中学课堂

新学案

ZHONGXUEKETANGXINXUEAN

新学案

高二数学（上）

书海出版社

新学案

中学课堂

Z H O N G X U E K E T A N G X I N X U E A N

新学案

高二数学(上)

主　　编　陈兆镇　詹　强　梁靖云

学科主编　夏有璞

分册主编　夏有璞

编　　者　赵学昌　薛红霞　周汝涟

编者分工　赵学昌(第六章)

薛红霞(第七章)

周汝涟(第八章)

责任校对　褚晓勇

书 海 出 版 社

总 策 划：李广洁　姚　军
责　　编：张晓立
复　　审：张文颖
终　　审：张彦彬

图书在版编目（CIP）数据

中学课堂新学案·高二数学／陈兆镇，詹强，梁靖云主编．
太原：书海出版社，2002.7
ISBN　7-80550-437-7

Ⅰ．中…　Ⅱ．①陈…②詹…③梁…　Ⅲ．数学课—高中—教学
参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 010865 号

中学课堂新学案·高二数学（上）
陈兆镇　詹强　梁靖云　主编
*
书海出版社出版发行
030012　太原市建设南路 15 号　0351-4922102
http://www.sxep.com.cn　E-mail:sxep@sx.cei.gov.cn
新华书店经销　铁三局印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：12.75　字数：269 千字
2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月太原第 1 次印刷
印数：1—4500 册
*
ISBN　7-80550-437-7
G·387　　定价：12.00 元

序　言

选择一种较好的体现了素质教育新理念，既有利于培养创新精神和实践能力，又能够适应考试改革要求的学习材料，是广大中学教师、学生及其家长的共同愿望。为此，我们组织编写了这套较好地体现了上述要求的《中学课堂新学案》。

《新学案》是供中学各科课堂教学中使用的一种学生学习用书。它严格按照教学大纲(或课程标准)的规定，以教科书为依据，从学生实际出发，把传统课堂教学过程中教师讲、学生听的内容，以书面的形式提供给学生；同时，又设置了许多新的栏目，力求增添一些新颖有趣的材料，吸引学生主动地、有创造性地学习。它为各学提提供了一种全新的教学模式，是新的教育理念的具体体现。

《新学案》体现了自主学习的理念。它借鉴了全国教学改革先进集体——江苏洋思中学“先学后教，当堂训练”的经验，精心设计了“学习目标”、“学习指导”、“导读提示”、“重点难点导学”、“助学资料”、“达标训练”等栏目，让学生在教师指导下自主学习、独立思考。教师的作用重在引导、点拔和对关键问题进行讲解。它根永改变了课堂上教师讲得过多，学生被动学习的局面。

《新学案》体现了探究学习的理念。学生学习的探究过程具有重要的教育价值，它不仅能使学生对知识结论获得进彻的理解，而且能有效地发展学生的智慧，培养学生勇于探素、不怕困难的精神。《新学案》通过“导读提示”和“重点难点导学”设计了一系列灵活有趣、启发思考的问题，把学生的思维一步步引向知识的结论，从而使学生经历了一个探究的过程。在过一过程中，学生真正“感受、理解知识产生和发展的过程”，体验到创造的乐趣，其收获是可想而知的。

《新学案》体现了合作学习的理念。合作意识和合作能力是人们在新世纪生存与发展的重要品质，也是学生在学习中获得知识、培养能力、发展个性的必要条件。因此，教师在课堂上应该给学生更多相互交流、共同切磋的机会。《新学案》通过“导读提示”和“重点难点导学”提出一系列问题，不仅启发学生自学思考，还要引导大家展开讨论，集思广益，一趣探讨正确的结论，形成师生之间、学生之间积极互动、共同发展的局面。

《新学案》体现了重视学习学科基本结构的理念。美国著名教育家布鲁纳强调指出：“不论我们选教什么学科，务必使学生理解该学科的基本结构。”所谓基本结构，即每门学科中那些广泛起作用的概念、定义、原理和法则体系的知识。它

是各学科中智力价值最高的核心内容。掌握基本结构知识，特别是掌握知识体系，对于学好知识、发展智慧具有重要意义。《新学案》不仅设置了一系列问题，引导学生进行基本概念和原理的形成过程的推导，而且还特别设置了“知识网络”一栏，将本课的知识点，按内在联系编成知识网络图，帮助学生掌握知识的系统性，从而很好地体现了重视学习学科基本结构的教育理念。

