学和结构分析的计算机程序。把杆系结构力学中的主要问题和弹性力学平面问题都编成了计算机程序,并介绍了编制这些程序的理论和方法。适合于大专院校开设结构力学课程的各类专业师生作为相应选修课程教材使用,也适合相关专业研究生和工程技术人员阅读参考。

结构分析的计算机方法及程序

阳日 燕柳斌 * 编著

责任编辑 * 谭 敏

重庆大学出版社出版

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:13.75 字数:342千

1998年10月第1版 1998年10月第1次印刷

印数:1—2000

ISBN 7-5624-1800-4 /TP·181 定价:15.00元

前 言

目前电子计算机在土建、水利、道桥等工程中已经广泛使用。解决一定规模的结构分析问题如果不使用计算机是不可想象的。掌握结构分析程序的编制方法应成为结构分析人员必备的基本知识。本书着重介绍如何把矩阵位移法、有限单元法等基本的、已经成熟的结构力学和结构分析理论与计算机方法结合起来,指导读者编制结构力学和结构分析的计算机程序。

本书可作为结构力学课程的补充教材和选修课教材,以弥补目前教材中理论与方法脱节的现象。本书中第一、二章中的程序用 BASIC 语言编写。可以满足教学中的需要。目前任一台装有 DOS6.0 或 Windows3.1 以上版本操作系统的微机中都带有 Qbasic 软件。读者可以在 Qbasic 支持下将书中的源程序敲入计算机中,编译成执行文件便可方便地使用。BASIC 语言是目前发展最快用途广泛的模块化编程语言。掌握它将对读者方便地使用计算机编程具有重大意义。第四章所附程序更适合于生产使用。Fortran 语言以其运算速度快而在工程界获广泛应用。

本书第一、二、三章由阳日编写,第四章由燕柳斌编写。全书由阳日统稿。

由于编著者水平所限,书中难免存在缺点或错误,欢迎读者批评指正。

编著者 1997.11

目 录

第一章 杆件结构的静力分析	(1)
§ 1-1 基本概念	(1)
§ 1-2 单元刚度矩阵	(3)
§ 1-3 坐标变换	(16)
§ 1-4 用整体坐标表示单元刚度矩阵	(23)
§ 1-5 荷载向量的形成	(26)
§ 1-6 结构分析的刚度法	(30)
§ 1-7 直接刚度法集成总刚度矩阵	(37)
§ 1-8 支座条件的引进	(41)
§ 1-9 刚度方程的求解	(45)
§ 1-10 由结点位移求杆端力	(45)
§ 1-11 总刚度矩阵的贮存和程序设计	(46)
§ 1-12 不同类型单元组合结构的计算	(55)
§ 1-13 结构分析程序实例	(64)
大作业	(97)
第二章 结构动力计算	(99)
§ 2-1 多自由度体系自由振动微分方程	(99)
§ 2-2 振型向量和振型向量的正交性	(102)
§ 2-3 迭代法求自由振动频率和振型	(106)
§ 2-4 多自由度体系无阻尼强迫振动计算	(109)
§ 2-5 刚架的简约振动	(110)
§ 2-6 水平地震作用计算	(116)
§ 2-7 刚架简约振动动力计算程序设计	(121)
§ 2-8 平面刚架动力计算程序(DAF)简介	(125)
大作业	(138)
第三章 平面刚架稳定计算	(140)
§ 3-1 考虑轴向位移影响的单元刚度矩阵	(140)
§ 3-2 刚架的稳定计算	(144)
§ 3-3 刚架稳定计算程序设计	(151)
大作业	(151)
第四章 弹性力学的平面有限单元法	(152)
§ 4-1 概述	(152)
§ 4-2 有限单元法分析过程	(152)
§ 4-3 平面问题的应变与应力	(154)

§ 4-4 等参数有限元	(156)
§ 4-5 单元特性分析	(161)
§ 4-6 数值积分	(163)
§ 4-7 荷载向节点移置、荷载列阵	(165)
§ 4-8 弹性力学平面有限元程序	(169)
参考文献	(212)

第一章 杆件结构的静力分析

§ 1-1 基 本 概 念

随着电子计算机的广泛应用,在建筑结构计算中已经形成一套适应电子计算机的计算方法,这就是矩阵分析方法。矩阵分析方法仍然基于结构力学的传统经典理论,即力法和位移法理论之上,只是使用的数学工具有了改变。由于位移法比之力法更容易编制广泛适用的大型计算机通用程序。所以矩阵位移法就成为目前杆系结构分析中最为广泛应用的方法。

