

高等学校教材

激光干涉测试技术及应用

张琢 主编



机械工业出版社

前 言

本书是为高等院校机电一体化、精密仪器、计量测试技术等专业学生编写的。主要论述几何量、机械量等物理量的激光干涉测试技术和测试方法，各种测试方法的共同的基础知识，各种测量方法的工作原理、理论分析等。

该书具有如下特点：按被测物理量进行分章，针对性和实用性强。内容选取基本上反映了国内外工业生产和科学研究近些年来的最新成果，具有一定的新颖性。

本书在编写过程中参阅了国内外有关文献，在此向这些文献的作者表示敬意。天津大学的陈林才教授、哈尔滨工业大学的浦昭邦教授对本书的编写工作给予了帮助和支持，特此表示谢意。

哈尔滨工业大学的张琢负责全书的主编工作（编写第一、二、三、八章），范志刚编写第六、七章、第八章第二节，于瀛洁编写第四、五章。

本书可作为高等院校机电一体化、精密仪器及计量测试技术专业的本科生、研究生的教材，亦可供有关工程技术人员学习参考。

由于作者业务水平有限，实践经验不足，不当之处在所难免，恳切希望广大读者批评指正，并提出宝贵意见。

编者

1998年1月

目 录

前 言

第一章 激光干涉理论基础..... 1

第一节 光的干涉理论..... 1

第二节 激光的基础知识..... 15

第三节 激光干涉仪的建立..... 27

第二章 激光干涉在长度和位移 测量中的应用..... 42

第一节 激光干涉测长中的几个基本 问题..... 42

第二节 典型光路布局..... 47

第三节 激光干涉在长度测量中的 应用..... 51

第四节 激光干涉在位移测量中的 应用..... 53

第五节 激光干涉在尺寸测量中的 应用..... 55

第六节 激光干涉在坐标测量中的 应用..... 57

第七节 半导体激光干涉在距离测量 中的应用..... 58

第三章 激光干涉在角度测量中的 应用..... 63

第一节 小角度或有限角度的测量 方法..... 63

第二节 任意角度的测量方法..... 80

第四章 激光干涉在直线度测量中的 应用..... 86

第一节 常用激光干涉测量直线度的 方法..... 86

第二节 HP5528A 双频激光直线度 测量系统..... 92

第三节 新型双频激光非接触直线度 测量系统..... 95

第五章 激光干涉在表面粗糙度 测量中的应用..... 104

第一节 渥拉斯顿棱镜型双频激光 干涉仪..... 104

第二节 共模抑制干涉仪..... 107

第三节 微分扫描干涉仪..... 112

第四节 利用相移技术的干涉仪..... 113

第六章 激光全息干涉计量 技术..... 120

第一节 全息术的基本原理与 实验技术..... 120

第二节 全息干涉计量技术..... 126

第三节 计算全息技术..... 129

第四节 全息干涉技术的应用..... 131

第五节 激光散斑干涉技术..... 134

第七章 激光干涉在各种机械量及 其它参量测量中的应用..... 140

第一节 激光干涉在微振动测量中的 应用..... 140

第二节 激光干涉在介质折射率测量 中的应用..... 140

第三节 激光干涉在重力加速度绝对 测量中的应用..... 142

第四节 激光干涉在精密定位中的 应用..... 143

第五节 激光干涉在转速测量中的 应用..... 144

第六节 激光干涉在光学系统准直 方面的应用..... 147

第七节 激光干涉在瞬态过程测量 中的应用..... 150

第八章 提高激光干涉仪测量准确度的 方法..... 152

第一节 影响测量准确度的误差 因素..... 152

第二节 提高测量准确度的方法..... 179

参考文献..... 188

第一章 激光干涉理论基础

本章将其它各章节的共同部分——基础理论及基本方法汇集在一起，使读者通过本章学习到激光干涉测试技术的基本概念、基本理论，为以下各章节的学习打下必备基础。

第一节 光的干涉理论

一、光波的电磁特性

光是电磁波的一种，其本质与电磁波相同。研究光波内在特性的基本理论是麦克斯韦电磁场理论，麦克斯韦总结了前人在电磁学领域的研究成果，把普遍电磁现象的基本规律归纳为以下四个方程式：

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum q \quad (1-1)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (1-2)$$

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I + \frac{d\Phi_c}{dt} \quad (1-3)$$

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1-4)$$

式(1-1)～式(1-4)中， $\mathbf{D}$ 为电位移矢量； $d\mathbf{S}$ 为面积元矢量，方向取 $d\mathbf{S}$ 的外法线方向； $\mathbf{E}$ 为电场强度； $\mathbf{B}$ 为磁感应强度； $\mathbf{H}$ 为磁场强度； $d\mathbf{l}$ 为位移元矢量； $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l}$ 为 $\mathbf{H}$ 沿 l 的环流。 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 之间有如下关系：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

式中， ϵ 为介电常数； μ 为介质的磁导率。

这一组方程既概括了静电场和稳定电场的性质，也描述了电荷和电流随时间变化时电场和磁场之间的相互激发关系。其中，式(1-1)表明，在任何电场中（包括自由电荷或变化的磁场激发的电场），通过任意封闭曲面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和；式(1-2)表明，不论是电流还是变化的电场所激发的磁场，都是涡旋场，进入封闭曲面的磁力线数恒等于穿出该面的磁力线数，所以磁通量恒等于零；式(1-4)表明，沿任意闭合曲线的电场强度的线积分等于通过以该闭合曲线所包围面积的磁通量变化率的负值，场强包括电荷产生的电场强和变化的磁场激发的场强。前者无涡旋性，它的环流为零，后者是涡旋场，其环流为 $-\frac{d\Phi}{dt}$ ；式(1-3)表明，磁场强度沿任意闭合曲线积分等于以该闭合曲线为边界的曲面的全电流的代数和，式中 $\sum I$ 表示传导电流和环流电流之和， $\frac{d\Phi_c}{dt}$ 表示位移电流。按照麦克斯韦的电磁理论，随时间变化的电场在其周围激起磁场，同时随时间变化的磁场在其周围激起电场。因此，在空间某区域有变化着的电场(或磁场)时，则在邻近区域激起磁场(或电场)；所激起的变化着的磁场(或电场)又在较远的区域产生新的变化着的电场(或磁场)。如此继续