《新学案》也注重了对练习的设计。为了有助于增强学生的实践能力，并帮助学生适应考试改革，以提高中考和高考成绩，《新学案》参照中考、高考题型，在每节课后和每个单元之后，设计了相当数量的练习题，在每册之后，还编有一套综合练习题。

《新学案》之所以有较高的质量，和其实力雄厚的编写队伍是分不开的。它由山西省太原市教育局导师团组织编写。该团集中了全市的中学特级教师、优秀的学科带头人和教学骨干，不仅有丰富的教学经验，而且以传播素质教育新理念为己任。况且山西省又是全国首先试用新教材的“两省一市”之一，对新教材较为熟悉。近几年这支队伍为广西、福建、北京等地编写了大批教辅读物，深得好评。此次编写，教师们更加精心组织，反复推敲，所以较好地保证了这套书的质量。

作为一个新生事物，《新学案》必定有它不够完善的地方。衷心欢迎大家批评指正。

编　者

《新学案》课堂教学使用方法

1. 使用本丛书教学，要坚持“先学后教”的原则，主要讲清本课时的学习要求，把教学目标具体化，使整个教学过程紧紧围绕这一目标进行。

2. 学生自学时，结合“导读提示”，让学生边看书，边写读书记要（解答提示问题），并记下疑难问题，然后阅读“重点难点导学”。时间不宜太长，只求大概了解课程内容。

3. 师生互动学习、讨论。可先让学生提出自学中的问题，也可由教师提出问题，由学生先作答，必要时教师作分析、补充。

4. 学生按“知识网络”复述本课知识点。

5. 按课堂讨论题或演示题，组织课堂讨论或演示，再由学生或教师讲评。

6. 按“达标训练”做练习及讲评。（使用学案，要当堂训练，尽量不留课外作业。）

目 录

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

第六章　不等式

6.1　不等式的性质

【学习目标】

知识目标:1.掌握比较实数大小的基本方法;2.理解不等式的性质及其证明;3.能利用不等式的性质及其推论,证明一些简单的不等式.

能力目标:1.能综合利用不等式的性质进行判断和推理;2.通过不等式性质的学习,提高逻辑推理能力.

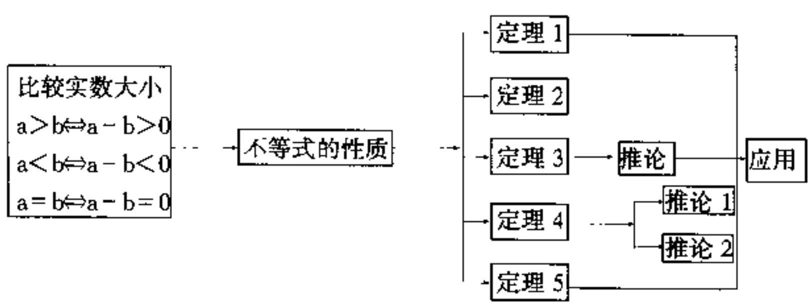
【学习指导】

1.重点:比较实数大小的方法,不等式的性质及其应用.

2.难点:不等式性质的证明.

3.关键:不等式性质成立的条件.

【知识网络】



【导学提示】

1.比较实数大小的依据是什么?

2.比较实数大小的关键是什么?

3. 推导不等式性质的理论依据是什么?

4. 在应用不等式性质时应注意什么问题?

5. 你认为学习不等式的性质有什么意义?

【典型例型】

例1 判断下列各命题的真假,并说明理由:

(1)$a>b>0, c\geqslant 0, c>d \Rightarrow ac>bd$;

(2)$a>b, \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \Rightarrow a>0$ 且 $b>0$;

(3)$a<b<0 \Rightarrow \frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

解:(1)若 $c=0$:$d<0$,又 $a>b>0$,则 $ac=0, bd<0, ac>bd$.

若 $c>0$:当 $d\geqslant 0$ 时,$c>d\geqslant 0$,则 $ac>bd$;当 $d<0$ 时,$ac>0>bd$.

综上可知(1)是真命题.

(2)$\because a>b$, $\therefore b-a<0$.

又$\because \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$.

则 $ab>0$,即 a 与 b 同号,故(2)是假命题.事实上 $a=-1, b=-2$ 就是一个反例.

