金融中等专业学校教材

# 保险数学

《保险数学》编写组

西南财经大学出版社

(川)新登字 017 号
责任编辑：杨　涛　傅　虹

金融中等专业学校教材
保险数学
《保险数学》编写组
*
西南财经大学出版社出版
西南财经大学出版社发行
四川省安县印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　开本：32 开　印张：12.375　字数：250 千字
1993 年 1 月第一版　1993 年 1 月第一次印刷
印数：1—4000 册
书号：ISBN7-81017-482-7/F·369　定价：5.90 元

# 编写说明

本书是按照中国人民保险公司中等专业学校教学计划要求，为教学需要而编写的教材，也可供在职人员岗位培训或自学使用。

本书是由中国人民银行教育司和中国人民保险公司组织有关人员进行编写，经中国金融教材工作委员会审定而成的。

编写组组长：闵宝瑛

编写组成员：廖　军、黄祖德（第1章），孙锦霞（第2章），
周广仁（第3章），梁军礼（第4、5章），
梁学忠（第6、7、8、9、10章）

总　纂：闵宝瑛

主　审：李中杰

副主审：胡炳志

现经我们审定，该书可以作为保险中等专业学校教材出版，各单位在使用过程中有何修改意见和建议，请函寄中国人民银行教育司教材处。

**中国金融教材工作委员会**

1992年9月25日

# 目　录

# 第一章　函数、极限与连续

微积分学不仅在自然科学、工程技术中有着广泛的应用，而且在研究经济问题时也是必不可少的数学工具. 微积分学用运动的观点研究问题，极限法是这种研究方法的具体表现，是微积分学的基本分析方法. 连续性是函数的重要属性，连续函数具有许多重要性质，是微积分学研究的主要函数. 因此，函数、极限与连续是微积分学的重要基本概念.

本章将在复习、加深函数概念的基础上，给出极限的意义，讨论极限的性质及其运算法则，介绍函数的连续性.

## §1—1　函数

### 一、函数概念

在实际问题中，变量之间不是孤立的，而是存在着某种依赖关系.

例 1　在重力作用下，物体从离地面高 h 米处自由下落，不计空气的阻力时，下落路程 s 与时间 t 满足关系式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \qquad \left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \tag{1}$$

其中 $g=9.8$ 米/秒$^2$ 是重力加速度为常量.

t 与 s 是物体下落过程中的两个变量，当 $t=0$ 时，$s=0$；

当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时，$s=h$，表示物体已到地面. t 的变化范围是从 0 到 $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. 在这个范围内 t 的每一个值，由公式(1)即可得到对应的 s 的值. 公式(1)给出了变量 t 与变量 s 之间的依赖关系，即函数关系.

例 2　某气象台用自动记录仪画出了当地某天的气温变化图(见图 1—1). 图中纵轴表示气温 T(℃)，横轴表示时间 t(小时). 从 0 到 24 小时内任一时刻 t，根据这条曲线就可以找出气温 T 的唯一确定的值与之对应. 这条曲线给出了变量 T 与变量 t 之间的依赖关系，即函数关系.

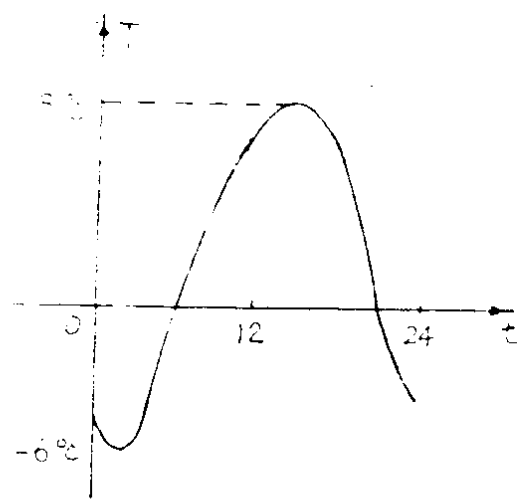


图 1—1

由此看出，在同一运动过程中，两个变量间存在着某种依赖关系，而这些依赖关系具有如下的共同特征：都有两个数集和一个对应关系；对一个数集中的任一个数，按照对应关系都对应另一个数集中的唯一一个数. 因此，有如下定义：