下去,变化的电场和变化的磁场不断相互激发,并由近及远地传播出去。这种传播具有波动性,称为电磁波。

理论和实践都证明:光是电磁波。但是光波特别是可见光在电磁波谱中只占非常小的一部分,可见光的波长范围在 $7.7 \times 10^{-4} \text{mm}$ (红光边缘光的波长) 到 $4 \times 10^{-4} \text{mm}$ (紫光边缘光的波长) 之间(频率范围在 $3.9 \times 10^{14} \text{Hz}$ 到 $7.5 \times 10^{14} \text{Hz}$ 之间)。

二、波动描述

上面所给出的四个方程式是积分形式麦克斯韦方程组。它表达了有限范围的闭合曲线、曲面以及体内某些总和量间的联系,但是在实际应用中,常常要知道场中各点的场量。为了达到这个目的,可用数学方法将积分形式的方程组变换为相应的微分方程组。为简化描述,在此假设:①光波在真空中传播(此时 $\epsilon = \text{常量}$, $\mu = \text{常量}$, 自由电荷体密度 $= 0$)。②远离波源的某一区域没有自由电荷。③所研究的光波是平面波(在平面波的传播过程中,如忽略介质对平面波的吸收作用,则平面波的振幅是一个常数。如平面波沿 x 轴正方向传播,它的波振面就是与 yz 平行的平面。在这个平面上各点的 E 、 H 的值时刻相等并为常量),经过推导得到简化后的微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \\ \text{II} \quad & \begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \\ \text{III} \quad & \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases} \\ \text{IV} \quad & \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{cases} \end{aligned}$$

第 I 组方程表示 E_x 与其它场量没有关系,它对 x 和 t 的偏导数为零;第 II 组方程表明 H_x 对 x 和 t 的偏导数为零,这说明 E_x 和 H_x 对空间和时间是不变的,它们是常数(包括零值),代表重叠在波动系统上的稳定电场和稳定磁场;第 III 组表示场中各点的 E_y 和 H_z 之间的激发关系。当场中某点电场强度的 y 方向分量 E_y 随时间发生变化时,会引起磁场强度 z 方向的分量 H_z 的空间变化。反之, H_z 随时间变化也会引起 E_y 的空间变化。可见,在空间某点产生一平行于 y 轴的电场变化时,在该点同时也激起一个沿 x 轴变化的平行于 z 轴的磁场,这个变化的磁场又在周围激发起沿 x 轴变化的平行于 y 轴的电场。于是, y 方向的电场和 z 方向的磁场交替产生,且沿 x 轴方向由近及远地传播出去。所以方程组 III 所表达的是一运动着的电磁场即电磁波。同时我们注意到, E_y 、 H_z 只是相互有联系,而与 H_x 、 H_z 、 E_x 、 E_z 没有关系,所以变化的电场(或磁场)和它所激发的磁场(或电场)总是相互垂直的,而且都与传播方向 x 轴垂直,因而这种波是横波;第 IV 组方程表示的是场中各点 E_z 与 H_y 的联系,它的含义与第 III 方程组是一样的。

对于自然光, E 和 H 的振动面并不局限于 y 和 z 方向, 而是在垂直于 x 轴的各个方向上几乎都有机会。但是正像两个互相垂直而频率和相位又相同的两个振动可以看做是一个振动一样, 任何一个方向的振动也可以看做是互相垂直的同频率同相位振动的合成。因此, 可以只对方程组 (1-5) 进行研究, 从而了解 E_y 和 H_z 对 x 和 t 的关系, 即

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (1-6)$$

将式 (1-5) 对 t 取偏导数, 式 (1-6) 对 x 取偏导数, 得到

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = -\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}$$

从上面方程消去 H_z 项得到

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (1-7a)$$

同样, 将式 (1-5) 对 x 取偏导数, 从而消去 E_y 项得到

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad (1-8a)$$

式 (1-7a) 和式 (1-8a) 正是平面波动方程。由于 ϵ 和 μ 都是常数, 令

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

则式 (1-7a) 和式 (1-8a) 变为

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (1-7b)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \quad (1-8b)$$

又由于引起人眼视觉效应和使照相底片 (或使光电接收器) 感光的是电矢量 E , 因此在此只考虑 E 矢量, 并把 E 矢量称为光矢量, 而光波的振动方向指的就是 E 矢量的方向。式 (1-7b) 的通解是

$$E = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

式中, f_1 和 f_2 分别代表沿 x 轴正向传播和沿 x 轴负向传播的平面波, 一般只选沿 x 轴正向传播的波 f_1 。对于一般研究的平面单色波, 选用如下通解:

$$E = E_0 \left[\cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + i \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad (1-9)$$

在上式中, 由于实部和虚部只是有在相位上相差 $\pi/2$ 的区别, 所以通常只取实部来表示光波振动, 即

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (1-10)$$

式 (1-10) 表明, 在平面光波中, 光振动 E 是时间 t 和距离 x 的函数。设在 x 轴上有两任意

点 A 、 B ，其相应的坐标为 x_1 和 x_2 ，而且 $x_2 > x_1$ ，在某一时刻 t_1 ，光振动在 A 和 B 点的值分别为

$$E_{At_1} = E_0 \cos \omega \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right)$$

$$E_{Bt_1} = E_0 \cos \omega \left(t_1 - \frac{x_2}{v} \right)$$

这两值并不相等，因此总可以找到另一时刻 t_2 ，使光振动在 B 点的大小恰等于时刻 t_1 光振动在 A 点的值，即

$$E_{Bt_2} = E_0 \cos \omega \left(t_2 - \frac{x_2}{v} \right) = E_0 \cos \omega \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right)$$

从而可得

$$t_2 - \frac{x_2}{v} = t_1 - \frac{x_1}{v}$$

即

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{v}$$

上式的物理意义是， t_1 时刻在 A 点的光振动，在 t_2 时刻出现在较远的 B 点，说明光振动经 $\Delta t = t_2 - t_1$ 的时间沿 x 方向传播了 $\Delta x = x_2 - x_1$ 距离。显然， $v = \Delta x / \Delta t$ 是传播速度，因此，电磁波即光波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