一、结构矩阵分析方法

对于大型连续体结构如平板、壳体、坝体的分析,需要将它们划分成单元。单元与单元之间用结点联结,荷载作用在结点上。单元的形状可以是三角形的矩形的或四面体六面体等。而结点常常是铰结点。这样的划分称为结构的离散化,亦即将一个大型的连续体结构变成有限个单元相互铰结的集合体。也就是将一个弹性力学问题化成结构力学问题来求解。这样的方法称为有限单元法。有限单元法的关键在于建立单元变形与单元结点力之间的关系。这个关系的建立是依靠有限单元法的一套完整而严密的理论来实现的。

对杆件结构进行矩阵分析时,也应将结构划分成单元和结点,而杆件结构的单元就是一根根的直杆,而直杆的变形和杆端作用力之间的关系在材料力学和结构力学中已进行了深入的研究,得出了完整的公式。在矩阵分析中可以直接引用这些公式而不需要引用有限单元法的深奥的理论——尽管这些理论可以涵盖杆单元。这样就可以使杆件结构矩阵分析法非常简单,而且仍然可以使用传统位移法的计算模型,也可以引用离散化模型的一些概念。

在杆系结构中,单元的划分不但可以按结构构造的情况划分成梁单元柱单元,也可以按需要把一根构造杆划分成几个单元。有些结构本来具有曲线轮廓,也可以将它视为由一段段直杆组成,把它离散成若干个直杆单元进行计算。单元与单元之间用结点联结,结点常见为铰结点和刚性结点。假定荷载只作用在结点上而不作用在单元上,当实际上有荷载作用在单元上时,则要按等效的原则把它们移置到结点上。

二、杆端力和杆端位移

作用在单元两端的力称为杆端力。在杆端力作用下单元发生变形,杆端因变形而产生的位移就称为杆端位移。

一般情况下,单元每端有三个位移分量,即沿轴向的位移、竖向的位移和转角。单元两端共有六个位移分量。这六个位移分量统一用单元杆端位移向量 $\delta^{(e)}$ 来表示:

$$\delta^{(e)} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\} \quad (1.1.1)$$

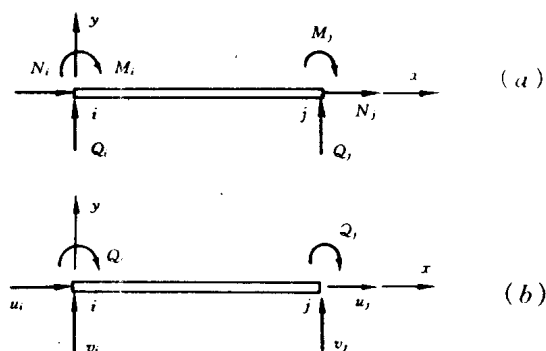


图 1.1.1

与杆端位移对应的杆端力则用 $F^{(e)}$ 来表示：

$$F^{(e)} = \{N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j\} \quad (1.1.2)$$

杆端力向量和杆端位移向量就是今后矩阵分析计算的主要计算对象。

三、坐标系

在矩阵分析计算中需要两类坐标系：一类是与单元联系在一起的单元坐标系。用它来描述单元的变形和内力，用符号 xoy 表示。另一类是不随单元的方向变化而独立存在的整体坐标系，用它来描述结构整体的变形和受力如结点位移、结点力等，用符号 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 表示。图 1.1.2 表示了结构的两种坐标。

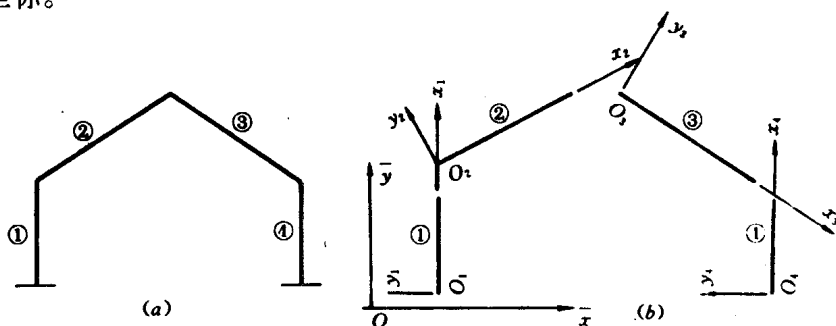


图 1.1.2

在杆单元中，单元坐标系 x 轴与杆轴重合， y 轴与杆横截面上的一个主轴重合，坐标原点放在单元左端 i 点上。

作用在单元上的杆端力可以有不同方向的分量。沿单元坐标轴方向的杆端力，实际上就是传统意义上的内力——轴力、剪力和弯矩(图 1.1.3)。轴力和剪力沿单元坐标系的 x 方向和 y 方向，弯矩矢量是沿 z 方向的。所以以后提到通常意义上的内力就是单元坐标系表示的杆端力。

