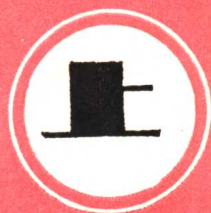


数学分析讲义学习指导书

—附解题方法提要

刘玉琨 杨奎元 吕凤 编



高等教育出版社

数学分析讲义学习指导书

——附解题方法提要

上 册

刘玉琚 杨奎元 吕凤 编

高等教育出版社

本书是与高等教育出版社出版的刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(1981年第2版)配套的学习指导书。按照讲义体例,逐节对应编写。每节包括基本内容,学习要求,答疑辅导,补充例题,练习题解法提要五部分,每章末附有自我测验题,书末给出其解答。

本书可作数学专业学生,中学教师,自学读者,函授学员学习数学分析的辅导书,也可作数学分析习题课教学参考书。

数学分析讲义学习指导书

——附解题方法提要

上册

刘玉琏 杨奎元 吕凤 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

水利电力出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 314 000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 00001—330070

书号 13010·01364 定价 2.65 元

前 言

本书是与刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(高等教育出版社1981年第二版,以下简称《讲义》)配套的学习指导书。

由于《讲义》受教学内容、教学时数、文字数量等限制,因而概念的剖析,定理的意义,重要的反例,典型的例题,分析的方法等诸多问题不可能在《讲义》中一一详述。我们认为,使用《讲义》学习数学分析的读者,特别是自学读者,仅有《讲义》是不够的,还应该与《讲义》配套的学习指导书,以弥补《讲义》之不足。基于这个认识,我们编写了这本辅导性的数学分析学习指导书,以期有利于读者理解《讲义》的内容,掌握分析的方法,提高论证问题的能力。它既是自学读者和函授学员的辅导书,又是日校学生的指导书,也可作为数学分析习题课的教学参考书。

本书是按照《讲义》的体例逐节对应编写的。每节由五个部分组成:

一、基本内容 以简要文字阐明该节的基本内容,有的并指出重点、难点,及其在本章和本书中的地位 and 作用等。

二、学习要求 参照教学大纲和该节的内容,从理论、计算、方法、能力等方面向读者提出具体要求。

三、答疑辅导 采用生问师答的方法编写。共回答了208个问题(上册121个问题,下册87个问题),每节数量不等。问题涉及很多方面:诸如概念实质,定理意义,等价命题,重要反例,分析方法,定理对比,等等。

四、补充例题 在《讲义》已给例题的基础上又补充了283个例题(上册155题,下册128题)。它们是从大量题中筛选出来的,

12A5P/62

力求在解法上有一定的典型性,在内容上有些补充和提高,并注意选取不同类型的题目和分析中常用的技巧.一般每节选出两个例题,对其解题思路,论证方法,例题意义等作了简要的说明,有的在说明之后给出几个用同法可解的类似题,供读者练习.我们认为,读者学习一些典型例题的论证方法和解题技巧是必要的,它有利于读者在摹仿中提高,在摹仿中创新.

五、练习题解法提要 选择了该节练习题中较难的题或有意义的题给出了解法提要.希读者在提要的启发和引导下独立完成该节的练习题.

每节的练习题就是很好的“自我测验题”.为了读者在稍高的水准上自我检查学习成绩,在每章之后又增补了“自我测验题”.一般是10~15题,个别难题注上了星号“*”.每册书的最后附有“自我测验题的解答”,供读者答完题后参照评定.读者要认真思考,力争独立完成,从而提高自己论证问题的能力.只有经过反复思考,百思不得其解时,才参看解答.不能全部正确答完“自我测验题”的读者也不要丧失学习信心,因为对不同基础和不同水平的读者有不同的学习要求.

本书稿承蒙四川大学秦卫平副教授和高等教育出版社本书的责任编辑文小西同志认真审改,纠正了一些错误和不妥之处,并提出了宝贵的修改意见和建议.他们为提高本书的质量付出了辛勤的劳动,在此向他们表示衷心感谢.