在真空中， $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ ，所以真空中电磁波的速度 c 为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{m/s}$$

对于一般的光学介质， $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ， $\mu = \mu_0$ ， ϵ_r 为相对介电常数，所以在一般光学介质里的光速 v 为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

该介质的绝对折射率 n 为

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$$

当 x 为常数，并令 $\varphi = -\omega x/v$ 时，式 (1-10) 变为

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-11)$$

式中， E_0 为振动的振幅； $(\omega t + \varphi)$ 为振动的相位； φ 为初相位； ω 为振动的圆频率。

式 (1-11) 为一简谐振动方程，它表明距光源为 x 的点的光振动随时间的变化规律。

相位是一个重要的物理量，它不仅决定了振动的大小，而且决定了振动的方向。图 1-1 示出方程中的各个特征量之间的关系。

在图 1-1 中，设 E_0 为以 O 为圆心的顺

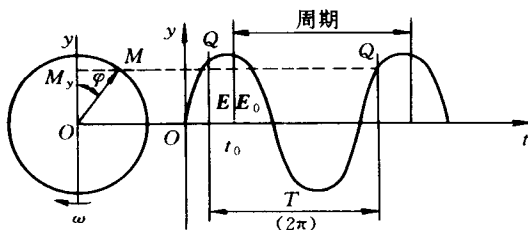


图 1-1 圆矢量示意图

时针匀速旋转矢量, 其在 t_0 时刻的初相位为 φ , 旋转圆频率为 ω , 旋转周期为 T 。在任意时刻 t , E_0 与 y 轴夹角为 $(\omega t + \varphi)$ 。将矢量 E_0 的端点 M 在 y 轴上的投影 M_y 画在时间轴 Ot 上, 以时间轴上的原点 O 作为基准, 则投影 M_y 的坐标为 $y = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$, E_0 为矢量的模。当矢量 E_0 旋转一周时, 点 M_y 在 y 轴上以平衡点 O 来回振动一次, 振动的位移与时间的关系同样是 $y = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ 。矢量 E_0 旋转一周, 所用时间为 T , 此时振动位相变化 2π , 因此有

$$y = E_0 \cos[\omega(t + T) + \varphi] = E_0 \cos(\omega t + \varphi + 2\pi)$$

从而得

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\gamma$$

式中, $T = 1/\gamma$; γ 为振动频率。

由式 (1-10) 还可以看出, 波动不仅是时间的函数, 同时也是空间的函数。式 (1-10) 表明, 对于空间某一固定点随时间变化情况。如果在同一时刻观察不同点的波动情况就会发现, 在波的传播方向上, 总可以找到这样两点 x_1 、 x_2 , 使得 $\lambda = x_2 - x_1$, 并且满足

$$E = E_0 \cos\left[\omega t - \left(\omega \frac{x_1}{v} + 2\pi\right)\right] = E_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{x_2}{v}\right)$$

即

$$\omega \frac{x_2 - x_1}{v} = \frac{\omega}{v} \lambda = \frac{2\pi}{T} \lambda \frac{1}{v} = 2\pi$$

$$\lambda = Tv$$

式中, T 为振动周期; v 为波动在传播方向上的传播速度。

因此, 根据定义可知 λ 即为光波的波长。

三、光波的迭加

设有两列波从两个光源发出, S_1 和 S_2 的谐振动方程是

$$y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

它们的频率和振动方向相同, 在传播过程中, 在空间任意点 P 相遇, 如图 1-2 所示。 P 点的振动是两个振动的合成。这里, 两个振动的振动频率和振动方向相同, 因此可根据谐振动合成原理求得合成振动。

设 P 点与 S_1 和 S_2 的距离分别为 L_1 和 L_2 , 并忽略介质对波的能量吸收, 则从 S_1 和 S_2 传到 P 点的振动分别为

$$y_{P1} = a_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi L_1}{\lambda}\right)$$

$$y_{P2} = a_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi L_2}{\lambda}\right)$$

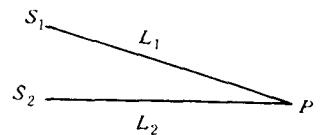


图 1-2 两光波迭加示意图

P 点的合振动为

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = a_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi L_1}{\lambda}\right) + a_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi L_2}{\lambda}\right) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1)\right]$$

$$\varphi = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

对于固定点 P 来说, $(L_2 - L_1)$ 是一常数, 因此当波源相位差保持恒定时, $\delta = (\varphi_2 - \varphi_1) + 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$ 也是一常量, 因此合振幅 A 也是一恒定值。如果 $\delta = (\varphi_2 - \varphi_1) + 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda = \pm 2k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $A^2 = (a_2 + a_1)^2$ 有最大振幅; 如果 $A^2 = \pm (2k + 1)\pi, (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $A^2 = (a_2 - a_1)^2$ 有最小振幅。通常 $\varphi_2 = \varphi_1$, 即波源初相位相等, 此时 $\delta = 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$, 因而相位差 δ 只与 P 点与光源距离的大小有关。如果 $L_2 - L_1 = \pm k\lambda (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $A^2 = (a_2 + a_1)^2$; 如果 $L_2 - L_1 = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $A^2 = (a_2 - a_1)^2$ 。 $(L_2 - L_1)$ 称为光程差, 用 Δ 来表示。

从上面分析可以看出, 当两个在空间传播的光波振动频率相同, 振动方向相同, 相位相等 (或相位差恒定), 它们在空间相遇时, 某些点的振动始终加强, 而另一些点的振动始终减弱 (或完全抵消), 这种现象称为光波的干涉。产生干涉现象的光波称为相干光波, 符合上述三个条件的波源称为相干光源。上述三个条件也是光的相干条件。

四、两个频率相差很小的波的迭加——拍

两个振动方向相同、振幅相等而频率相差很小的光波的迭加, 将产生光学上很有意义的“拍”现象。设角频率分别为 ω_1 和 ω_2 的单色光波的振动方程分别为

$$E_1 = a \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$

$$E_2 = a \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

由这两个光波迭加得

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = a \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a \cos(\omega_2 t - \varphi_2) = \\ &2a \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)] \times \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{设} \quad \bar{\omega} &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \omega_m &= \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \quad \varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