**定义**　设非空数集 A 与 M，若存在某种对应规则 f，对于 A 中的每一个元素 x，都有数集 M 中唯一的元素 y 与之对应，则称对应规则 f 是定义在数集 A 上的函数，表示为：

$$f: A \longrightarrow M$$

与数 x 对应的数 y 称为 f 的函数值，记为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 A 称为函数 f 的定义域，函数

值的集合称为 f 的值域，表示为 f(A)，即

$$f(A)=\{y\,|\,y=f(x),x\in A\}$$

显然，上面两个例子，都是函数的实例.

函数概念中包含三个因素，即函数的定义域 A、对应关系 f 和函数值所在的数集 M. 但函数值 $y=f(x)$ 是由定义域 A 中的元素 x 通过对应关系 f 而唯一确定的实数. 因此，通常把 M 取为全体实数 R. 于是函数的基本要素是函数的定义域和对应规则. 它们称为函数的两要素. 从而记号

$$y=f(x),\qquad x\in A$$

就表示了一个函数.

例如，例 1 中

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\qquad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$

就表示了自由落体的运动函数.

如果一个函数的对应规则 f 用数学式表达，而其定义域就是使“式子”有意义的自变量 x 取值的范围(这种定义域又称为自然定义域或存在域)，这时定义域 A 就可省去不写. 例如，$y=\sqrt{\lg x}$ 所表示的函数的定义域是指 $A=\{x\,|\,x\geqslant 1,x\in R\}$，对于这种情况，我们简单地说“函数 f(x)”或“函数 $y=f(x)$”.

由上所述的原因，在研究由“数学式”给出的函数而又未指明定义域时，确定其定义域(自然定义域)就是必须的事情了.

例 3　求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\ln(3-x)+\dfrac{1}{\sqrt{49-x^2}}$;

(2) $y=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+7}}$.

解　(1)要使 $f(x)$ 有意义, $x$ 必须满足条件:

$$\begin{cases}3-x>0\\49-x^2>0\end{cases}$$

解之得函数 $f(x)$ 的定义域是: $(-7,3)$.

(2)要使 $f(x)$ 有意义, $x$ 必须满足条件:

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+7}\geqslant 0\\x+7\neq 0\end{cases}$$

解之得函数 $f(x)$ 的定义域是:

$(-\infty,-7)\cup[5,+\infty)$.

## 二、函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种:

(1)解析法:当函数的对应法则借助于数学式子给出时,称这种表示函数的方法为解析法. 例如上述例 1 及

1) $y=x^2-2x+3$, $(x>1)$; 2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in R$;

3) $y=\sin x+\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

都是解析法表示的函数. 它将是我们表达函数的主要形式.

应该注意的是,一个函数可以在其定义域内的不同部分用不同的解析式表示. 例如:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in(0,+\infty);\\0, & x=0;\\-x+1, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$$

这种形式的函数,称为分段函数.

又如带有绝对值符号的函数也可以表示为分段函数：

$$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

再一个很重要的分段函数是：

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2)列表法：若函数 $f:A\longrightarrow M$ 是用含有自变量 x 的值与因变量 $y=f(x)$ 的对应值的表格表示的，则称为列表法. 通常所用的三角函数表、平方表、对数表都是列表法表示函数的例子.

(3)图象法：用平面坐标系中的图形表示函数的方法称为函数的图象法. 例如例 2 中表示函数就是用的图象法. 还有医学上的心电图、脑血流图等都是图象法表示函数的例子.

在函数的研究中，常常要考查函数在某一点及附近的性质，为了叙述的方便，我们引入邻域的概念.

设 $\alpha$ 与 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$.

满足不等式 $|x-\alpha|<\delta$ 的全体实数称为点 $\alpha$ 的 $\delta$ 邻域，记作

$$U(\alpha,\delta)=\{x\,|\,|x-\alpha|<\delta\}$$

或简记为 $U(\alpha)$. 点 $\alpha$ 叫做这个邻域的中心，$\delta$ 叫做这个邻域的半径.