单元坐标系表示的杆端力向量可写作：

$$F^{(e)} = \{N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j\}$$

整体坐标系表示的杆端力则是沿整体坐标系方向的(图 1.1.4)，它与通常意义上所说的

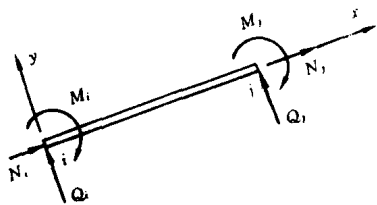


图 1.1.3

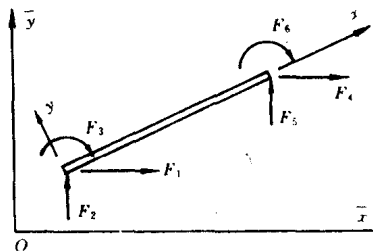


图 1.1.4

“内力”并不完全相同。整体坐标系表示的杆端力向量可表示为：

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6\}$$

杆端位移和杆端力是一一对应的，方向也相互一致。杆端位移也有用整体坐标表示和用单元坐标表示的区别。单元坐标表示的杆端位移用 $\delta^{(e)}$ 表示：

$$\delta^{(e)} = \{u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j\}$$

而整体坐标表示的杆端位移用 $\bar{\delta}^{(e)}$ 表示：

$$\bar{\delta}^{(e)} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6\}$$

杆端力和杆端位移的正负符号都是以和坐标轴的正方向一致者为正，反之为负；力矩和转角以绕杆端顺时针转为正，反之为负。

§ 1-2 单元刚度矩阵

1. 单元刚度方程

设一单元 ij ，其 i 端作用杆端力 F_i ， j 端作用杆端力 F_j 。同时，两端分别产生杆端位移 δ_i 和 δ_j 。则杆端力与杆端位移之间的变换关系为：

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \delta^{(e)} \quad (1.2.1)$$

此方程称为单元的单元刚度方程。

其中： $\mathbf{F}^{(e)} = \{F_i \ F_j\}$ ——单元的杆端力向量；

$\delta^{(e)} = \{\delta_i \ \delta_j\}$ ——单元的杆端位移向量；

$\mathbf{K}^{(e)}$ ——单元刚度矩阵。

单元刚度方程给出了单元杆端力与杆端位移之间的变换关系。对于不同的受力性质的单元，其杆端力 F_i 和 F_j 的内容是不同的。但对于杆单元，每个单元只有两个杆端。如果把公式 (1.2.1) 展开，就得到杆单元的单元刚度方程所具有的共同形式

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.2.1a)$$

其中，单元刚度矩阵分解为四个子块 K_{ii} ， K_{ij} ， K_{ji} ， K_{jj} 。每个子块都具有具体的物理意义，例如， K_{ij} 表示当单元 j 端产生单位位移 $\delta_j = 1$ 时引起的 i 端的杆端力，其余子块的意义类推。每个子块均为一方阵，其阶数视杆端位移数而定。单元刚度矩阵中的每一元素称为刚度系数。由

反力互等定理, 单元刚度矩阵中的元素存在对称相等的关系, 即

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (1.2.2)$$

即单元刚度矩阵是对称方阵。

单元刚度方程的建立, 一般是用解微分方程的办法。但对于杆单元, 由于杆端力和杆端位移之间的关系在结构力学中已经讨论得很清楚, 我们可以直接利用结构力学中现成的公式来建立单元刚度矩阵, 而不必解微分方程。对于连续体单元, 则没有现成公式可以利用, 只有用求解微分方程的办法来建立。这就是有限单元法所要讨论的问题。

2. 平面桁架单元

设一平面桁架单元如图 1.2.1 所示。

杆端力只有轴力:

$$\delta_i = N_i \quad \delta_j = N_j$$

当 i 端沿 x 方向产生位移 u_i , 而 j 端不动时, 则杆端力可由材料力学公式得到:

$$N_i = \frac{EA}{l} u_i \quad N_j = -\frac{EA}{l} u_i$$

式中 E ——材料的弹性模量;