则上式变为

$$E = 2a \cos(\omega_m t - \varphi_m) \cos(\bar{\omega} t - \bar{\varphi})$$

若令 $A = 2a \cos(\omega_m t - \varphi_m)$, 则有

$$E = A \cos(\bar{\omega} t - \bar{\varphi}) \quad (1-12)$$

式(1-12)表明, 合成波是一个频率为 $\bar{\omega}$ 而振幅为 A 且随时间和位置在 0 与 $2a$ 间变化的波。图 1-3 表示了这样两个波的迭加情况, 其中图 1-3a 是两个单色波, 图 1-3b 是合成波, 图 1-3c 是合成波振幅变化曲线。由于光波的频率很高 (达 10^{14} Hz), 而相对光波频率来说, $\omega_1 \approx \omega_2$, 则 $\bar{\omega} \gg \omega_m$, 因此 A 变化缓慢 (见图 1-3c) 而 E 变化极快 (见图 1-3b)。

现代科学技术生产出的光电接收器最快响应时间约为 10^{-12} s, 它比入射光的周期 (约为 10^{-15} s) 长得多, 因此我们所能看到的或用光电接收器接收到的信号主要为光强信号。合成波的强度与 A^2 成正比, 即

$$I = A^2 = 4a^2 \cos^2(\omega_m t - \varphi_m)$$

或

$$I = A^2 = 2a^2 [1 + \cos 2(\omega_m t - \varphi_m)] \quad (1-13)$$

因此合成波的强度随时间和位置在 0 和 $4a^2$ 之间变化 (见图 1-3d), 这种强度时大时小的现象通常称为拍。由式(1-13)可见, 拍频等于 $2\omega_m = \omega_1 - \omega_2$ 。

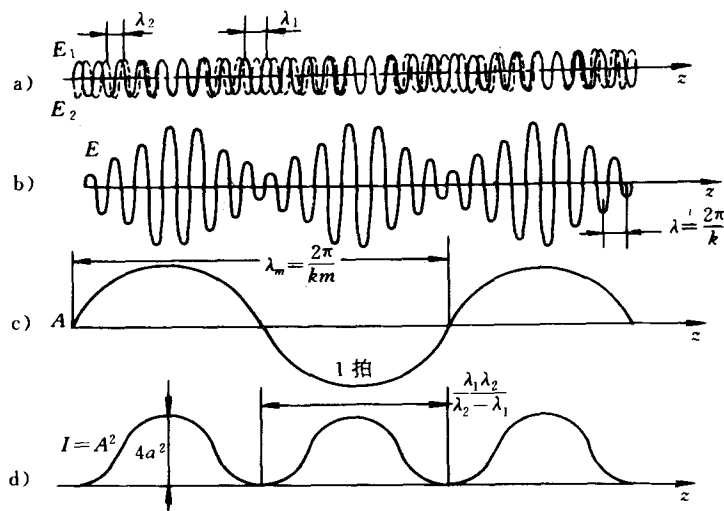


图 1-3 频率不同的两单色光的迭加

a) 两个单色光波振动曲线 b) 合成波振动曲线 c) 合成波振幅包络线 d) 合成波的光强度变化曲线

拍是一个非常重要的物理现象，它是研究激光干涉测试技术不可缺少的必备理论基础。

五、相干光的获得

如果两个或两个以上的光波在空间传播过程中相遇，各光波间互不影响，每一光波的传播方向、振幅、频率以及其它特性等都不发生变化，从这个意义来说，各方向传播的光波是相互独立的。然而，在前面的分析中我们知道，对于满足一定条件的两个或两个以上的光波，在它们相遇的区域，各点的光强度与各光波单独作用所产生的光强度之和可能差异很大。有些地方的光强度接近于零，而另一些地方的光强度则比各光波单独作用所产生的光强度大得多。这种现象即光的干涉。

光的干涉虽然不难实现，但并非任意两光波相遇都能产生干涉现象。即如果从两个完全独立光源（如两盏电灯）发出的光波即使相遇，也不能产生干涉现象。

在自然界中很难找到满足相干条件的两个独立的光源，但可以将一个光源发出的光波分为两部分或更多部分。由于这些新分离出的光波相当于新的光源，它们又都来自于一个同一光源，所以每个新光源之间满足振动频率相同，振动方向相同，初相位相同（或相位差恒定）。因此这些从同一光源分离出的新的光波（新光源）满足相干条件，如果相遇将产生干涉。

将同一光源分离为两部分或更多部分的方法主要有两种，一种是分波振面法，另一种是分振幅法。分波振面法的方法如图 1-4 所示，用强光照射到针孔（狭缝） S 上，以 S 为光源发出球面波。在距球面波一定距离处放置两个针孔（狭缝） S_1 和 S_2 ，它们将从 S 发出的光波的波振面分离出两小部分作为相干光源。于是在两针孔（狭缝）发出的光波相遇区域产生干涉现象，即在双针孔（狭缝）后面的屏幕 Σ 上呈现干涉图样，这就是著名的杨氏双缝实验。

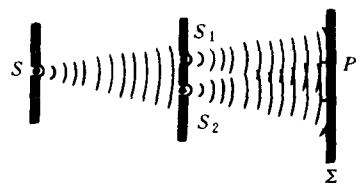


图 1-4 杨氏双缝干涉实验

在杨氏双缝实验中,由光源 S_1 和 S_2 发出的光波在屏幕上任意一点 P 所产生的合振动,其振幅的平方可由式 (1-14) 给出,即

$$A^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (1-14)$$

式中, δ 为这两个光源发出的光波在所考察的 P 点的相位差。

由于两光波在屏幕上不同点有不同的相位差,所以屏幕上的各点的光强度不同:在 $\delta = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 的地方(即光程差 $\Delta = S_1P - S_2P = \pm m\lambda$ 时),光强最大,等于 $4a^2$;而在 $\delta = \pm (2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 的地方(即 $\Delta = \pm (2m+1)\lambda/2$ 时),光强为零,在屏幕上的光强分布如图 1-5 所示。

