

金融市场的统计分析

张尧庭 编著

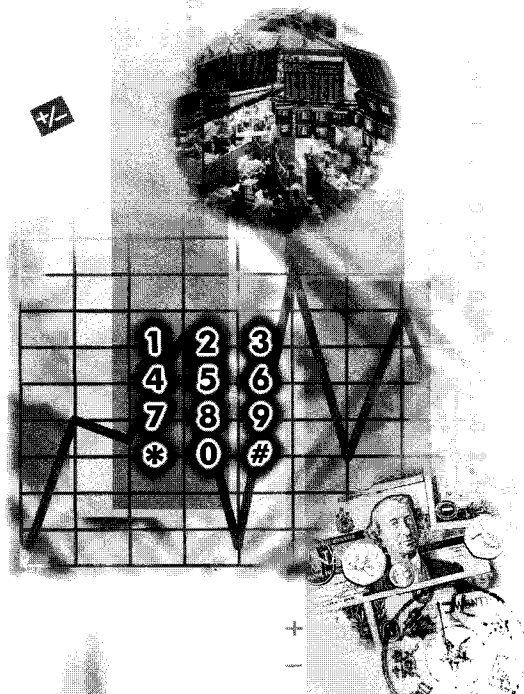
广西师范大学出版社

统计与信息丛书

Statistics and Analysis of Money Market

金融市场的统计分析

张尧庭 编著
By Zhang Yaoting



广西师范大学出版社
Guangxi Normal University Press

金融市场的统计分析

张尧庭 编著

责任编辑:余鑫晖

封面设计:张 明 涂灵策

广西师范大学出版社出版发行

邮政编码:541001

(广西桂林市中华路 36 号)

桂林市印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32

印张:4.625

字数:116 字

1998 年 11 月第 1 版

1998 年 11 月第 1 次印刷

印数:0001—2000 册

ISBN7-5633-2752-5/O·029

定价:(精)10.00 元

出 版 说 明

即将到来的 21 世纪是一个信息的时代,掌握信息、了解信息、处理信息是企业、政府、个人必须面对的问题,信息处理中统计方法是十分重要的,因此我们出版这一套《应用统计与信息丛书》,来推动这一方面的发展.

我们聘请了国内统计与信息方面的著名专家,撰写一系列的著作,结合国内实际,介绍国外的动向,发挥自己的专长,就一个个主题作深入浅出的讨论,既能使广大的读者受益,又有相当的学术水平,把我国的应用统计与信息处理推向一个新的高峰.

希望这套丛书的出版能受到读者的欢迎。

广西师范大学出版社

1998 年 8 月

序 言

随着金融市场的兴起,对金融市场的数据进行统计分析就自然应运而生.国外在这一方面已有几十年的历史.然而我国的金融市场,解放后停滞了几十年,改革开放之后到近十年才有发展,这些工作也逐渐被人关注,一些技术分析的书就很受青睐.从国外的发展来看,由于计算机的出现,人们处理数据、信息的能力大大提高,因此迫切需要能够及时处理大量数据的技术,促进金融事业的发展,于是把一些近代的统计方法用于金融市场的实证分析技术就陆续出现,先是零散的论文,近年来就有一些专门的著作.

随着国内金融事业的发展,证券市场、金融风险已成为居民的日常用语,很需要有一本对大专学生、研究生和研究人员介绍这一方面的书籍,可以很快进入这一领域.我自己这几年看了一些材料,作了一些整理,希望填补这空白,使新的一代人可以较快地成长.

我编写这本书分三大块:统计准备知识,金融的数学模型,金融模型的统计分析.很明显,主体是第三块,前两部分是为第三部分服务的,如果对前两部分比较熟悉,就可以直接从第三章看起.因为我自己是统计方面的专业人员,所以第一章的写法是很有特点的,可以比较快地熟悉金融统计分析涉及的概念、方法和技巧,一些练习的安排也比较有意思.第二章并不是我熟悉的内容,所以无论从取材、写法以及举例,是否恰当,都可能有问题,我希望对不熟悉金融而数学有一定基础的人,通过第二章来了解金融中一些基本的数学问题是什么.第三章开始讨论对我国市场有实际意义的模型,而不是讨论期权,衍生产品的分析,也收集、反映了一些国

内外的数据,给予说明.目的是希望能引起这一类的研究.第四章讨论金融市场的有效性,这一内容国外有不少专门的论著,这里只是总汇一下一些常用的方法.第五章是金融风险的分析,主要是介绍国外的一些方法,希望对我们自己的状况分析能有帮助.