(3)$\because a<b<0$,

$\therefore a-b<0, a<0, b<0$,

则$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}<0$,即$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.

故(3)是真命题.

注:不等式的性质是不等式这一章的理论基础,研究本例有助于深入理解并掌握不等式的性质.

本例中(3)还可利用函数 $y=\frac{1}{x}$的单调性判断,请同学们思考.

例2 设 $a>b>0, c>d>0$,求证:$\sqrt{\frac{d}{a}}<\sqrt{\frac{c}{b}}$.

分析:根据不等式的性质 $a>b>0 \Rightarrow a^2>b^2$ 可知,只需证明$\frac{d}{a}<\frac{c}{b}$.

证明: $\because a>b>0, c>d>0$,

$\therefore ac>bd$,即 $bd-ac<0$.

则 $\frac{d}{a}-\frac{c}{b}=\frac{bd-ac}{ab}<0$,即 $0<\frac{d}{a}<\frac{c}{b}$,

$\therefore \sqrt{\frac{d}{a}}<\sqrt{\frac{c}{b}}$.

例 3 设 $a>1$,比较 $(a+b)(a^2-b)$ 与 a^2-ab^2 的大小.

解: $\because (a+b)(a^2-b)-(a^2-ab^2)$

$=a^3+a^2b-ab-b^2-a^2+ab^2$

$=(a^3+a^2b+ab^2)-(a^2+ab+b^2)$

$=a(a^2+ab+b^2)-(a^2+ab+b^2)$

$=(a^2+ab+b^2)(a-1)$

$=[(a+\frac{b}{2})^2-\frac{3b^2}{4}](a-1)$,

而 $a>1$ 时 $a-1>0$,$(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}>0$($a+\frac{b}{2}$ 与 b 不能同时为 0),

$\therefore [(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}](a-1)>0$,

则 $(a+b)(a^2-b)>a^2-ab^2$,

即 $(a+b)(a^2-b)>a^2-ab^2$.

注: 举例表明,比较两个实数大小的问题可以转化为判断差式的符号,关键在于对差式的变形,因此,变形一定要到位.

若将题设中"$a>1$"的条件去掉,情况如何呢? 由以上过程不难看出结论如下:

$a>1$:$(a+b)(a^2-b)>a^2-ab$;

$a=1$:$(a+b)(a^2-b)=a^2-ab$,

$a<1$:$(a+b)(a^2-b)<a^2-ab$.

例 4 已知 $0<x<1, 0<a<1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 和 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

解: $\because 0<x<1, 0<a<1$,

$\therefore \log_a(1-x)>0, \log_a(1+x)<0$.

则 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$

$=\log_a(1-x^2)>0$,

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

注: 这里要用到对数函数的性质,若将题中"$0<a<1$"改为"$a>0$,且 $a\neq1$",情况如何呢? 请同学们自己思考.

例 5 设函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x-1$ 的反函数是 $g(x)$,试比较 $3g(x)$ 与 $g(3x)$ 的大小.

分析: 首先求出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$,进而就可以求出 $3g(x)$ 与 $g(3x)$,再设法比较.

解: $\because f(x)=(\frac{1}{2})^x-1$,

$\therefore f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\ (x>-1)$,即 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\quad(x>-1)$.

则 $g(3x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\quad(x>-\frac{1}{3})$,

$3g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)^3 \quad (x>-1)$.

当 $x>-\frac{1}{3}$ 时：$\because (x+1)^3-(3x+1)=x^2(x+3)\geqslant 0$，

$\therefore (x+1)^3\geqslant 3x+1>0$.

又 $\because y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x+1)^3\leqslant \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$，

即 $3g(x)\leqslant g(3x)$，其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

例 6 已知 $-1\leqslant a+b\leqslant 1, 1\leqslant a-b\leqslant 3$，求 $3a-b$ 的取值范围.

分析：将 $3a-b$ 用 $a+b$ 和 $a-b$ 表示，再利用不等式的性质即可求得 $3a-b$ 的范围.

解：设 $3a-b=m(a+b)+n(a-b)$，

$\therefore 3a-b=(m+n)a+(m-n)b$.

比较系数，得 $\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=-1, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} m=1, \\ n=2. \end{cases}$

$\therefore 3a-b=(a+b)+2(a-b)$.