编写本书,我们为自己确定了较高的标准,但是由于水平不高和能力有限,实感力不从心,不妥之处甚至错误仍在所难免,恳请读者和从事数学分析课教学的老师们不吝赐教,敬希提出具体的修改意见和建议.顺致谢意.

编者

1985.5.于长春东北师大数学系

目 录

第一章 函数	1
§ 1.1. 函数.....	1
§ 1.2. 几种特殊的函数.....	10
§ 1.3. 复合函数与反函数.....	19
第一章 自我测验题.....	27
第二章 极限	29
§ 2.1. 数列极限.....	29
§ 2.2. 收敛数列.....	38
§ 2.3. 函数极限.....	58
§ 2.4. 函数极限定理.....	66
§ 2.5. 无穷小与无穷大.....	80
第二章 自我测验题.....	88
第三章 连续函数	90
§ 3.1. 连续函数.....	90
§ 3.2. 初等函数的连续性.....	106
第三章 自我测验题.....	116
第四章 实数的连续性	119
§ 4.1. 实数连续性定理.....	119
§ 4.2. 闭区间上连续函数性质的证明.....	132
第四章 自我测验题.....	143
第五章 导数与微分	145
§ 5.1. 导数.....	145
§ 5.2. 求导法则及导数公式.....	159
§ 5.3. 隐函数与参数方程求导法则.....	171
§ 5.4. 微分.....	178
§ 5.5. 高阶导数与高阶微分.....	182
第五章 自我测验题.....	194

第六章 微分学基本定理及其应用	197
§ 6.1. 中值定理.....	197
§ 6.2. 洛比达法则.....	216
§ 6.3. 泰勒公式.....	224
§ 6.4. 导数在研究函数上的应用.....	237
第六章 自我测验题.....	257
第七章 不定积分	260
§ 7.1. 不定积分.....	260
§ 7.2. 分部积分法与变量替换法.....	264
§ 7.3. 有理函数的不定积分.....	275
§ 7.4. 简单无理函数与三角函数的不定积分.....	282
第七章 自我测验题.....	290
第八章 定积分	291
§ 8.1. 定积分.....	291
§ 8.2. 可积准则.....	294
§ 8.3. 定积分的性质.....	314
§ 8.4. 定积分的计算.....	325
§ 8.5. 定积分的应用.....	346
§ 8.6. 定积分的近似计算(略).....	362
第八章 自我测验题.....	362
自我测验题解答	365

第一章 函 数

§ 1.1. 函 数

一、基本内容

本节有五段.

第一段主要是为第二段讲函数概念所给的预备知识.

第二段的函数概念是本节的重点,也是本章的核心.它是在今后学习中时刻离不开的基础概念.

《讲义》将“对应关系 f 称为函数”,那么两个对应关系(函数) f 与 g 的四则运算是什么意思呢?这就是第三段回答的内容.从而应用函数的四则运算能够构造新的函数.

几何直观是学习和研究数学的方法之一.第四段给出的“函数的图象”,既有利直观理解函数概念.又能从函数的几何性态直观看到函数的性质.顺便介绍几个有用的函数:整数函数 $y = [x]$, 小数函数 $y = \{x\}$, 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x$, 狄利克莱函数 $y = D(x)$.

第五段给出了一类特殊的定义在自然数集 N 上的函数——数列.它是第二章讲数列极限的必备知识.

二、学习要求

函数是高等数学最重要最基础的概念之一.要求:

1. 深刻理解函数定义.(何谓函数?怎样确定函数的定义域?何谓函数值域?)

2. 知道函数的四则运算. (函数的四则运算,为什么要定义?怎样定义的?)

3. 会描绘简单函数的图象. (何谓函数的图象?它有什么特征?知道函数 $y=[x]$, $y=\{x\}$, $y=\operatorname{sgn} x$ 的意义及其图象.)

三、答疑辅导

问 1. 我们学过的两个函数定义各有什么缺陷?

答 我们已经学过两个函数定义: 中学《数学》的函数定义和《讲义》中的函数定义.