总之,这是一本尝试性的书,前后大约用了二年多的时间撰写.我必须感谢世界银行的邹恒甫研究员,他给我提供了不少国外较新的材料,使我这本书能反映一些现代的成果;我还须感谢复旦大学的张荫南教授,他提供了不少有关金融风险的材料,我才了解到这一方面的知识.当然,我没有广西师范大学出版社的帮助,这样一本学术性的书,是不容易出版的,出版社的余鑫晖同志一再鼓励,我才下决心来编写这样一本书.我真诚希望这本书的出版能对金融统计的介绍起一点积极的作用.欢迎大家对书中的错误来信批评、指正,使我能够有改正的机会.

张尧庭

1998年7月5日

符 号 说 明

我们用大写字母 A, B, C, X, Y 等等表示矩阵, 小写字母 a, b, c, x, y 等表示纯量或向量, 其大小写由上下文自明时, 一般不再注明.

A 矩阵的行列向量通常用

$$A = \begin{pmatrix} a'_{(1)} \\ \vdots \\ a'_{(n)} \end{pmatrix}_{n \times p} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p) = (a_{ij})$$

表示; A' 或 a' 表示矩阵或向量的转置; $|A|$ 表示 A 的行列式; I_p 表示 $p \times p$ 的单位矩阵; $\text{tr } A$ 表示 A 阵的迹, 即 $\text{tr } A = \sum_{i=1}^p a_{ii}$.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}_{n \times m \quad k \times l}.$$

积分符号“ $\int$ ”可以表示一重或多重, 视其跟随的 dx 是否为向量、矩阵而定, 不标明积分域就是在全空间积分.

其他通用的符号如 E 表示期望, Var 表示方差等就不一一说明了.

公式编号各章按节来记, 例如 (3.5) 是 § 3 的第 5 个公式. 引用别章节的公式时, 会说明这是第几章的公式, 引用本章的公式就不说明是第几章的公式了.

$A \triangleq B$ 表示用 B 来定义 A 或相反.

$A \stackrel{d}{=} B$ 表示 A 与 B 的分布相同.

目 录

第一章 统计基础.....	(1)
§ 1 多元正态分布的基本性质	(1)
§ 2 多元回归的一般结论	(7)
§ 3 相关性度量.....	(15)
§ 4 与正态分布有关的一些重要分布.....	(20)
§ 5 求渐近分布的标准方法.....	(26)
第二章 数学模型	(32)
§ 1 引言及基本知识.....	(32)
§ 2 资产定价模型(CAPM).....	(36)
§ 3 线性模型(MPM 与 APT).....	(45)
§ 4 Black-Scholes 公式	(50)
§ 5 其他模型	(57)
第三章 模型的统计分析	(63)
§ 1 CAPM 的统计分析	(63)
§ 2 多因子模型的统计分析.....	(70)
§ 3 B-S 公式的统计分析	(77)
§ 4 贝叶斯方法.....	(83)
第四章 金融市场的有效性	(92)
§ 1 有效性的定义.....	(92)
§ 2 传统方法.....	(94)

§ 3	不相关性的检验	(104)
§ 4	其他方法	(110)
§ 5	中国证券市场 EMH 的实证分析	(115)
第五章	金融风险的统计分析.....	(121)
§ 1	引言	(121)
§ 2	VaR 和 VaB	(122)
§ 3	组合投资的 VaR	(126)
§ 4	估计 σ 及预测 σ	(130)
§ 5	信用风险	(134)

第一章 统计基础

§ 1 多元正态分布的基本性质

多元正态分布是统计的基础,许多理论、方法都是从它出发的,许多复杂的问题最后往往又归结到多元正态,因此,对多元正态知识有一个较好的了解是掌握统计方法的前提.下面我们从定义出发,逐步导出有关的性质,注意我们的定义与推导有关性质的代数方法.