$\because -1\leqslant a+b\leqslant 1, 1\leqslant a-b\leqslant 3$，

$\therefore 1\leqslant (a+b)+2(a-b)\leqslant 7$，

即 $1\leqslant 3a-b\leqslant 7$.

注：解本题时防止出现下列错误：

将 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$ 和 $1\leqslant a-b\leqslant 3$ 相加得 $0\leqslant a\leqslant 2$，

将 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$ 和 $3\geqslant a-b\geqslant 1$ 相减得 $-2\leqslant b\leqslant 0$，

由以上两式得 $0\leqslant 3a-b\leqslant 8$.

错误的原因是 $\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant 2 \\ -2\leqslant b\leqslant 0 \end{cases} \nRightarrow \begin{cases} -1\leqslant a+b\leqslant 1, \\ 1\leqslant a-b\leqslant 3 \end{cases}$. 因此由 $0\leqslant a\leqslant 2$，$-2\leqslant b\leqslant 0$ 得出的 $0\leqslant 3a-b\leqslant 8$ 未必满足已知条件. 如 $a=0, b=-2$ 虽然满足 $0\leqslant a\leqslant 2$，$-2\leqslant b\leqslant 0$，但并不满足 $-1\leqslant a+b\leqslant 1$.

【达标训练】

一、选择题

1. 下列命题中的真命题是（　　）

(A) 若 $x<0$，则 $x^2>0$　　(B) 若 $x^2>0$，则 $x>0$

(C) 若 $x^2>x$，则 $x<0$　　(D) 若 $x<1$，则 $x^2>x$

2. $\begin{cases} 2<x+y<4 \\ 0<xy<3 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} 0<x<1 \\ 2<y<3 \end{cases}$ 的（　　）

(A) 充要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

3. 若 $a>b$，则下列不等式中一定成立的是（　　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $2^a>2^b$　　(D) $\lg(a-b)>0$

4. 设 $a_1\leqslant a_2, b_1\leqslant b_2$，则 $a_1b_1+a_2b_2$ 与 $a_1b_2+a_2b_1$ 的大小关系是（　　）

(A)$a_1b_1+a_2b_2\leqslant a_1b_2+a_2b_1$　　(B)$a_1b_1+a_2b_2<a_1b_2+a_2b_1$

(C)$a_1b_1+a_2b_2\geqslant a_1b_2+a_2b_1$　　(D)$a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$

5.若$c<b<a$,对下列结论正确的是(　　)

(A)$a|c|>b|c|$　　(B)$ab\geqslant ac$

(C)$b-a>c-a$　　(D)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

二、填空题

1.适当增加条件,使下列命题成为真命

(1)若$ac^2>bc^2$,______,则$a>b$;

(2)若$a>b$,______,则$ac\leqslant bc$;

(3)若$a>b$,______,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2.设$a<b<0$,则$-\sqrt{-a}$与$-\sqrt{-b}$中较大的是______.

3.设$a、b、c\in\mathbf{R}$,给出下列四个命题

①$a<b<0\Rightarrow a^2<b^2$;　　②$\frac{b}{a}<c\Rightarrow a<bc$;

③$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$;　　④$a<b<0\Rightarrow\frac{b}{a}<1$.

其中的真命题是______.(请把你认为是真命题的序号都填上)

4.若$-1<a<b<0$,则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2,b^2$按大到小的顺序排列为____________________.

三、解答题

1.若$a>b,e>f,c<0$,求证:$e-ac>f-bc$.

2.设$x\in\mathbf{R}$,比较$2x^4+1$与$2x^3+x^2$的大小.

3.设$m\in\mathbf{R}$,讨论$(m+1)^2$与$(m+2)^2$的大小关系.

课后练习

一、选择题

1. 已知命题“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”和“$a<b\Rightarrow e\leqslant f$”都是真命题,那么下列四个命题中的真命题是(　　)

(A)$e>f\Rightarrow c<d$　　(B)$c\leqslant d\Rightarrow e<f$

(C)$e>f\Rightarrow c\geqslant d$　　(D)$c\leqslant d\Rightarrow e\leqslant f$

2. 下列命题中的真命题是(　　)

(A)$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　(B)$a+c>b+d,a<b\Rightarrow c>d$

(C)$a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$　　(D)$a>b\Rightarrow a^n>b^n(n\in N^*)$

3. 已知 $x<a<0$,则下列各式中一定成立的是(　　)