中学《数学》的函数定义(简称定义 1): “如果在某变化过程中有两个变量 x, y , 并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值, 按照某个对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就是 x 的函数, x 叫做自变量, x 的取值范围叫做函数的定义域, 和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域”.

定义 1 的核心是“ y 是 x 的函数”. 它由两部分内容构成: 一是“ x 在某个范围内”, 即函数的定义域; 二是“ y 都有唯一确定的值和它(x)对应”, 即对应法则(或对应规律, 对应关系). 于是, 给出了自变量 x 取值范围与对应法则, 函数就确定了. 因此有的书把定义域与对应法则称为定义 1 所定义的函数的两个要素.

在定义 1 中, “ y 是 x 的函数”, 同时 y 又是 x 的函数值($y=f(x)$), 这样就混淆了函数与函数值之间的差别. 这是定义 1 的主要缺陷. 从这个意义上说, 定义 1 不是理想的函数定义.

《讲义》中的函数定义(简称定义 2): “有非空数集 A 与实数集 $\mathbf{R}$, 如果对数集 A 中的任意数 x , 按照对应关系 f 都对应实数集 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数 y , 称对应关系 f 是定义在数集 A 上的函数, 表为

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值, 表为 $y=f(x)$. x 称为自变量,

y 称为因变量. 数集 A 称为函数 f 的定义域, 函数值的集合称为函数 f 的值域, 表为 $f(A)$, 即

$$f(A) = \{y | y = f(x), x \in A\} \subset \mathbf{R}.$$

定义 2 的核心是“对应关系 f 是定义在数集 A 上的函数”. 它由三部分内容构成: 一是定义域 A ; 二是函数值所在的实数集 $\mathbf{R}$; 三是对应关系 f . 于是, 给出了非空数集 A , 实数集 $\mathbf{R}$ 以及对应关系 f , 函数就确定了. 因此有的书把定义域、实数集 $\mathbf{R}$ 和对应关系 f 称为定义 2 所定义的函数的三个要素. 《讲义》的函数符号 $(f: A \rightarrow \mathbf{R})$ 仍采用传统的用函数值的符号 $y = f(x)$ 表示函数. 这样做, 正如讲义所说, 只是为了在具体讨论中的方便而作的约定.

定义 2 突出了“对应关系 f ”是函数定义的核心, 它严格地区分了函数与函数值, 比定义 1 前进了一步. 虽然定义 2 所定义的函数是比较严格的, 但是什么是“对应关系”, 在定义中并没有予以明确定义, 仍然是函数定义的一个缺陷. 例如, 两个函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{与} \quad g(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$$

有相同的定义域和值域, 它们却有不同运算, 那么这两个对应关系 f 与 g 是否相同呢? 因此, “对应关系”一词仍有进一步明确的必要. 从这个意义上说, 定义 2 也不是最理想的函数定义. 为此我们下面补充介绍严格的函数定义(简称定义 3):

设有两个非空数集 A 与 B . 若对任意 $x \in A$ 与 $y \in B$, 有序对 (x, y) 的集合, 称为数集 A 与 B 的乘积集, 表为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

定义 设有两个非空数集 A 与 B , 若 f 是乘积集 $A \times B$ 的子集, 且对任意 $x \in A$, 总存在唯一一个 y , 使 $(x, y) \in f$, 称 f 是定义在 A 上的函数, 表为

$$f: A \rightarrow B.$$

数集 A 称为函数 f 的定义域, y 称为函数 f 在 x 的函数值, 表为 $y=f(x)$. 函数值的集合称为函数 f 的值域, 表为 $f(A)$, 即

$$f(A) = \{y \mid (x, y) \in f, x \in A\} \subset B.$$

定义 3 中的乘积集的特殊子集 f 就相当于定义 2 的“对应关系”. 这里乘积集、子集等概念都十分明确. 避免了含意不清的“对应关系.”