通常都用密度来定义多元正态分布, p 维随机向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ 的联合密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^p |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)} \quad (1.1)$$

时,我们称 $(x_1, \dots, x_p)$ 服从 p 维正态分布 $N(\mu, \Sigma)$, 简写为 $x \sim N(\mu, \Sigma)$. 但这样的定义有不方便之处:(1) 不能考虑退化的情形, Σ 必须是正定的;(2) 在推导很多性质时都需以(1.1)为出发点,这就比较麻烦.我们改用下面的方式给出定义,并且比较方便就可以导出有关的性质.

我们从一元的标准正态分布开始,逐步来导出有关的 p 维正态分布.

定义 1.1 随机变量 x 若其分布密度为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (1.2)$$

则称 x 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 或写成 $x \sim N(0,1)$.

容易证明, $x \sim N(0,1)$ 时, x 的特征函数

$$\varphi_x(t) = Ee^{ixt} = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1.3)$$

因此, 当 $x_1, \dots, x_p$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$ 时, 相应的联合密度为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^p e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p x_i^2}, \quad (1.4)$$

特征函数为: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix},$

$$\varphi_x(t) = Ee^{it'x} = e^{-t't/2} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p t_i^2}. \quad (1.5)$$

(1.4) 称为 p 维标准正态分布, (1.5) 是 p 维标准正态分布的特征函数.

从特征函数容易得到: 若 $x \sim N(0, I_p)$, 即 x 是 p 维标准正态, 则 x 的任一线性函数 $Ax + \mu$, 记它为 y 后, y 的特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi_y(t) &= Ee^{it'y} = Ee^{it'Ax + it'\mu} \\ &= Ee^{i(A't)'x} \cdot e^{it'\mu} = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'AA't}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

于是有定义 1.2.

定义 1.2 如果 y 的特征函数为 $e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$, 则称 y 服从多元正态分布 $N(\mu, \Sigma)$.

易见这一定义中, 只要求 $\Sigma \geq 0$ (非负定), 可以包含退化的情形, 并且立即有下面几个推论:

推论 1 若 $y \sim N(\mu, \Sigma)$, 则 $Ay + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A')$.

推论 2 若 $x \sim N(0, I_p)$, $\Sigma = \underset{n \times n}{A} \underset{n \times p}{A'} \underset{p \times n}{A'}$, 则当 $y \sim N(\mu, \Sigma)$ 时, y 与 $Ax + \mu$ 有相同的分布, 今后就简记为

$$y \stackrel{d}{=} Ax + \mu. \quad (1.7)$$

这告诉我们任何一个多元正态分布,都是由标准正态分布经线性变换得来的,所以有关的性质都可以由标准正态分布导出.

定义 1.3 设 $x \sim N(0, I_p)$, 则 $y = x'x = \sum_{i=1}^p x_i^2$ 就遵从 p 个自由度的 χ^2 分布, 记为 $\chi^2(p)$, 相应的密度函数可以证明为

$$\left[2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \right]^{-1} y^{\frac{p}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0. \quad (1.8)$$

从这个定义,马上可以得到

推论 3 设 $y \sim N(\mu, \Sigma)$, 且 $\Sigma > 0$, 则 y 的二次型 $Q = (y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu) \sim \chi^2(n)$.

这是因为令 $x = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(y - \mu)$ 后, 由于 $y - \mu \sim N(0, \Sigma)$, 所以 $x \sim N(0, I_n)$, 于是 $Q = x'x \sim \chi^2(n)$.

利用定义 1.2, 我们就可以得到独立与不相关的联系, 以及正态变量一次型与二次型相互独立的条件.

推论 4 若 $y \sim N(\mu, \Sigma)$, 则 $Ey = \mu$, y 的方差协差阵 $\text{Var}(y) = \Sigma$.

这只要对 y 的特征函数 $\varphi_y(t) = e^{it'\mu - \frac{1}{2}t'\Sigma t}$ 求一、二阶偏导数, 并在 $t=0$ 取值就可得到.