A ——单元的横截面积;

l ——单元长度。

式中负号表示杆端力 N_j 的方向与 x 方向相反。

同理, 若 i 端不动, j 端产生沿 x 方向

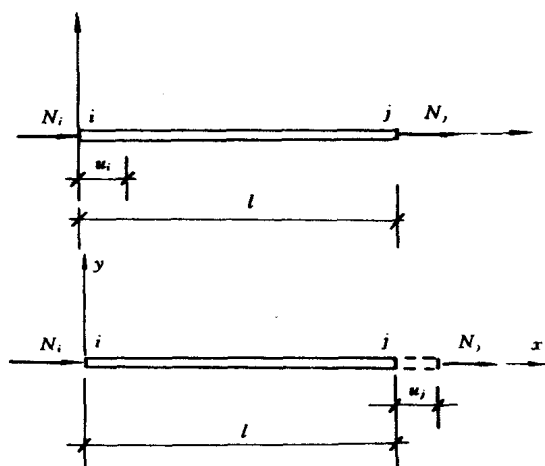


图 1.2.1

的位移 u_j , 则引起的杆端力为:

$$N_i = -\frac{EA}{l} u_j \quad N_j = \frac{EA}{l} u_j$$

把上述四个方程合并写成矩阵形式即:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1.2.3)$$

或

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)} \quad (1.2.4)$$

这就是平面桁架单元的单元刚度方程。其中:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \{N_i, N_j\} \quad (1.2.5a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \{u_i, u_j\} \quad (1.2.5b)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

若考虑到平面桁架结点位移有 x, y 两个方向的分量, 则单元杆端位移也应考虑 x, y 方向的分量。对应地, 杆端力不仅只考虑 x 方向的分量, 也应考虑 y 方向的分量, 尽管它总是为零的。所以, 这时杆端力向量和杆端位移向量都应为四阶, 即

$$\mathbf{F}^{(e)} = \{N_i, 0, N_j, 0\} \quad (1.2.7a)$$

$$\delta^{(e)} = \{u_i \ 0 \ u_j \ 0\} \quad (1.2.7b)$$

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

公式(1.2.8)就是实际上采用的平面桁架的单元刚度矩阵。

可以看出,矩阵的第一列元素表示当第一号位移,即*i*端沿*x*方向的位移 $u_i = 1$ 时引起的各杆端力。第二列元素表示第二号位移,即*i*端沿*y*方向的位移为一单位时引起的各杆端力。显然,相对于单元坐标而言,此杆端力均为零。第三、四列元素则为*j*端对应的杆端力。

3. 平面刚架单元

平面刚架单元的杆端力每端均有三个分量,即沿单元坐标*x*方向和*y*方向的力 F_1, F_2 和弯矩 F_3 。通常,在*i*端的杆端力表示为:

$$F_1 = N_i \quad F_2 = Q_i \quad F_3 = M_i$$

在*j*端的杆端力表示为:

$$F_4 = N_j \quad F_5 = Q_j \quad F_6 = M_j$$

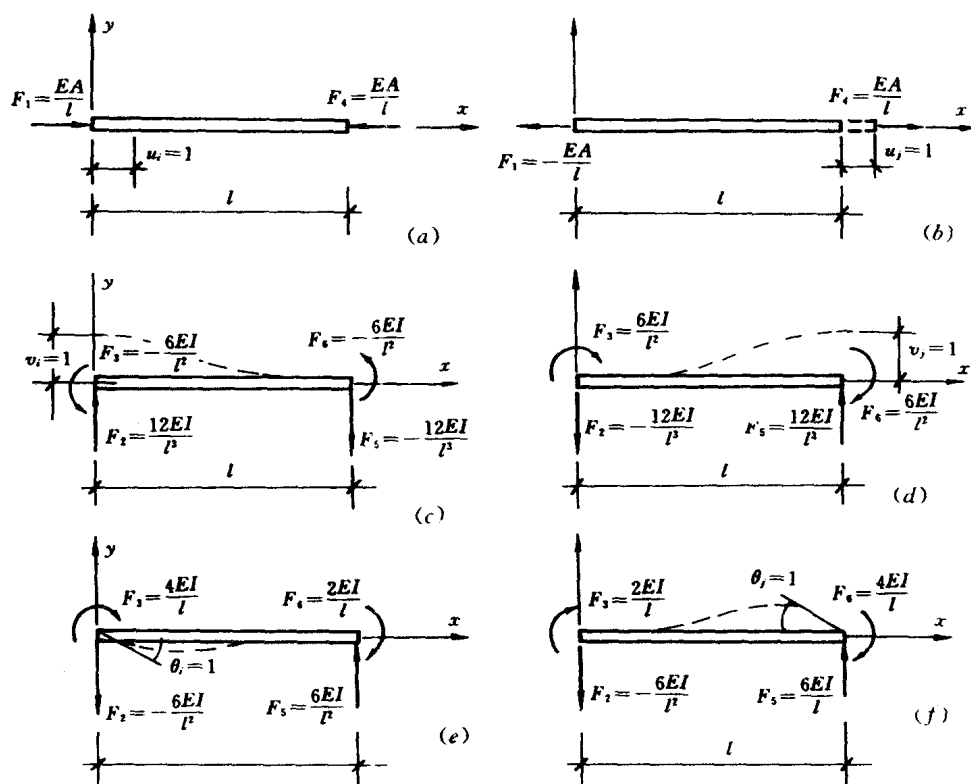


图 1.2.2

把两端的杆端力合并写成杆端力向量形式即：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(e)} &= \{\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j\} \\ &= \{N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j\} \end{aligned} \quad (1.2.9a)$$

同理，杆端位移也存在与此对应的 6 个分量即 i, j 两端的位移和转角。所以杆端位移向量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^{(e)} &= \{\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_j\} \\ &= \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\} \end{aligned} \quad (1.2.9b)$$

与此对应的单元刚度方程为：

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)} \quad (1.2.10)$$

其中，单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(e)}$ 为 6×6 阶方阵。矩阵中的各元素可以用结构力学的现成公式来表示。

图 1.2.2 中 6 个图表示了 6 个杆端力分别为一单位时所产生的杆端力。图(a)表示 $u_i = 1$ 时所引起的杆端力，按照单元刚度矩阵的物理意义，这些杆端力应排在矩阵中的第一列。图(b)表示当 $v_i = 1$ 时引起的杆端力，它们应排在第二列。其余照此类推。

$$\begin{aligned} &u_i = 1 \quad v_i = 1 \quad \theta_i = 1 \quad u_j = 1 \quad v_j = 1 \quad \theta_j = 1 \\ \mathbf{K}^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