根据定义 3, 两个函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 与 $f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$ 有相同的定义域 $A = \mathbf{R} - \{0\}$ 和值域 $f(A) = \mathbf{R} - \{0\}$, 且乘积集 $A \times f(A)$ 的子集

$$f = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x \in A \right\} \text{ 与 } g = \left\{ \left(x, \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} \right) \mid x \in A \right\}$$

相等, 即 $f=g$. 于是, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 与 $g(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$ 相同.

问 2. 怎样理解“确定(求)函数定义域”这句话?

答 “给定了函数”, 这句话本身就意味着“给定了函数的定义域”. 函数及其定义域两者是不能分离的. 没有定义域或定义域不明确的函数是没有的. “确定(求)函数定义域”这句话, 如果理解为先有函数, 后有函数的定义域, 则是错误的. 我们讨论的函数, 很多是用解析式给出的, 虽然它的定义域是客观存在的, 是明确的, 但是常常并不是在给定函数的同时就明确指出它的定义域, 这时可根据函数的解析式或问题的实际意义确定(求)出它的定义域.

问 3. 确定(求)函数的定义域有哪些原则?

答 确定(求)函数的定义域有如下的原则:

- 1) 偶次根式的函数, 其根号下的值非负.
- 2) 分式函数, 其分母的值不能是零.
- 3) 奇函数或偶函数, 其定义域是关于原点对称的数集.

4) 函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是原来函数 $y=f(x)$ 的值域.

5) 有限个函数的四则运算得到的新函数, 它的定义域是这有限个函数定义域的交集.

6) 对数函数的真数值必须是正数.

7) 复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 的定义域总是里层函数 $y=\varphi(x)$ 定义域的子集, 在其上的函数值, $y=\varphi(x)$ 都属于外层函数 $z=f(y)$ 的定义域.

8) 具有物理、几何等实际意义的函数, 它的定义域总是解析式表示的该函数定义域的子集. 该子集由实际意义决定.

四、补充例题

例 1. 证明: 若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y), \quad (*)$$

且 $f(x) \neq 0$, 则

$$1) [f(x)]^2 = \frac{f(2x) + 1}{2};$$

$$2) [f(x)]^2 + [f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y) + 1.$$

证法 由于 x, y 是任意实数, 在已知等式中, 适当选取 x 或 y , 可化成欲证等式的形式. 注意除法运算分母不能为 0. 证明等式 2) 要应用等式 1).

证明 1) 在 (*) 式中, 令 $y = 0$, 有

$$2f(x)f(0) = 2f(x).$$

已知 $f(x) \neq 0$, 有 $f(0) = 1$. 在 (*) 式中, 令 $y = x$, 有

$$2[f(x)]^2 = f(2x) + 1, \quad \text{即} \quad [f(x)]^2 = \frac{f(2x) + 1}{2}.$$

2) 在 (*) 式中, 用 $x+y$ 与 $x-y$ 分别替换 x 与 y , 再由 1), 有

$$2f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$$

$$= 2([f(x)]^2 + [f(y)]^2) - 2,$$

即 $[f(x)]^2 + [f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y) + 1.$

注 容易验证, 余弦函数 $\cos x$ 满足方程(*)与 $f(x) \neq 0$

例 2. 证明: 若对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \quad (**)$$

且 $f(0) = 0$, 则

$$1) f(x)f(y) = xy; \quad 2) f(x+y) = f(x) + f(y).$$

证法 同例 1 的证法.

证明 1) 在(**)式中, 令 $y = 0$, 已知 $f(0) = 0$, 有

$$|f(x)| = |x|.$$

将(**)式等号两端平方, 由 $[f(x)]^2 = x^2$, 有

$$[f(x)]^2 - 2f(x)f(y) + [f(y)]^2 = x^2 - 2xy + y^2,$$

即 $f(x)f(y) = xy.$

2) 在上式中, 令 $y = 1$, 有 $f(x)f(1) = x$, 从而有

$$\begin{aligned} f(x+y)f(1) &= x+y = f(x)f(1) + f(y)f(1) \\ &= [f(x) + f(y)]f(1). \end{aligned}$$

因为 $|f(1)| = 1$, 所以 $f(x+y) = f(x) + f(y).$

注 满足方程(**)与 $f(0) = 0$ 的函数是线性函数 $y = x$ 或 $y = -x$.

