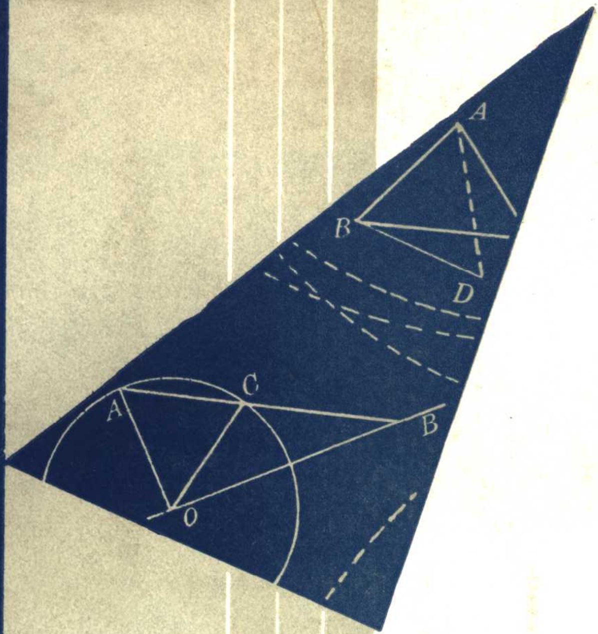



# 平面三角解证方法与技巧

郭锡洁

# 平面三角解证方法与技巧

郭锡洁 编

河南人民出版社

**平面三角解证方法与技巧**

郭锡洁　编

责任编辑　温光

河 南 人 民 出 版 社 出 版

河南省焦作市印刷厂印刷

河 南 省 新 华 书 店 发 行

787×1092毫米32开本　19.25印张　412千字

1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷

印数：1—17,000册

统一书号 7105·238　定价 1.40 元

# 前　言

本书是一本半工具性的“平面三角学”参考读物。本书按内容提要、例题、习题（附答案或提示）顺序编写。在“提要”中，“平面三角学”的有关概念、定理、公式和基本变换的提出，力求作到系统完备、简明扼要，并特别注重科学分类，以便于读者查用；关于典型方法和技巧，则通过例题作出示范；本书的习题均经认真精选，具有相当的典型性和代表性。

本书关于“平面三角学”的基本方法和技巧材料比较丰富全面，写法上注意循序渐进、深入浅出，并具有论证严谨，解题思路清新、方法巧妙等特点，部分章节可在课堂中直接引用，或作为参加数学竞赛的辅导材料。本书适于中学生、中学数学教师及“平面三角”自学者参考使用。

本书编写过程中曾受到多方面的帮助：1978年初，由于河南省数学研究所韩文法所长与陈海川老师启发开始编写，他们除了对我在写作上给予指导外，还向我提供了许多宝贵资料；初稿完成后，又承白学岭、谢景安、张绍兰三同志阅读全稿，提出了许多宝贵意见；书中部分材料，我曾在郑州师专“初等数学复习与研究”课程中作为讲稿，得到过仝允潮、马自力两位老师帮助指导；最后郑州师专数学专业七八届贾兆庆、孙全民等同学帮我作了许多技术性工作；没有这些帮助是不可能有这本书的，谨此，深致谢意。

本人学识浅薄，谬误之处，尚请读者多加指正。

**编　者**

1981年“5.1”节于郑州

# 目　录

# 第一章　任意角的三角函数

## 第一节　任意角与角的度量

**一、内容提要**

1.1周角$=360°$，$1°=60'$，$1'=60''$。

2.$180°=\pi$弧度。

3.$1°=\frac{\pi}{180}$弧度$\approx 0.01745$弧度。

4.1 弧度$=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''$。

5.设 $l$ 表示弧长，$R$ 表示圆的半径，$\alpha$ 表示 $l$ 所对的圆心角的弧度数。那么

$$l=\alpha R.$$

**二、例题**

1.求时钟 2 时半的时候，两针所夹的角的弧度数与角度数。

**解**　(1) 选 2 时整为时针与分针的起始点，那么，从 2 时到 2 时半，长针由12旋转到 6 处，走过了

$$\frac{360°}{12}\cdot 6=180°.$$

而短针由 2 旋转到 2 与 3 之间的某处，只走过了

$$\frac{360^\circ}{12}\cdot\frac{1}{2}=15^\circ.$$

因此，两针的夹角为

$$180^\circ-\left(15^\circ+2\cdot\frac{360^\circ}{12}\right)=105^\circ.$$

（2）化为弧度

$$105^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{7\pi}{12}\text{（弧度）}.$$

答：两针的夹角为$105^\circ$或$\frac{7\pi}{12}$弧度.