元素的正负号规则是：力的方向与坐标轴方向一致者为正，反之为负；弯矩以绕截面顺时针方向为正，反之为负。位移的正负号规则与此相同。

有时候，某些刚架内部不完全都是刚性结点，而带有铰结点。如图 1.2.3 所示。这时就会出现一端刚接一端铰接的单元。如图 1.2.3(b)。

对于这样的单元，其铰接端只有两个位移需要计算，铰接端的角位移可以不予考虑。这是因为结构力学中已经导出一端刚接一端铰接杆的刚度系数了。

图 1.2.4 给出在单位位移作用下杆端力的表达式。a) b) c) 图中的杆端力就构成单元刚度矩阵公式(1.2.12)中的第二、第三和第五列的元素。

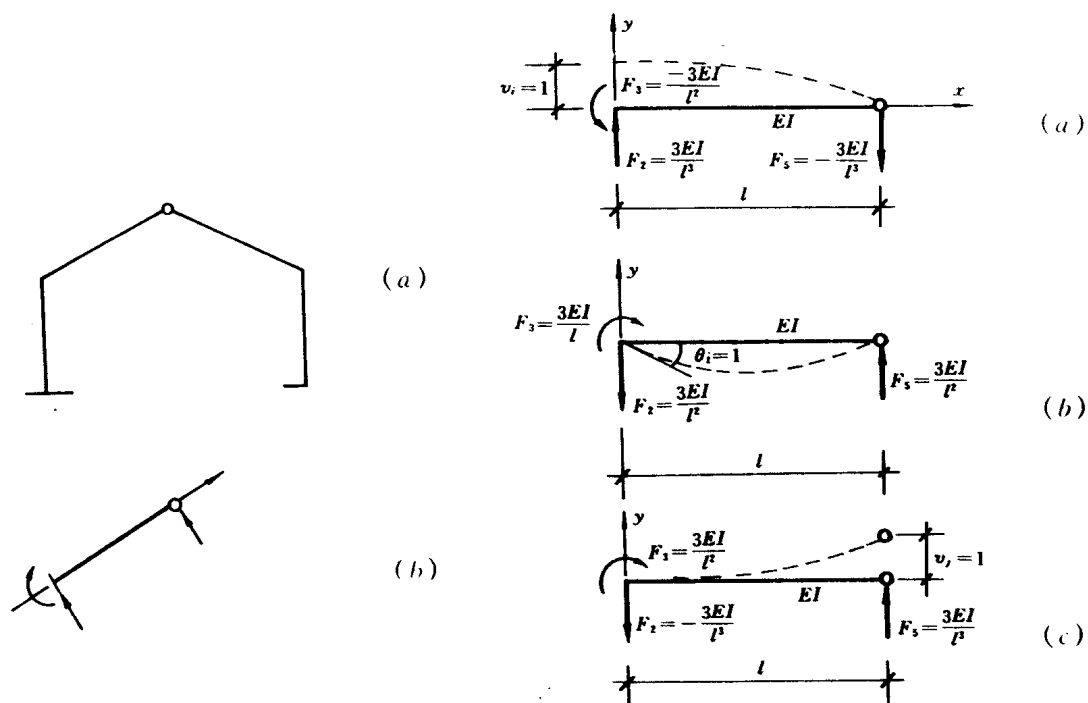


图 1.2.3

图 1.2.4

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

同理,若单元 \$i\$ 端为铰结 \$j\$ 端刚结,则其单元刚度矩阵为公式 1.2.13 所示。

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

4. 带刚域的平面刚架单元

当剪力墙上洞口的尺寸比较大,而横梁的线刚度与墙肢的线刚度接近时,若剪力墙产生侧向位移则横梁和墙肢变形将出现反弯点,这样整个剪力墙的变形及受力状态已接近于刚架。但这种大孔口剪力墙“杆件”截面尺寸比较大,横梁与墙肢交接处形成一个刚度很大的区域,称

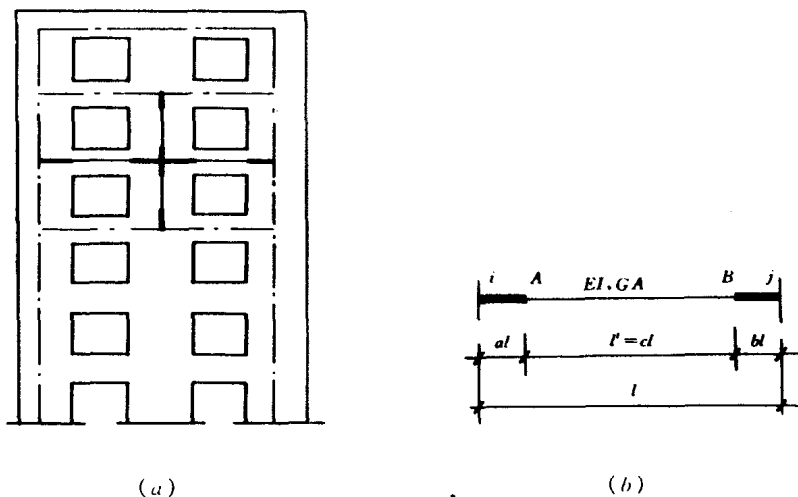


图 1.2.5

为刚域。这样的剪力墙常称为“壁式框架”。从壁式框架上截取一单元(图 1.2.5(b)),称为带刚域的杆单元。单元各部分的尺寸的取法请参阅有关高层结构计算的书籍,本书不作讨论。

无论是墙肢单元还是横梁单元,由于截面高度均比较大,单元的剪切变形将显得十分重要。此外,刚域的长度也是一个重要的影响因素。推导带刚域单元的单元刚度矩阵时,必须考虑这两个因素。

(1) 考虑剪切变形时的单元刚度矩阵

设一简支梁 A 端受一力偶作用如图 1.2.6 所示,现求其截面转角 θ_{1A} 、 θ_{1B} 。这可根据位移计算公式用图乘法求出。

$$\begin{aligned}\theta_{1A} &= \int \frac{\overline{M}M_p}{EI} dx + \int \frac{\mu \overline{Q}Q_p}{GA} dx \\ &= \left(\frac{l_1}{3EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1A}\end{aligned}$$

同理

$$\theta_{1B} = \left(-\frac{l_1}{6EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1A}$$

若在 B 端作用 M_{1B} ,同样可以求出类似结果,若同时在 A、B 端分别作用 M_{1A} 和 M_{1B} 则其转角 θ_{1A} 、 θ_{1B} 可由叠加原理求出。

$$\begin{cases} \theta_{1A} = \left(\frac{l_1}{3EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1A} + \left(-\frac{l_1}{6EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1B} \\ \theta_{1B} = \left(-\frac{l_1}{6EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1A} + \left(\frac{l_1}{3EI} + \frac{\mu}{GA l_1} \right) M_{1B} \end{cases} \quad (1.2.14)$$

由此方程可解出杆端力 M_{1B} 和 M_{1A} :