满足不等式 $0<|x-\alpha|<\delta$ 的全体实数称为点 $\alpha$ 的空心 $\delta$ 邻域，记为

$$U^{\circ}(\alpha,\delta)=\{x\,|\,0<|x-\alpha|<\delta\}$$

或简记为 $U^{\circ}(\alpha)$. 这里 $0<|x-\alpha|$ 就表示 $x\neq\alpha$.

## 三、函数的四个主要特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，如果存在一个正数 M，对于 A 中的任一个 x，都有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上是有界的，M 称为函数 $f(x)$ 在 A 上的一个界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上是无界的.

函数 $f(x)$ 在 A 上有界，从几何上看，它的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(见图 1—2).

例如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的. 因为对任意的一个实数 x，只要取 $M=1$，都有

$$|\sin x|\leqslant 1.$$

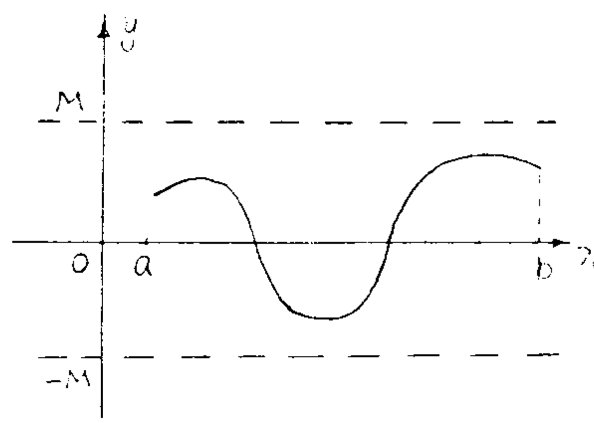

图 1—2

函数 $f(x)$ 在 A 上无界，则找不到直线 $y=\pm M$，使它的图形全落在这两条直线之间.

例如函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的(见下页图 1—3).

常见的正弦函数、余弦函数都是有界函数，指数函数、对数函数、正切函数、余切函数及幂函数在其定义域上都是无界函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，如果对于 A 上任意的

$x_1$、$x_2$，且 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad [f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

则称 f(x)在 A 上单调递增(单调递减).

又若 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)[f(x_1)>f(x_2)]$$

则称 f(x)在 A 上严格单调递增(严格单调递减).

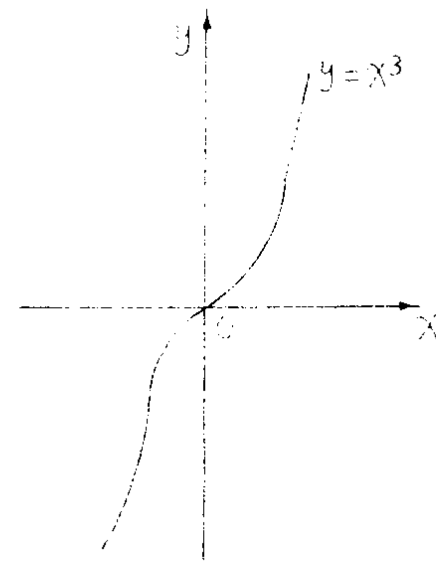


图 1—3

上述函数统称为单调函数.若 A 是区间，称为函数 f(x)的单调区间.

例如，$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调递增(见图 1—3)；$y=\mathrm{sgn}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增(见图 1—4)；函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，但在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数(见下页图 1—5).

3. 函数的奇偶性

设函数 f(x)在数集 A 上有定义.如果对任意的 $x\in A$，有 $-x\in A$，且 $f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$)，则称函数 f (x)是奇函数(或偶函数).

例如，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数；函数 $y=x^3$，$y=\sin x$ 是奇函数；$y=\cos x+\sin x$ 既不是偶函数也不是奇函数.

奇函数的图形关于原点对称(见下页图 1—6)，偶函数的图形关于纵轴对称(见下页图 1—7).