(A)$x^2<ax<0$　　(B)$x^2>ax>a^2$

(C)$a^2>x^2>0$　　(D)$x^2>a>ax$

4. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的取值范围是(　　)

(A)$(0,\frac{5\pi}{6})$　　(B)$(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$　　(C)$(0,\pi)$　　(D)$(-\frac{\pi}{6},\pi)$

5. 已知 $a>-b,2^b<1$,则 $a,b,-a,-b$ 的大小关系正确的是(　　)

(A)$a>b>-b>-a$　　(B)$a>-b>-a>b$

(C)$a>-b>b>-a$　　(D)$a>b>-a>-b$

6. “$a+b>2c$”的一个充分条件是(　　)

(A)$a>c$ 或 $b>c$　　(B)$a>c$ 且 $b<c$

(C)$a>c$ 且 $b>c$　　(D)$a>c$ 或 $b<c$

7. 已知 $a<0,b^2+b<0$,则下面不等式成立的是(　　)

(A)$a>ab>ab^2$　　(B)$ab^2>ab>a$

(C)$ab>a>ab^2$　　(D)$ab>ab^2>a$

8. 已知 $a>0$,且 $a\neq1$,$p=\log_a(a^2-a+1)$,$Q=\log_a(a^3-a+1)$,则 P 与 Q 的大小关系为(　　)

(A)$P>Q$　　(B)$P<Q$

(C)$P=Q$　　(D)不确定

二、填空题

1. 若 $0<a<b$,且 $a+b=1$,则 $\frac{1}{2},a,b,2ab,a^2+b^2$ 这五个数按从小到大的顺序排列是__________.

2. 给出下列六个命题

①若 $x>6$,且 $x^2>36$;②若 $x<6$,则 $x^2<36$;

③若 $x^2>36$,则 $x>6$;④若 $x^2<36$,则 $x<6$;

⑤若 $x>0$,则 $x\geqslant0$;⑥若 $x\geqslant0$,则 $x>0$.

其中的真命题是__________.(请把你认为是真命题的序号都填上)

3. (1)若 $1<\alpha<8,-4<\beta<2$,则 $\alpha-|\beta|$ 的取值范围是__________.

(2)若$-3<a<b\leqslant 1$，$-4<c<0$，则$(a-b)c$的取值范围是________.

4.若$a<b<0$，将$\frac{1}{a-b}$与$\frac{1}{a}$，按从小到大的顺序排列为________.

三、解答题

1.设$a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，求证：$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

2.已知$a>b$，且$ab\neq 0$，讨论$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小关系.

3.已知$x\in\mathbf{R}$，比较$\frac{1}{1+x}$与$1-x$的大小.

4.设$f(x)=ax^2-c$，且$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 2$，求$f(3)$的取值范围.

5.若$0<a<\frac{1}{k}$，$k\geqslant 2$，$k\in\mathbf{N}^*$，且$a-b>a^2$，求证：$b<\frac{1}{k+1}$.

6.2 算术平均数与几何平均数

【学习目标】

知识目标：1.掌握两个正数的算术平均数与几何平均数的定理及其证明；2.能利用上述定理及不等式的性质证明简单的不等式；3.会利用上述定理求某些函数的最大值或最小值.

能力目标：会运用算术平均数与几何平均数的定理解决某些实际问题，逐步提高运用数

学知识与方法分析问题、解决问题的能力.

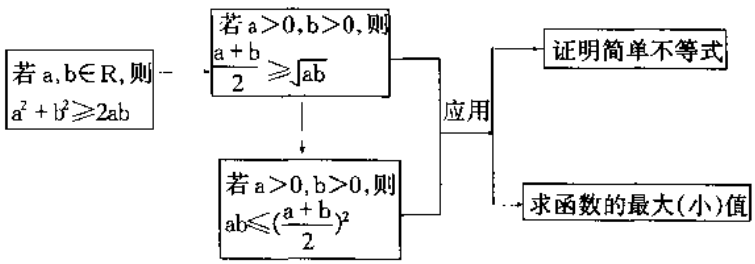
【学习指导】

1.重点:两个正数的算术平均数与几何平均数的定理及其应用.

2.难点:应用定理解决实际问题.

3.关键:掌握 定理及其适用条件.

【知识网络】



【导学指示】

1.不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 与 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 的适用条件是否相同?它们的等号何时成立?

2.学习以上两个不等式有何作用呢?