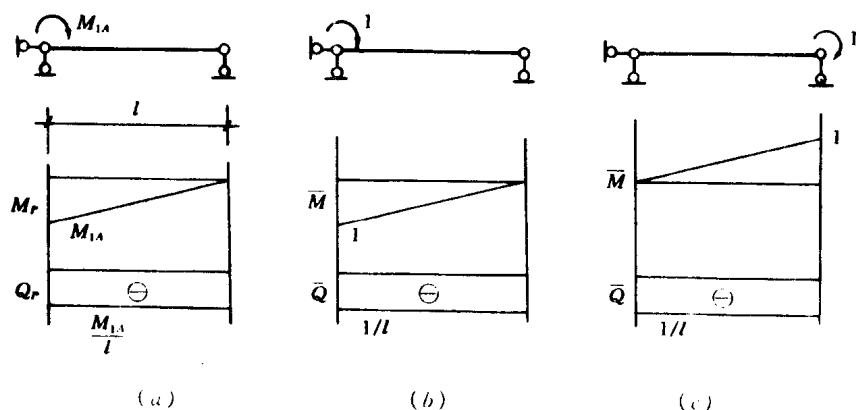


图 1.2.6

$$\left. \begin{aligned} M_{1A} &= \frac{1}{1+\beta} \left[(4+\beta) \frac{EI}{l_1} \theta_{1A} + (2-\beta) \frac{EI}{l_1} \theta_{1B} \right] \\ M_{1B} &= \frac{1}{1+\beta} \left[(2-\beta) \frac{EI}{l_1} \theta_{1A} + (4+\beta) \frac{EI}{l_1} \theta_{1B} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.15)$$

式中

$$\beta = \frac{12\mu EI}{GA l_1^2} \quad (1.2.16)$$

上列公式给出了杆端位移 θ_{1A} 、 θ_{1B} 引起的杆端力 M_{1A} 、 M_{1B} 的计算公式,即刚度方程,但这里仅仅只考虑了转角与弯矩之间的关系。还需要考虑杆端线位移 v_{1A} 、 v_{1B} 所引起的弯矩。

为了求杆端产生 v_{1B} 所引起的弯矩时,可直接应用上式,先使杆 AB 变形到 AB' 位置(图 1.2.7 中虚线直线所示)。这时杆产生弦转角 $\Psi_{AB} = \frac{v_{1B}}{l_1}$,再令 A 端顺时针转 $\theta_{1A} = \Psi_{AB} = \frac{v_{1B}}{l_1}$,B 端也转同样角度 $\theta_{1B} = \frac{v_{1B}}{l_1}$ 如图 1.2.7 中虚线所示。这

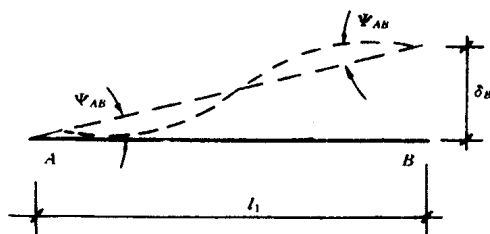


图 1.2.7

条虚线也就是产生 v_{1B} 时的变形曲线。这时产生的弯矩 M_{1A} 、 M_{1B} 只要将 $\theta_{1A} = \theta_{1B} = \frac{v_{1B}}{l_1}$ 代入公式(1.2.15)即可求出:

$$\left. \begin{aligned} M_{1A} &= \frac{6}{1+\beta} \frac{EI}{l_1^2} v_{1B} \\ M_{1B} &= \frac{6}{1+\beta} \frac{EI}{l_1^2} v_{1A} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.17)$$

把公式(1.2.15)和(1.2.17)叠加,就获得由杆端位移 θ_{1A} 、 θ_{1B} 、 v_{1A} 、 v_{1B} 共同作用下的杆端弯矩 M_{1A} 、 M_{1B} 。

$$\left. \begin{aligned} M_{1A} &= \frac{1}{1+\beta} [(4+\beta)i_1\theta_{1A} + (2-\beta)i_1\theta_{1B} + 6\frac{i_1}{l_1}(v_{1B} - v_{1A})] \\ M_{1B} &= \frac{1}{1+\beta} [(2-\beta)i_1\theta_{1A} + (4+\beta)i_1\theta_{1B} + 6\frac{i_1}{l_1}(v_{1B} - v_{1A})] \end{aligned} \right\} \quad (1.2.18)$$