**2.** 求时钟在 2 时34分56秒时两针的夹角.

解 （1）选取12时处作时针和分针的起始点，分针从12时处旋转到34分56秒处，走过的角度为

$$\frac{360^\circ}{60}\left(34+\frac{56}{60}\right).$$

由于时针旋转的速度是分针的$\frac{1}{12}$，因此，时针从 2 时处起，旋转到 2 时34分56秒处共走过的角度为

$$\frac{360^\circ}{60}\left(34+\frac{56}{60}\right)\cdot\frac{1}{12}.$$

两针夹角为

$$\frac{360^\circ}{60}\left(34+\frac{56}{60}\right)-\left[\frac{360^\circ}{60}\left(34+\frac{56}{60}\right)\cdot\frac{1}{12}+60^\circ\right]$$

$$=6^\circ\left(34+\frac{56}{60}\right)\left(1-\frac{1}{12}\right)-60^\circ\approx132^\circ8'.$$

（2）化为弧度

$$132°8' = 57°17' + 74°51'$$

$$= 2 \cdot 57°17' + 17°34' \approx 2.3062（弧度）.$$

答：两针的夹角为$132°8'$或$2.3062$弧度.

**3**.时钟的两针在5点到7点20分之间各旋转了多少度？

解　分针共旋转

$$360°\left(2+\frac{20}{60}\right)=840°;$$

时针共旋转

$$360°\left(2+\frac{20}{60}\right)\cdot\frac{1}{12}=70°.$$

答：分针旋转$840°$，时针旋转$70°$.

**4**.已知圆的半径为10cm．求$36°$圆心角所对的弧长.

解　由$36°=\frac{\pi}{5}$（弧度）所以

$$l=\alpha R=10\cdot\frac{\pi}{5}=2\pi\approx 6.28(\mathrm{cm}).$$

答：$36°$圆心角所对的弧长约6.28cm.

**5**.某齿轮的半径为20cm，每分钟转120周，求(1)齿轮的角速度；(2)齿轮圆周上任意一点的线速度.

解　(1) $w=2\pi\cdot\frac{120}{60}=4\pi$（弧度/秒）；

(2) $v=wR=80\pi$（厘米/秒）.

答：角速度为$4\pi$弧度/秒，线速度为$80\pi$厘米/秒.

**6**.已知两个皮带轮的半径分别为$r=30\mathrm{cm}$、$R=60\mathrm{cm}$，中心距为200cm，求皮带的长.

**解** 如图1-1，设$A$、$B$、$A'$、$B'$四点为切点，$O$、$O'$为圆心，连结$O'A$、$O'A'$、$OB$、$OB'$，过$O'$作$O'C \parallel AB$得矩形$AO'CB$。则

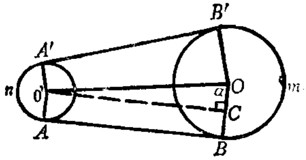



图 1-1

$O'C=AB$，$\angle O'CB=90°$。

在$Rt\triangle OO'C$中，$OC=R-r=60-30=30$，又$OO'=200$，设$\angle COO'=\alpha$，则

$$\cos\alpha=\frac{OC}{OO'}=\frac{30}{200}=0.15.$$

且 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{391}}{3}$. 查表得

$$\alpha \approx 81°22' \approx 1.420\text{弧度}.$$

$\overset{\frown}{BmB'}$的弧度数为

$$\frac{\pi}{180°}(360°-81°22'\cdot 2)=\frac{\pi}{180°}\cdot 197°16'$$

$$\approx 3.4428(\text{弧度}).$$

$\overset{\frown}{BmB'}$的弧长为

$$3.4428\cdot 60=206.6(\mathrm{cm}).$$

$\overset{\frown}{AnA'}$的弧度数为

$$81°22'\cdot 2\cdot\frac{\pi}{180°}\approx 2.8402(\text{弧度}).$$

$\overset{\frown}{AnA'}$的弧长为

$$2.8402\cdot 30=85.2(\mathrm{cm}).$$

又$AB=A'B'=O'C=OC\mathrm{tg}\alpha=30\cdot\mathrm{tg}\alpha\approx 197.7(\mathrm{cm})$.