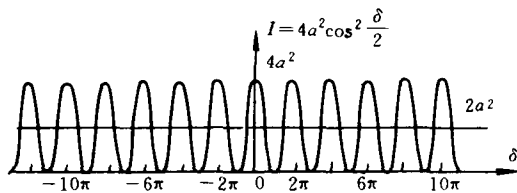


图 1-5 杨氏干涉条纹强度分布曲线

分振幅法产生光的干涉的实验基础是平行平板干涉。如图 1-6 所示, h 和 n_2 分别是平行板的厚度和折射率, i_1 和 i_2 分别是入射角和折射角, n_1 是空气的折射率, 且 $n_2 > n_1$ 。由光源 S 发出的一束光,在平行平板上表面的 A 点分为两部分,即由上表面反射的光束 1 和由下表面反射的光束 2。显然光束 1 和光束 2 是平行的,所以干涉条纹定位于无穷远(指两光束在无穷远处相遇)。从图中可看出,光束 1、2 的光程差为

$$\Delta = n_2(AB + BC) - n_1AD + \frac{\lambda}{2}$$

式中的 $\lambda/2$ 项表示光束 1 在 A 点反射时有半波损失。因为光在由光疏介质入射到光密介质时,在界面上产生半波损失,故进一步推导可得

$$\Delta = 2n_2h\cos i_2 + \frac{\lambda}{2}$$

若不考虑半波损失(实际上,有无半波损失的差别只是亮暗条纹对调,并不影响条纹的其它特征),则

$$\Delta = 2n_2h\cos i_2 \quad (1-15)$$

上式表明,在平行平板干涉中,当干涉条纹定位于无穷远时,光程差与平板的厚度、折射率、入射角大小有关,如果平板的厚度 h 和折射率 n_2 不变,则光程差只与入射角 i_1 有关。在平板干涉中,等光程差线对应于一组入射角相等的光束,所以这种干涉条纹称为等倾干涉条纹。

如果保持平板的厚度很薄,但上下表面并不平行,而是有一个夹角 θ (如图 1-7 所示) 时,当使入射光垂直照射底面,这种情况产生的干涉称为楔形平板干涉(或等厚干涉)。此时光程差仍可按式 (1-15) 近似计算,即

$$\Delta = 2n_2h\cos i_2 + \frac{\lambda}{2}$$

此时由于 n_2 和 $\cos i_2$ 都为常数,因此影响光程差变化的因素只有楔形平板的厚度 h , 所以楔形平板厚度相等的地方光程差也相等,即等光程差线是由平板厚度相等的诸点组成的,也就是说等光程差线就是等厚线。

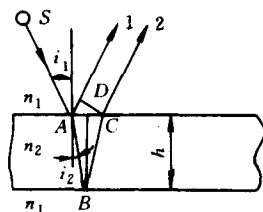


图 1-6 平行平板分振幅干涉图示

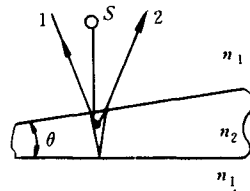


图 1-7 楔形平板等厚干涉图示

六、空间相干性和时间相干性

空间相干性和时间相干性是对相干光源而言的，即光源的相干性的统称。空间相干是指不同空间点在同一时刻辐射场的相关性。空间相干性可用杨氏双缝干涉实验来说明，如图 1-8 所示，令光源的宽度为 b ， S_1P 和 S_2P 分别为狭缝 S_1 和 S_2 到屏幕上的观察点 P 的距离，设 $S_1P = S_2P$ ，光源到狭缝面的距离为 L ，两狭缝的距离为 l ，而且 $b \leq L$ 。由前面的分析可知， S_1 和 S_2 相当于两个新的光源，我们看这两个新光源发出的光波在所观察点 P 的相关性。由于普通光源是由许多独立的原子和原子团组成的，而且任何光源都有一定大小，因此在杨氏双缝实验中，原始光源 S 并不是一个点，而是有一定大小的，即它是由许多辐射元组成的。

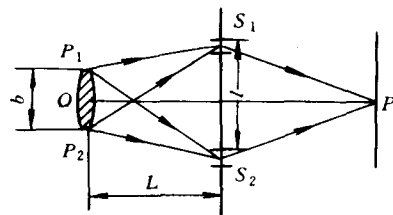


图 1-8 杨氏双缝干涉实验

每个辐射元都发出频率相同的单色光波，且初相位

恒定，则尽管各辐射元发出的初相位不相同。但这些单色光在 S_1 和 S_2 处所形成的总场仍然是频率相同，相位差恒定的单色光波，因而在 P 点能形成干涉，故我们说 S_1 和 S_2 场是相干的。然而，实际上各个独立的辐射元只是在寿命期间内发出近似的单色光，当下一次再发射时，其初相位发生了随机变化，因此，某辐射元在 S_1 处的贡献的场与另一辐射元在 S_2 处贡献的场不会形成干涉，因为在时间上被平均掉了。由同一辐射元在 S_1 和 S_2 处所贡献的场还是能够形成干涉的，因而是相关的。若 S_1 和 S_2 处的场是来自同一群辐射元，只要它们所发出的辐射各自通过 S_1 和 S_2 的衍射而形成的干涉条纹不因互相重叠而相消，便表明 S_1 和 S_2 处的场具有一定的相干性。下面来分析发生这种情况的条件。