3.用均值定理求函数的最大(小)值时应具备什么条件呢?请从正反两方面举例说明.

4.在应用均值定理解决实际问题时,一般的步骤是什么?应注意什么问题?

5. 你能否将两个正数的均值定理进行推广？如 a,b,c 都为正数时，你能得出什么结论？

【典型例题】

例 1　若 $a>b>0$，则下面不等式中正确的是(　　)

(A) $\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$　　(B) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(C) $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　(D) $\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

解：$\because a>b>0$，

$\therefore \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>0$，

则 $\frac{2}{a+b}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

又 $ab>0$，$\therefore \frac{2ab}{a+b}<\frac{ab}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，故选(C).

注：本题还可采取特殊值的方法，如 $a=2,b=1$ 时，$\frac{2ab}{a+b}=\frac{4}{3}$，$\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$，$\sqrt{ab}=\sqrt{2}$，显然 $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$，故选(C).

例 2　设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 2(a+b+c)-3$.

分析：由 a^2 与 $2a$ 联想到 $a^2+1\geqslant 2a$，同理 $b^2+1\geqslant 2b$，$c^2+1\geqslant 2c$，再由不等式性质即可获证.

证明：$\because a,b,c\in R$，

$\therefore a^2+1\geqslant 2a,b^2+1\geqslant 2b,c^2+1\geqslant 2c$，

将以上三式相加可得：

$a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$，

即 $a^2+b^2-c^2+3\geqslant 2(a+b+c)-3$.

例 3　设 $a>0,b>0,c>0$，

(1)若 $a+b+c=1$，求证：$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$；

(2)若 $abc=1$，求证：$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$.

分析：本题的关键在于如何利用已知条件 $a+b+c=1$ 或 $abc=1$.

证：(1) $\because a+b+c=1$，

$\therefore 1-a=b+c,1-b=c+a,1-c=a+b$.

$\therefore$ 只须证：$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

$\because a>0,b>0,c>0$，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0,b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0,c+a\geqslant 2\sqrt{ca}>0$.

根据不等式的性质得：

$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$,

即$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

(2) $\because abc=1$,

$\therefore (1+a)(1+b)(1+c)=(abc+a)(abc+b)(abc+c)$

$=a(bc+1)\cdot b(ac+1)\cdot c(ab+1)$

$=abc(bc+1)(ac+1)(ab+1)$

$=(bc+1)(ac+1)(ab+1)$.

又$\because bc>0, ac>0, ab>0$,

$\therefore bc+1\geqslant 2\sqrt{bc}>0, ac+1\geqslant 2\sqrt{ac}>0, ab+1\geqslant 2\sqrt{ab}>0$,

$\therefore (bc+1)(ac+1)(ab+1)\geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8$.

则$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8$.

注:像本题这种条件不等式的证明,关键在于恰当地、适时地利用已知条件,如本例中(2)的证明过程中多次利用了 $abc=1$ 这一条件.

例 4 设 $a>2$,求证:$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

证明: $\because a>2$,

$\therefore \log_a(a-1)>0, \log_a(a+1)>0$,且 $\log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$.

根据均值定理可得:

$$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<[\frac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}]^2=\frac{[\log_a(a^2-1)]^2}{4}<\frac{(\log_a a^2)^2}{4}=1.$$

即 $\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

注:本题的证明中既用到了均值定理,又要利用对数函数的单调性:$\log_a(a^2-1)<\log_a a^2$.

例 5 设 $x<0$,求 $y=x+\frac{1}{x}$的最大值.

解: $\because x<0, \therefore -x>0$.

则$(-x)+\frac{1}{-x}\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{-x}}=2$,从而 $y=x+\frac{1}{x}\leqslant -2$.

由 $-x=\frac{1}{-x}$,得 $x=-1$,

$\therefore$当且仅当 $x=-1$ 时,$y_{max}=-2$.

例 6 设 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2=1$,则$(1-xy)(1+xy)$有(   ).

(A)最小值$\frac{1}{2}$和最大值 1

(B)最小值$\frac{3}{4}$而无最大值

(C)最大值 1 而无最小值

(D)最小值$\frac{3}{4}$和最大值 1

解: $\because x^2+y^2=1$,

$\therefore (1-xy)(1+xy)=1-x^2y^2\geqslant 1-(\frac{x^2+y^2}{2})^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.