因此, 当 $y = \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix}_{n-p}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_{\substack{p \\ n-p}}^p$ 时, 若 $\Sigma_{12} = 0$, 则

$\varphi_y(t) = \varphi_{y_{(1)}}(t_{(1)}) \varphi_{y_{(2)}}(t_{(2)})$, $t = \begin{pmatrix} t_{(1)} \\ t_{(2)} \end{pmatrix}$, 也即 $y_{(1)}$ 与 $y_{(2)}$ 独立. 而

$\Sigma_{12} = \text{Cov}(y_{(1)}, y_{(2)})$, 因此, $y_{(1)}$ 与 $y_{(2)}$ 独立的充分必要条件是 $\Sigma_{12} = 0$. 这就证明了

推论 5 若 $y = \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix}$, $y \sim N(\mu, \Sigma)$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$, $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(y_{(i)}, y_{(j)})$, $i, j = 1, 2$, 则 $y_{(1)}$ 与 $y_{(2)}$ 独立的充

要条件是 $\Sigma_{12}=0$, 也即独立与不相关是等价的.

推论 6 若 $y \sim N(\mu, \Sigma)$, 则 $A'y$ 与 $B'y$ 独立的充要条件是 $A'\Sigma B=0$.

因为 $\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} y$ 仍然是正态分布, 而 $\text{Cov}(A'y, B'y) = A'\Sigma B$, 因此用推论 5 就得这个结论.

利用这些推论, 就可以导出条件分布、条件期望与条件方差.

因为当

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \right)$$

时, 考虑 $\Sigma_{xx} > 0$ 的情形, 此时 Σ_{xx}^{-1} 存在, 所以

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x \\ y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ -\Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \triangleq A' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

而 $\text{Cov}(x, z) = (I \ O) \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \\ I \end{bmatrix} = 0$, 因此 x 与 z 不相关, 也即相互独立, 也即 x 与 $y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x$ 是相互独立的. 注意到 (1.9) 式相应的变换, 其雅可比行列式是 1, 因此 (x, y) 的联合密度与 (x, z) 的联合密度的关系是

$$p(x, y) = f(x)g(z) = f(x)g(y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x), \quad (1.10)$$

其中 $p(x, y)$ 是 (x, y) 的联合密度, $f(x)$ 是 x 的密度, $g(z)$ 是 z 的密度. 从上式 (1.10) 就知道, y 对 x 的条件密度就是 $g(y - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}x)$, 它服从正态分布, 且

$$\begin{cases} E\{y|x\} = \mu_y + \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}(x - \mu_x), \\ \text{Var}\{y|x\} = \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}. \end{cases} \quad (1.11)$$

这样我们就得到

推论 7 若 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \right)$, 且 $\Sigma_{xx} > 0$, 则 y 对 x 的条件分布仍为正态, 相应的期望与方差是 (1.11).

推论 8 若 $x \sim N(0, \Sigma)$, $Q_1 = x'Ax$, $Q_2 = x'Bx$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, 则 Q_1, Q_2 独立的充分条件是 $A\Sigma B = 0$.

因为 A, B 分别可以表示为 $A = L'L$, $B = M'M$, 所以 $A\Sigma B = 0$ 时就有 $L'L\Sigma M'M = 0$, 也即 $L\Sigma M' = 0$. 用推论 6, 得到 Lx 与 Mx 相互独立. 于是 Lx 与 Mx 的函数也相互独立, 故 $Q_1 = (Lx)'Lx$, $Q_2 = (Mx)'Mx$ 彼此就应独立.

从推论 8 的证明中就得到

推论 9 若 $x \sim N(0, \Sigma)$, 则 Ax 与 $x'Bx$ ($B \geq 0$) 独立的充分条件是 $A\Sigma B = 0$.

以上的结果是一元统计中常用的. 还有两个重要的统计量, 它们是 t 与 F , 我们在这里用正态分布的函数来给出定义. 所以今后只要验证合于这一定义的, 它的分布就自然确定. 从我们的定义去导出分布密度, 一般的教科书上都可以找到, 所以就略去不给推导了. 为了今后应用的方便, 我们连非中心的分布, 也一起由定义给出.