设光源中某一辐射点 P_1 在到达 S_1 和 S_2 的辐射之间有一光程差 ($P_1S_1 - P_1S_2$)。若另一辐射点 P_2 的光程差 ($P_2S_1 - P_2S_2$) 不同于 P_1 的光程差，则 P_1 和 P_2 所产生的两组干涉条纹就有相对位移。若 P_1 和 P_2 是光源的两个边缘点，则当 P_1 、 P_2 两辐射点到 S_1 、 S_2 的光程差的差值为平均波长时，由于光源的两辐射点所产生的干涉条纹相互位移的结果，整个条纹刚好被抹平，此时就观察不到任何干涉条纹。由图 1-8 可见，由 O 点发出的辐射其光程差为零， P_1 点辐射的光程差 ($P_1S_1 - P_1S_2$) 可由下式求得

$$(P_1S_1)^2 = L^2 + (l - b)^2/4$$

$$(P_1S_2)^2 = L^2 + (l + b)^2/4$$

$$|P_1S_1 - P_1S_2| = \frac{lb}{2L}$$

当 $|P_1S_1 - P_1S_2| < \bar{\lambda}/2$ 时 ($\bar{\lambda}$ 是光源各辐射点的平均波长)，条纹尚可看见，但当 $|P_1S_1 - P_1S_2| = \bar{\lambda}/2$ 时，条纹就观察不到。所以对缝距为 l 的两狭缝之间的空间相干条件为

$$|P_1S_1 - P_1S_2| = \frac{lb}{2L} \leq \frac{\bar{\lambda}}{2}$$

即

$$\frac{lb}{L} \leq \bar{\lambda} \quad (1-16)$$

由上式决定的光源宽度 b ，就是为获得 S_1 和 S_2 两处辐射场的空间相干光源所必须满足的条件。由此可见，光源的大小对干涉条纹对比度是有影响的，为了获得较好的干涉条纹对比度，必须对光源的大小进行限制。

时间相干性是指在同一空间点上, 由同一光源分割出来的两光振动之间的相位差与时间无关的性质。因此, 上述两列光振动必须是属于同一辐射元在同一时刻所发出的, 只有经过一定时间的延迟, 经过不同路径在不同时刻到达同一空间点上, 我们才能在这一空间点上观察到干涉效应。对这两列光振动之间所允许的相对时间延迟, 或者说它们之间到达同一空间点时允许的光程差, 是由光源所发射的光振动的波列长度所决定的。

图 1-9 为时间相干性实验结构图。图 1-10 为迈克尔逊型干涉仪的原理图。

时间相干性可以通过图 1-10 来说明。由光源发出的光波经分光镜分为两束, 如果分光镜 BS 和两反射镜 M_1 和 M_2 之间的距离相等, 由分光镜分离产生的两束光振动各自经 M_1 和 M_2 反射后可同时到达观察点 P , 显然在 P 处可观察到干涉条纹。但如果分光镜和两反射镜之间的距离不相等时, 则此两列光振动不能同时到达 P 点, 它们之间有一时间延迟 Δt 。两列振动间有一光程差 $2(l_{12} - l_{13})$ (设仪器在空气中 $n = 1$)。如果该光程差比振动波列自身的长度 L 小, 则这两列波在观察点 P 上还有一部分能相干, 因而还可以看到干涉条纹。如果这个光程差大于波列自身长度, 则两列振动完全不相干, 因而看不到干涉条纹。两相干振动波间允许的最大光程差称为光源的相干长度, 它等于光振动的波列自身长度 L 。为了能观察到干涉条纹, 两列光振动到达观察点的时间延迟 Δt 必须小于某值, 即

$$|\Delta t| \leq \frac{L}{c} = \tau \quad (1-17)$$

式中, c 为光的传播速度; τ 为光源的相干时间。

时间相干性可以用光源的单色性 (或者说光源的谱线宽度) 来说明。在观察点 P 的干涉情况是由两列光振动在该点的相位差决定的, 而位相差 δ 与光程差 Δ 有如下关系

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_0}$$

式中, λ_0 为光源波长。

对于 P 点有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2(\overline{OM}_1 - \overline{OM}_2) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\Delta t \times c)$$

因光频 $\gamma = c/\lambda_0$, 故有

$$\delta = 2\pi \gamma \Delta t$$

若 $\delta = 2\pi \gamma \Delta t = m\pi \quad (m = \pm 1, 2, 3, \dots)$

则在 P 点出现干涉亮条纹;

若 $\delta = 2\pi \gamma \Delta t = (2m + 1)\pi \quad (m = \pm 1, 2, 3, \dots)$

则在 P 点出现干涉暗条纹。

若光源存在光谱宽度 $\Delta\gamma$, 则光的总强度是从 γ 到 $(\gamma + \Delta\gamma)$ 范围内各频率分量之和。

若

$$(\gamma + \Delta\gamma)\Delta t - \gamma\Delta t \leq 1$$

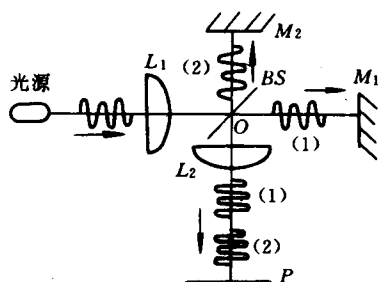


图 1-9 时间相干实验

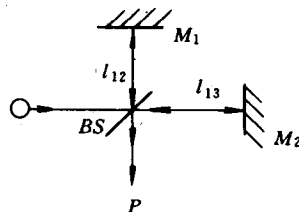


图 1-10 时间相干性示意图

则各个频率分量产生的干涉条纹虽有偏离,但各个频率分量求和之后仍能出现干涉条纹,故可得到

$$\Delta t \leq \frac{1}{\Delta \gamma} \quad (1-18)$$

上式说明,当光源的光谱宽度 $\Delta \gamma$ 很小时,允许两列光振动相对时间延迟 Δt 可很大,也就是说光源的单色性越好,则相干时间越长。

综上所述,光源的时间相干性存在三种等同的表示形式,即

- 1) 相干时间 τ 。
- 2) 相干长度或波列长度 L 。
- 3) 光源频率分布范围或称谱线宽度 $\Delta \lambda$ 。

这些表示形式相互间的关系为

$$L = c \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta \gamma} \quad (1-19)$$

$$L = \frac{c}{\Delta \gamma} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \quad (\Delta \gamma = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda) \quad (1-20)$$