式中:

$$i_1 = \frac{EI}{l_1} \quad (1.2.18a)$$

杆端剪力可根据平衡条件由 M 求得:

$$Q_{1A} = -Q_{1B} = -\frac{M_{1A} + M_{1B}}{l_1} \quad (1.2.19)$$

其具体表达式不再赘述。轴力则与普通单元相同。

将上述公式排列成矩阵形式即为

$$\begin{Bmatrix} N_{1A} \\ Q_{1A} \\ M_{1A} \\ N_{1B} \\ Q_{1B} \\ M_{1B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & & & & & \\ & 0 & \frac{12}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1^2} & & & \\ & & -\frac{6}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1} & \frac{4+\beta}{1+\beta} i_1 & & \\ -\frac{EA}{l_1} & & 0 & 0 & \frac{EA}{l_1} & \\ & 0 & -\frac{12}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1^2} & \frac{6}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1} & 0 & \frac{12}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1^2} \\ & 0 & -\frac{6}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1} & \frac{2-\beta}{1+\beta} i_1 & 0 & \frac{6}{1+\beta} \frac{i_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1A} \\ v_{1A} \\ \theta_{1A} \\ u_{1B} \\ v_{1B} \\ \theta_{1B} \end{Bmatrix} \quad \text{对称} \quad (1.2.20)$$

或写作

$$F_1^{(e)} = K_1^{(e)} \delta_1^{(e)} \quad (1.2.20a)$$

其中: 矩阵 $K_1^{(e)}$ 就是单元两刚域之间的梁段, 考虑了剪切变形后的单元刚度矩阵。

可以看出, 系数 β 就反映了剪切变形的影响。若忽略剪切变形, 即令 $\beta = 0$, 则上式将蜕变为公式(1.2.11)。

(2) 刚域的影响

由于单元两端有一段弯曲刚度为无穷大的刚域, 故单元的变形与普通单元有所不同。图 1.2.8 所示单元, 当 i 端产生 $\theta_i = 1$ 时, 刚域 $i-A$ 之间的位移变换关系为:

$$\begin{aligned} u_A &= u_i \\ v_A &= v_i - al\theta_i \\ \theta_A &= \theta_i \end{aligned}$$

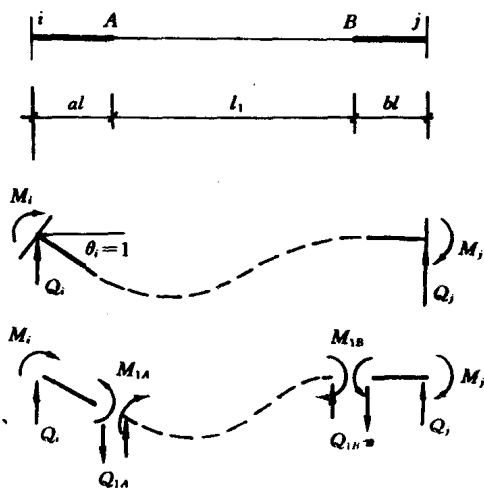


图 1.2.8

$$\begin{aligned}u_B &= u_j \\v_B &= v_j + bl\theta_j \\\theta_B &= \theta_j\end{aligned}$$

写成矩阵形式则有:

$$\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -al & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & bl \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (1.2.21)$$

或

$$\delta_i^{(e)} = G\delta_j^{(e)} \quad (1.2.21a)$$

其中: G ——刚域位移变换矩阵。

再考查此时刚域两端内力之间的变换关系则有:

$$\begin{aligned}N_i &= N_{1A} \\Q_i &= Q_{1A} \\M_i &= M_{1A} - Q_{1A} \cdot al \\N_j &= N_{1B} \\Q_j &= Q_{1B} \\M_j &= M_{1B} + Q_{1B} \cdot bl\end{aligned}$$

写成矩阵形式则有:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -al & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bl & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{1A} \\ Q_{1A} \\ M_{1A} \\ N_{1B} \\ Q_{1B} \\ M_{1B} \end{Bmatrix} \quad (1.2.22)$$

比较公式(1.2.21) 和(1.2.22) 可以看出, 力的变换矩阵与位移变换矩阵恰好互为转置矩阵, 故可写作:

$$F_j^{(e)} = G^T F_i^{(e)} \quad (1.2.22a)$$

(3) 带刚域刚架单元的单元刚度矩阵

将公式(1.2.21a) 代入公式(1.2.20a), 然后再代入公式(1.2.22a) 则得:

$$F_j^{(e)} = G^T K_1^{(e)} G \delta_i^{(e)} \quad (1.2.23)$$

或

$$F_i^{(e)} = K^{(e)} \delta_i^{(e)} \quad (1.2.23a)$$

故考虑两端带刚域的刚架单元的单元刚度矩阵为:

$$K^{(e)} = G^T K_1^{(e)} G \quad (1.2.24)$$