定义 1.4 设 $y \sim N(a, I_n)$, 于是 $y'y$ 就是非中心 χ^2 统计量, 它的分布密度由 n 与非中心参数 $\lambda = \frac{1}{2}a'a$ 决定, 记为 $\chi^2(n, \lambda)$, n 称为自由度. 当 $a=0$ 时, 它就是中心 χ^2 分布, 或简称为 χ^2 分布, 记为 $\chi^2(n)$.

定义 1.5 设 $y \sim N(a, 1)$, $s^2 \sim \chi^2(n)$, 且 y 与 s^2 相互独立, 于是

$$t = y / \sqrt{s^2/n} \sim t(n, \lambda).$$

n 称为自由度, $\lambda = \frac{1}{2}a'a$ 是非中心参数, $t(n, \lambda)$ 称为非中心 t 分布.

当 $a=0$ 时, 用 $t(n)$ 表示, 称为 t 分布, 自由度为 n .

定义 1.6 设 $s_1^2 \sim \chi^2(n_1, \lambda_1)$, $s_2^2 \sim \chi^2(n_2, \lambda_2)$, 且 s_1^2 与 s_2^2 独立, 于是

$$F = (s_1^2/s_2^2)(n_2/n_1) \sim F(n_1, n_2; \lambda_1, \lambda_2)$$

称为双非中心 F 分布, n_1 是分子自由度, n_2 是分母自由度, λ_1 是分子非中心参数, λ_2 是分母非中心参数. 当 $\lambda_1 = 0$ 时, 称为非中心 F 分布, 用 $F(n_1, n_2; \lambda_2)$ 表示; 当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ 时, 简称为 F 分布, 用 $F(n_1, n_2)$ 表示.

与这相对应的, 在多元统计分析中也有以下一些重要的分布: Wishart 分布, T^2 分布, 与一些随机矩阵的分布, 以及这些矩阵特征根的分布. Wishart 分布相当于一元统计中的 χ^2 , T^2 相当于 t^2 , 今后我们常要引用的, 也就是这两个, 所以在这里给出定义和有关的一些结论, 有些结论读者可以仿照前面一元的方法来推导, 我们就留作练习.

定义 1.7 设 $x_1, \dots, x_n$ 是 $N(0, \underset{p \times p}{\Sigma})$ 的一个样本, 记 $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 于是

$$X'X \sim W_p(n, \Sigma),$$

即 $X'X$ 的分布是 Wishart 分布, 自由度为 n , Σ 是相应的协方差矩阵. 所谓 $X'X$ 的分布是指它的 $\frac{1}{2}p(p+1)$ 个矩阵元素的联合分布, 它的分布密度是: 记 $A = X'X = (a_{ij})$, 则 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}, a_{22}, \dots, a_{2p}, \dots, a_{p-1p}, a_{pp}$ 这 $\frac{1}{2}p(p+1)$ 个随机变量的联合密度为

$$\left[2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p}{2}(p-1)} \prod_{i=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \right]^{-1} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |A|^{\frac{n-p-1}{2}} e^{-\text{tr } A\Sigma}, A > 0, \quad (1.12)$$

其中 $A > 0$ 表示 a_{ij} 使 A 是正定阵的区域.

定义 1.8 设 $\underset{p \times 1}{x} \sim N(\mu, \Sigma)$, $A \sim W_p(n, \Sigma)$, 且 x 与 A 相互独立, 则

$$T^2(p, n, \mu) = nx' A^{-1} x$$

的函数

$$\frac{n-p+1}{np} T^2(p, n, \mu) \sim F(p, n-p+1, \lambda), \quad (1.13)$$

其中 λ 是非中心参数 $\lambda = \frac{1}{2} \mu' \Sigma^{-1} \mu$. 当 $\mu = 0$ 时, 就是中心的 F 分布, 因为此时 $\lambda = 0$, 也即 $H_0: \mu = 0$ 成立时,

$$\frac{n-p+1}{np} T^2(p, n, \mu) \sim F(p, n-p+1). \quad (1.14)$$

这个分布是今后要用的.

练 习 题

1. 设 $x \sim N(0, I_n)$, $Q_i = x' A_i x$, $i=1, 2$, A_1, A_2 均为对称阵, 问: $A_1 A_2 = 0$ 时, Q_1 与 Q_2 是否独立? (提示: 考虑 Q_i 的特征函数.)