七、自然光和偏振光

光波是横波。横波的特点是振动方向和它的传播方向永远垂直。在光波的传播中,电矢量的振动只局限于某一确定的方向的光称为线偏振光(或称平面偏振光),也就是说,该光的电矢量的取向只局限于某一平面内。除了线偏振光外,还有一种偏振光,它的电矢量随时间作有规律的变化,电矢量末端在垂直于传播方向的平面上的轨迹呈椭圆或圆形。这样的光称为椭圆偏振光或圆偏振光。线偏振光或圆偏振光都是椭圆偏振光的特殊情况。一般自发辐射的光源所发出的光都不是偏振光,由于自发辐射的偶然性,所产生的光的电矢量取向随时间作无规律的变化,而且各电矢量的时间平均值是相等的,如图 1-11 所示,这种光称为自然光。自然光内任何取向不同的电矢量不能合成为一电矢量。

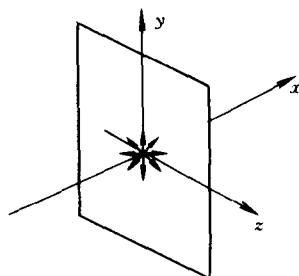


图 1-11 自然光的电矢量振动方向

介于线偏振光和自然光之间还有一种光,它的电矢量在某一方向上的光强最强,在另一方向上的光强最弱(但不为零),光强最强的方向与最弱的方向相差 90° ,这样的光称为部分偏振光。这种光的振动虽然各方向都有,但不同方向的振幅大小不同,其形式如图 1-12 所示。同样,部分偏振光内任何取向不同的电矢量不能合成为一电矢量。而圆偏振光或椭圆偏振光是由两个频率相同,具有固定相位差,并且振动方向互相垂直的电矢量合成的结果。它们可以在任何方向上进行矢量分解。

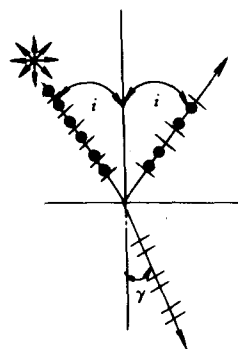


图 1-12 自然光在折射和反射后产生偏振

八、反射光和折射光的偏振

自然光在各向同性介质的分界面上反射和折射时,一般情况下,反射和折射光都是部分偏振光,如图 1-12 所示。在反射光中垂直于纸面的振动(图中以点表示)占主导地位;在折射光中平行于纸面的振动(图中以垂直于传播方向的短线表示)占主导地

位。布儒斯特指出, 反射光中的偏振光占的比例取决于入射角 i , 当入射角 i 满足

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21} \quad (1-21)$$

时, 反射光变成完全的偏振光。式中 n_{21} 是介质 2 对介质 1 的相对折射率, i_0 称为起偏角。这个公式称为布儒斯特定律。

九、双折射现象与起偏器

在各向同性介质中, 当光线由一介质入射到另一介质时, 将按折射定律发生折射。然而, 对于光学性质随方向而异的一些晶体, 一束入射光常有分解为两束折射光的现象。这种现象称为双折射现象。其中有一条折射光线始终遵循折射定律, 称它为寻常光线, 以 o 表示; 另一条光线不遵循折射定律, 而且也不在入射面内, 称为非寻常光线, 以 e 表示。但是, 当寻常光和非寻常光沿晶体的某一固定方向入射时, 不发生双折射现象, 这个方向称为晶体的光轴。实验证明, 寻常光和非寻常光是振动方向互相垂直的线偏振光。利用方解石晶体的双折射性质可以制成一种叫做尼科耳棱镜的偏振器, 如图 1-13 所示。自然光入射到尼科耳棱镜后, 由于 o 光和 e 光的折射率不同而分开 ($n_o = 1.6584$, $n_e = 1.4864$)。 o 光以约 76° 角入射到胶合面上, 胶层的折射率 $n = 1.55$ (加拿大树胶对钠光而言), 对 o 光来说是从光密介质进入光疏介质, 超过临界角

$$\arcsin \frac{1.55}{1.658} = 69.2^\circ$$

故发生全反射, 折向底边。而 e 光是从光疏介质进入光密介质, 所以能透过胶层再通过第二个棱镜射出, 成为一振动方向与纸面平行的线偏振光。尼科耳棱镜是广泛应用的一种偏振器件, 但它的尺寸有限(截面达 $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ 已少见)。另外, 对透射的 e 光来说, 它是一个光线斜入射的平行平板, 出射光线对入射光线要平移一个距离, 因此它的应用受到一定限制。

另一种经常应用的偏振器件是渥拉斯顿棱镜, 其结构形式如图 1-14 所示。它是由两个直角的方解石棱镜胶合而成(也有用石英晶体制成的)。棱镜 ABC 的光轴平行于直角边 AB , 棱镜 ACD 的光轴垂直于纸面。当自然光垂直入射到 AB 面上时, o 光和 e 光在棱镜 ABC 内没有分开, 但二者却以不同的速度传播。由于第二棱镜 ACD 的光轴垂直于第一棱镜的光轴, 所以电矢量的方向垂直于第一棱镜主截面的 o 光, 对于第二棱镜来说, 正是电矢量的方向平行于主截面的 e 光。这样一来, 振动方向垂直于纸面的 o 光在两棱镜的分界面上是由光密介质向光疏介质的折射, 折射光线远离法线; 而振动方向在纸面上的 e 光则是由光疏介质向光密介质的折射, 折射光线靠近法线, 结果使 o 光和 e 光在第二棱镜内分开。第二棱镜的这两光线在 CD 面上再次产生一次由光密到光疏的远离法线的折射。最后由渥拉斯顿棱镜射出的光, 是与第一棱镜中的 o 光和 e 光对应的两个线偏振光。在设计渥拉斯顿棱镜时应该用折射定律来计算这两束光的夹角。在粗略地估计这个夹角时, 可以用式(1-22) 所给公式进行计算。设 γ 为经渥拉斯顿棱镜