4. 函数的周期性

设函数 f(x)在数集 A 上有定义.如果存在正数 l，对任意

的 $x\in A$，有 $x\pm l\in A$，且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数，$l$ 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

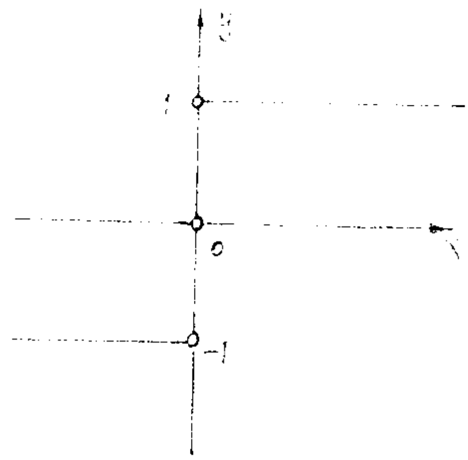


图 1—4

显然，周期函数有无穷多个周期. 若在无穷多个周期中，有一个最小正数 T，则称 T 为周期函数的最小正周期，简称为周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数. 因为

$$\sin(x+2\pi)=\sin x.$$

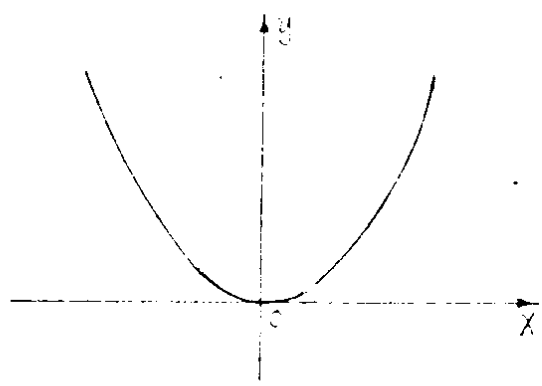


图 1—5

由周期函数的定义知，周期函数的定义域必然是双方无界的数集，但未必是区间 $(-\infty,+\infty)$.

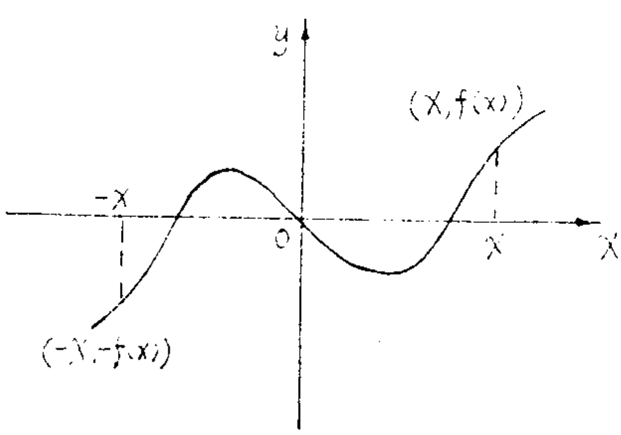


图 1—6

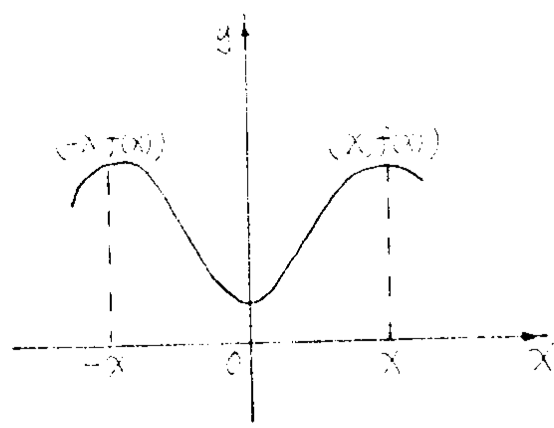


图 1—7

例如，函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是 $x\neq(k+\frac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$，但它是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

## 四、复合函数与反函数

1. 复合函数

例如，函数

$$y=\sin x^2$$

可以看成函数 $y=\sin u, u=x^2$ 用"对应关系传递"的方法生成的函数，即"y 与 u 对应"，"u 与 x 对应"，于是通过"媒介"u 得到"y 与 x 对应". 函数 $y=\sin x^2$ 叫做函数 $y=\sin u, u=x^2$ 的复合函数.