因此，皮带长为

$$\overset{\frown}{BmB'}+AB+\overset{\frown}{AnA'}+A'B'$$

$$=206.6+85.2+197.7\cdot 2=687.2(\text{cm}).$$

答：皮带长为687.2cm。

7.已知两个皮带轮的半径之和为 $b$，两个皮带轮的圆心距为$2b$，今以皮带交叉紧联之，求皮带的长。

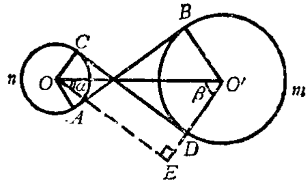



图 1-2

解 如图 1-2，已知两轮的圆心距$OO'=2b$，两半径之和$OA+O'B=b$。

设$A$、$B$、$C$、$D$为切点，$AB$、$CD$为两圆的内公切线，过$O$作$OE\perp O'D$，$E$为垂足．则

$$OE=CD,\ DE=OC,$$

$$\therefore\quad O'E=O'D+DE=b.$$

在$Rt\triangle OEO'$中，$\sin\alpha=\dfrac{b}{2b}=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\alpha=30^\circ \quad 即 \quad \beta=60^\circ.$$

又$OE=2b\cos30^\circ=\sqrt{3}\,b$，所以

$$AB=CD=\sqrt{3}\,b.$$

由$\angle BO'D=120^\circ$，所以

$$\overset{\frown}{BmD}的弧度数=240^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{4\pi}{3}（弧度）.$$

同理

$$\overset{\frown}{AnC}的弧度数=\frac{4\pi}{3}.$$

因此，皮带长为

$$2AB+\overset{\frown}{AnC}+\overset{\frown}{BmD}$$

$$=2\sqrt{3}b+\frac{4\pi}{3}O'B+\frac{4\pi}{3}OA$$

$$=2\sqrt{3}b+\frac{4\pi}{3}(O'B+OA)$$

$$=2\sqrt{3}b+\frac{4\pi}{3}b=\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)b.$$

答：皮带长为$\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)b$.

## 习 题 1—1

**1**.把下列各角化为弧度：

$0°$；$15°$；$18°$；$30°$；$45°$；$60°$；$90°$；$120°$；$180°$；$270°$；$360°$.

**2**.用角度表示下列各角：

$\frac{\pi}{24}$；$\frac{\pi}{20}$；$\frac{5\pi}{9}$；$\frac{7\pi}{12}$；$\frac{3\pi}{5}$；$\frac{4\pi}{3}$；$\frac{11\pi}{6}$；$\frac{9\pi}{4}$；$-\frac{3\pi}{2}$；$-\frac{7\pi}{10}$.

**3**.正三角形、正方形、正六边形、正八边形、正十边形、正 $n$ 边形的一个内角各是多少度？

**4**.把一个圆周分成五份，如果这五部分成等差数列，且最大部分是最小部分的 6 倍，问最小部分的弧所对的圆心角

是多少弧度？

5.某一个正多边形的一个外角等于它的一个内角的六分之一，(1) 用弧度表示每一个内角的大小；(2) 求这个正多边形的边数。

6.把圆周按 3:4:5 分为三部分，用弧度表示以各分点为顶点的三角形的各角，问各是多少？

7.一个直径为40cm的滑轮，以 $w=45$ 弧度/秒的角速度旋转，求轮周上一点在 5 秒钟内所经过的距离。

8.一个多边形的内角成等差数列，最小的一个角为 $\frac{2\pi}{3}$，公差是$\frac{\pi}{36}$，问这个多边形是几边形，内角的和是多少弧度？

9.求 4 时零 5 分时，时钟的长针与短针的夹角是多少度？多少弧度？

10.一条皮带，环绕于两个轮子上（两圆外离，同向转动），如果两个轮子的半径分别是 1 尺与 7 尺，两个轮子的轮心相距12尺，求皮带的长（精确到0.1尺）。

11.两轮半径分别为20cm、10cm，圆心距为60cm，用皮带交叉紧联之（两轮在同一平面内），求皮带的长度。

## 第二节　任意角的三角函数的定义与单位圆

### 一、内容提要

1.任意角的三角函数的定义：

以 $x$ 轴的正方向为始边的任意角 $\alpha$，在终边上任取点 $P(x, y)$，设 $|OP|=r>0$，那么

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}.$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