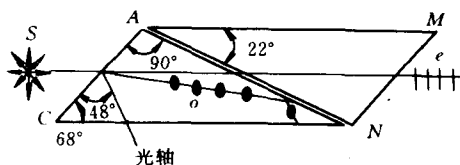


图 1-13 尼科耳棱镜结构

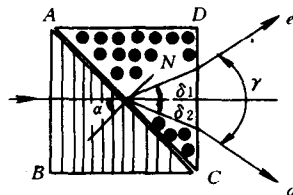


图 1-14 渥拉斯顿棱镜结构

出射的两束光线的夹角,则

$$\gamma = 2\arcsin(n_e - n_o)\operatorname{tg}\alpha \quad (1-22)$$

式中, α 为入射光线在胶合面上的折射角。

十、偏振光干涉

偏振光干涉是一种特殊的干涉。与一般的干涉相比,所不同的是相干光(o 光和 e 光)的

振动方向互相垂直。对于这种干涉有平行的线偏振光的干涉和

会聚的线偏振光干涉两种,但我们的应用大多属于平行的线偏振光干涉。下面分析实现偏振光

干涉的方法。如图 1-15a 所示,起偏器的主轴为 OA , 检偏器的

主轴为 OB , 而中间晶体板的光轴与 OA 成 θ 角并垂直于光束的

轴线(关于起偏器和检偏器的性质将在下面有关章节介绍)。光束通过起偏器后,在 OA 方向的线偏振光振幅设为 A_o 。在晶体板表面上分解为振幅为 A_o 和 A_e 的 o 光和 e 光(见图 1-15b), 穿过晶板后的 o 光、 e 光的相位

差为

$$\delta_k = \frac{2\pi}{\lambda_0} l(n_o - n_e) \quad (1-23)$$

从图 1-15b 可看出, o 光、 e 光在 OB 上分解为

$$A_{2o} = A_o \cos \theta = A_o \sin \theta \cos \theta \quad (1-24)$$

$$A_{2e} = A_e \cos \theta = A_e \cos \theta \sin \theta$$

而它们的位相差除了 δ_k 外,还应加上由 A_o 和 A_e 在 OB 上的投影所引起的相位差 π 。因而两相干光的总相位差为

$$\delta_{\perp} = \delta_k + \pi = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_o - n_e) + \pi \quad (1-25)$$

当 $\delta_{\perp} = 2k\pi (k = 1, 2, 3, \dots)$ 时,干涉信号合振幅最大;当 $\delta_{\perp} = (2k + 1)\pi$ 时,干涉信号合振幅最小。

若起偏器与检偏器的主轴平行时,则

$$A_{2o} = A_o \sin \theta = A_o \sin^2 \theta$$

$$A_{2e} = A_e \sin \theta = A_e \cos^2 \theta$$

这时它们的总相位差只取决于 δ_k , 即

$$\delta_{//} = \delta_k = \frac{2\pi l}{\lambda_0} (n_o - n_e)$$

无论是两个偏振器件的主轴平行放置,还是垂直放置,只要 $\theta = 45^\circ$, 那么 $A_{2o} = A_{2e} = A_o/2$ 。但是在 $\theta \neq 45^\circ$ 时,偏振器件主轴垂直放置,光在第二个偏振器件主轴上的分振幅相等;而对于平行放置,光在第二个偏振主轴上的分振幅不相等,即两相干光的振幅不相等。

十一、多普勒效应

多普勒效应是一种很重要的波动现象。以声学中的多普勒现象为例,如果声源以速度 u 离

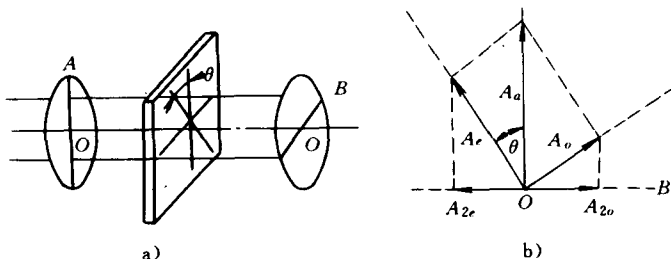


图 1-15 偏振光的干涉图示

a) 偏振器件布局 b) 偏振状态

开观察者，则观察者听到的声频率为

$$f' = f \frac{1}{1 + u/v} \quad (1-26)$$

式中， f 为声源静止时的声频率； v 为声速。

如果声源静止，而观察者以速度 u 离开声源，则由观察者听到的声频率为

$$f' = f \left(1 - \frac{u}{v} \right)$$

即使声源与观察者的相对速度是一样的，由上述两个方程得到的频率也是不一样的。

多普勒指出：这个效应适用于一切波动过程，发光体的颜色就像发声体的音调一样，必定由于发光体和观察者的相对运动发生变化，这就是天文学上的谱线移动的由来。

对于光波来说，不论光源与观察者的相对速度如何，观得的光速都是一样的。即测得的光频率与波长虽有所变化，但两者的乘积即光速保持不变。光源从观察者离开与观察者从光源离开有完全相同的多普勒频率。由相对论给出的光的多普勒频率为

$$f' = f \frac{1 - \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}} \quad (1-27)$$

利用二项式展开，当 u/v 比值很小而略去高次项时，并且用 v 代换 u ，就得到

$$\Delta f = (f - f') = f \frac{v}{c} \quad (1-28)$$

在双频激光干涉仪中，可动棱镜的移动速度是 v 。由于光线射入可动棱镜，又从它那里返回，这相当于光电接收器相对光源的移动速度是 $2v$ ，故有

$$\Delta f = f \frac{2v}{c} \quad (1-29)$$

这就是由可动棱镜移动而产生的光的频率变化，称为多普勒频差。假定可动棱镜在时间 t 内移动了距离 L （也就是待测长度），由于

$$v = \frac{dL}{dt}$$

代入式 (1-29)，并用 $c/f = \lambda$ ，得

$$dL = \frac{\lambda}{2} \Delta f dt$$

此式积分就得待测长度

$$L = \int_0^t \frac{\lambda}{2} \Delta f dt \quad (1-30)$$

而 $\int_0^t \frac{\lambda}{2} \Delta f dt$ 是在时间 t 内，计数器计得的脉冲数 N ，因此式 (1-30) 就变成

$$L = \frac{\lambda}{2} N \quad (1-31)$$

这是由光的多普勒效应推导得的激光干涉仪的测长的基本公式。它不仅适用于单频干涉仪，也适用于双频干涉仪。然而在双频干涉仪中，干涉是两个光频率的“拍”，它的频差公式同单频干涉仪稍有差别，取如下的形式

$$f_1 + \Delta f - f_2 = (f_1 - f_2) + \Delta f \quad (1-32)$$