**定义 1** 设函数 $y=f(u), u\in A_f, u=g(x), x\in A_g$. 若函数 $u=g(x)$ 的值域 $g(A_g)$ 与函数 $y=f(u)$ 的定义域 $A_f$ 的交集非空，则称 y(通过 u)与 x 的函数关系 $y=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的复合函数，$y=f(u)$ 称为外函数，$u=g(x)$ 称为内函数，变量 u 称为中间变量.

例 1 求下列各组函数的复合函数及复合函数的定义域.

(1) $y=f(u)=e^u$，$u=\sin x$；

(2) $y=f(u)=\sqrt{u}, u=g(x)=1-x^2$.

解 (1)由 $y=e^u, u=\sin x$ 复合而生成的复合函数是 $y=e^{\sin x}$.

因为 $u=\sin x$ 的定义域为一切实数 R 且其函数值域全部落在 $y=e^u$ 的定义域 R 中，因此，复合函数 $y=e^{\sin x}$ 的定义域是实数域 R.

(2)由 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2$ 复合而生成的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $u\geqslant 0$，所以必须 $1-x^2\geqslant 0$，这样

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1,1]$,而 $u=1-x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

一般情况下,复合函数的定义域是内函数定义域的子集.

复合函数不仅可以由两个函数,也可以由多个函数相继进行有限次复合而成.

例如,函数

$$y=\log_a\sqrt{1+x^2}\quad(a>0,a\neq1)$$

可以看成是以下三个函数相继复合而成:

$$y=\log_a u,\quad u\in(0,\infty);$$

$$u=\sqrt{z},\quad z\in[0,\infty);$$

$$z=1+x^2,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 2　指出函数 $y=\mathrm{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$的复合过程.

解　函数 $y=\mathrm{tg}^5\sqrt[3]{\ln\arcsin x}$是由下面五个简单函数相继复合而成:

$$y=u^5,\quad u\in R;$$

$$u=\mathrm{tg}v,\quad v\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\text{ 为整数};$$

$$v=\sqrt[3]{z},\quad z\in R;$$

$$z=\ln t,\quad t\in(0,\infty);$$

$$t=\arcsin x,\quad x\in[-1,1].$$

在复合函数的讨论中,不仅能把几个简单函数构成复合函数,而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数,即指出它的复合过程.注意,不是任何两个函数都可进行复合运算.例如,函数 $y=\sqrt{u}$,$u=-(1+x^2)$就不能进行复合运算,因为函数 $u=-(1+x^2)$的值域$(-\infty,-1]$与 $y=\sqrt{u}$的定义域$[0,\infty)$的交集为空集.

2. 反函数

在函数概念中，自变量与因变量的关系是相对的. 我们不仅研究变量 y 随变量 x 变化的情况，有时也要研究变量 x 随变量 y 变化的情况. 例如，在自由落体的运动函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \quad t\in[0,T] \tag{1}$$

中，时间 t 是自变量，下落距离 s 是因变量，表示 s 随 t 变化而变化的规律. 如果问题是要由物体下落的距离 s 来确定所需时间 t，即找出 t 随 s 变化而变化的规律

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}, \quad s\in[0,H] \tag{2}$$

其中 H 是物体开始下落时与地面的距离. 函数(2)叫做函数(1)的反函数.

**定义 2** 设函数 $y=f(x)$，$x\in A$，如果对任意 $y\in f(A)$，有唯一 $x\in A$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(A)$ 上定义了一个函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y), \quad y\in f(A).$$

由定义 2 可以看到，如果 $y=f(x)$，$x\in A$，存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(A)$，则按对应关系 f，A 与 f(A) 之间是一一对应的，即对 A 中任意的 $x_1$ 与 $x_2$，且 $x_1\neq x_2$，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的对应关系、定义域和值域都是不同的，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域恰好是原来函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 因此，函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 也是函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(A)$ 的反函数，或者说它们互为反函数.

例 3 求下列函数的反函数.