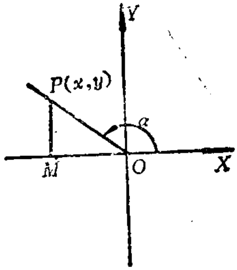
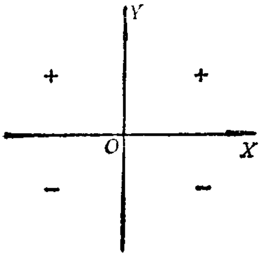


图 1-3

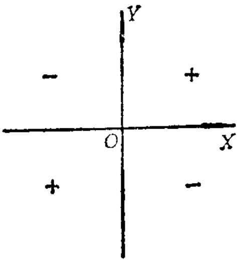
**2.** 任意角的三角函数的符号变化：

任意角的三角函数的符号变化，图示如下：



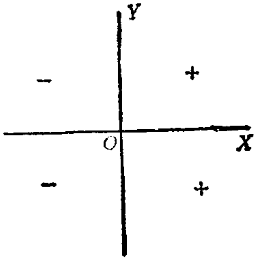
sinα与cscα

图 1-4



tgα与ctgα

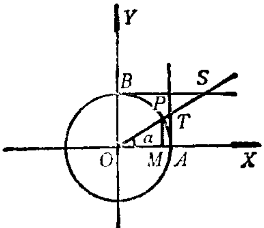
图 1-5



cosα与secα

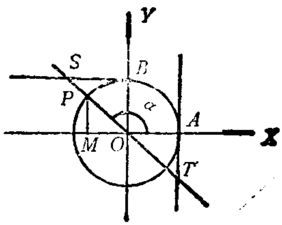
图 1-6

**3.** 单位圆：



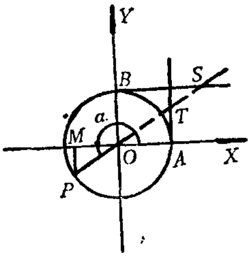
第Ⅰ象限

图 1-7



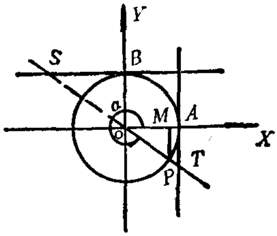
第Ⅱ象限

图 1-8




第Ⅲ象限

图 1-9




第Ⅳ象限

图 1-10

把半径为1的圆叫单位圆．在单位圆中，三角函数的值分别为

$$\sin\alpha=MP,\quad \cos\alpha=OM,\quad \operatorname{tg}\alpha=AT,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=BS,\quad \sec\alpha=OT,\quad \csc\alpha=OS.$$

## 二、例题

**1**．已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，（1）求作符合条件的角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 360°)$；（2）求$\sin\alpha$与$\operatorname{tg}\alpha$的值．

解　（1）$\angle AOX$与$BOX$都符合条件，即为所求．

（2）当$\alpha=\angle AOX$时（即终边落在第Ⅱ象限时），则

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}.$$

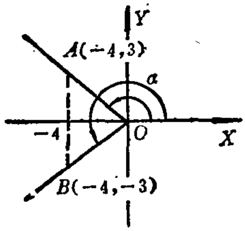



图 1-11

当$\alpha=\angle BOX$时（即终边落在第Ⅲ象限时），则

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}.$$

2.说明$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$为正值、为负值时$\theta$角所在的象限。

解法Ⅰ （1）使$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$。由于$\sin\theta$在第Ⅰ、Ⅱ象限时为正值，在第Ⅲ、Ⅳ象限时为负值；而$\cos\theta$在第Ⅰ、Ⅳ象限时为正值，在第Ⅱ、Ⅲ象限时为负值。因此，当$\theta$在第Ⅰ、Ⅲ象限时$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$为正值。

（2）同理，$\theta$在第Ⅱ、Ⅳ象限时$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$为负值。

解法Ⅱ 由$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\mathrm{tg}\theta$，讨论正切在各象限中的符号，即可得到上述结论。

3.已知$A$、$B$、$C$是$\triangle ABC$的三个内角，下列各式在什么情况下有意义？

（1）$\lg\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}$；（2）$\lg[-\cos(B+C)]$。

解 （1）$\because\quad 0<B+C<180°$，

$$\therefore\quad 0<\frac{B+C}{2}<90°.$$

即$\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}>0$，因此$\lg\mathrm{tg}\frac{B+C}{2}$永远有意义。

（2）$\because A+B+C=180°$，$\therefore B+C=180°-A$为了使$-\cos(B+C)>0$，必须$B+C$为钝角，即当$0<A<90°$时原式有意义。

4.作出$-150°$的正弦线、余弦线、正切线和余切线。