2. 从 (1.13) 知道 $\frac{n-p+1}{np} T^2(p, n, \mu) \sim F(p, n-p+1, \lambda)$, 是否就可以推出 $t^2 \sim F(1, n, \lambda)$?

3. 设 $x \sim \chi^2(n)$, 求 $y = x^{-1}$ 的分布密度.

4. 设 $x \sim N(0, 1)$, 求出 Ex^k 的表达式, 将此结果推到 $y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一般情形; 再能否推广到 $z \sim N(\mu, \Sigma)$ 的一般情形?

5. 求 Wishart 分布相应的特征函数, 能否将练习题 1 的结论推广到矩阵二次型 $X' A_1 X$ 与 $X' A_2 X$, X 是多元标准正态 $N(0, I_n \otimes I_p)$.

§ 2 多元回归的一般结论

这一节回顾多元回归分析的一些重要结论, 读者应注意导出这些结论的证明方法, 其核心是投影与四块求逆公式.

多元回归的问题是这样的, 已知

$$\begin{cases} y = X \beta + \epsilon, & \text{rk } X = k, X \text{ 已知,} \\ \begin{matrix} n \times 1 & n \times k & k \times 1 & n \times 1 \end{matrix} & \\ E\epsilon = 0, \text{Var}(\epsilon) = \sigma^2 I, \end{cases} \quad (2.1)$$

要估计 β 及 σ^2 , 在 $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ 的假定之下, 讨论有关 β 的检验问题. 所以多元回归分为估计与检验两部分. 本节分三小段: 准备知

识,估计,检验.

2.1 准备知识

考虑欧氏空间 R_n 中子空间 $\mathcal{L}$, 我们用 $\mathcal{L}(A)$ 表示矩阵 A 列向量生成的线性空间, 即

$$\mathcal{L}(A) = \{ \underset{n \times m}{A} X \mid x \in R_m \},$$

用 P_A 表示在 $\mathcal{L}(A)$ 空间上的投影矩阵.

引理 2.1 $P_A = A(A'A)^{-1}A'$ ($\text{rk } A = k$).

证明 对 $y \in \mathcal{L}(A)$, 有 $y = Ax$, 而

$$A(A'A)^{-1}A'y = A(A'A)^{-1}A'Ax = Ax = y;$$

对 $y \perp \mathcal{L}(A)$, 即 $A'y = 0$, 则 $A(A'A)^{-1}A'y = 0$. 这就证明了 $P_A = A(A'A)^{-1}A'$.

引理 2.2 设 $A = (\underset{n \times m}{A_1} \underset{k \quad m-k}{A_2})$, $\text{rk } A_1 = k$, 则

$$\begin{pmatrix} A_1'A_1 & A_1'A_2 \\ A_2'A_1 & A_2'A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A_1'A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(A_1'A)^{-1}A_1'A_2 \\ I \end{pmatrix}.$$

$$(A_2'A_2 - A_2'A_1(A_1'A_1)^{-1}A_1'A_2)^{-1}(-A_2'A_1(A_1'A_1)^{-1} \quad I). \quad (2.2)$$

引理 2.2 给出了引理 2.1 中 $(A'A)^{-1}$ 的一种表示法, 它反映了 P_A 与 P_{A_1} 的关系. 引理 2.2 的证明只要直接验证 (2.2) 式右端确实是 $\begin{pmatrix} A_1'A_1 & A_1'A_2 \\ A_2'A_1 & A_2'A_2 \end{pmatrix}$ 的逆. (2.2) 式称为四块求逆公式. 从四块求逆公式可以导出许多有用的公式, 我们都留作练习, 不在这里一一列举了, 但有一个特例是常用的, 写在下面.

例 2.1 考虑 $A = (\underset{n \times m}{\mathbb{1}} \underset{n \times 1 \quad n \times (m-1)}{X})$, $\mathbb{1}$ 为坐标全为 1 的向量. 令

$\bar{x} = \frac{1}{n}X'\mathbb{1}$, 用 (2.2) 式就得到

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}'\mathbb{1} & \mathbb{1}'X \\ X'\mathbb{1} & X'X \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} n & n\bar{x}' \\ n\bar{x} & X'X \end{pmatrix}^{-1}$$