例 3. 设 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, 描绘函数 $y = f(1-x)f(1+x)$ 的图象.

解 $f(x) = \frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x \leq 0. \end{cases}$

$$f(1-x) = \begin{cases} 1-x, & \text{当 } x < 1, \\ 0, & \text{当 } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(1+x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } x > -1, \\ 0, & \text{当 } x \leq -1. \end{cases}$$

于是, $y = f(1-x)f(1+x) = \begin{cases} (1-x)(1+x) = 1-x^2, & \text{当 } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{当 } |x| \geq 1. \end{cases}$

函数 $y = f(1-x)f(1+x)$ 的
图象如图 1.1.

例 4. 设对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

且 $f(x) \geq 0, f(0) = c$. 证明: 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) = c$.

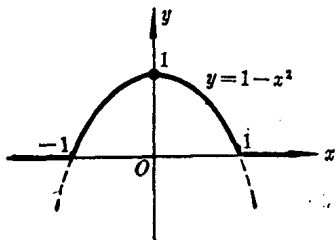


图 1.1

证法 首先证明, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \geq c$, 用反证法. 其次再证明, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) = c$.

证明 假设存在某一点 $a \in \mathbf{R}$, 有

$$f(a) < c = f(0). \text{ 设 } f(0) - f(a) = h > 0.$$

在给定的不等式中, 令 $x = 0, y = 2a$, 有

$$2f(a) \geq f(0) + f(2a)$$

或
$$f(2a) \leq f(0) - 2[f(0) - f(a)] = f(0) - 2h.$$

同法(令 $x = a, y = 3a$), 有

$$\begin{aligned} f(3a) &\leq 2f(2a) - f(a) \leq 2[f(0) - 2h] - f(a) \\ &= f(0) - 4h + f(0) - f(a) = f(0) - 3h. \end{aligned}$$

.....

用归纳法证明, 对任意自然数 n , 有

$$f(na) \leq f(0) - nh.$$

因为 $h > 0$, 当 n 充分大时, $f(na) < 0$, 与已知条件矛盾, 即对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) \geq c$.

在给定的不等式中, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 取 $y = -x$, 有

$$2f(0) = 2c \geq f(x) + f(-x).$$

因为 $f(x) \geq c$ 与 $f(-x) \geq c$, 所以 $f(x) = f(-x) = c$ (可用反证法

证明), 即对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) = c$.

说明 由给定的不等式知, 在任意区间 $[a, b] \subset \mathbf{R}$ 上, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$ 的函数值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 大于或等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 两个端点 a 与 b 的函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的算术平均值 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. 这表明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象只有两种情况: 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是一条直线或是向上鼓鼓的一条曲线, 并向下无限延伸, 即当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$. 再由给定的条件 $f(x) \geq 0$ 知, 后者不能出现, 因此它只能是一条平行于 x 轴的直线, 即 $f(x) = c = f(0)$.

五、练习题 1.1 解法提要

5. 求下列函数的定义域:

$$(5) y = \frac{1}{|x| - x}.$$

解法 $|x| - x \neq 0$, 即 $|x| \neq x$.

$$(7) y = \ln\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

解法 $\sin \frac{\pi}{x} > 0$, 即 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数? 三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数? 为什么?

解法 给定正方形的周长 $a \in L$, 其正方形的一个边长 $\frac{a}{4}$ 唯一确定, 从而它的面积 $\left(\frac{a}{4}\right)^2 \in A$ 也唯一确定.

给定三角形的周长 $b \in I$, 其三角形的底与高不是唯一确定, 从而它的面积也不是唯一确定.

7. 下列函数是否相等, 为什么?

(2) $f(x) = 2\lg x$ 与 $\varphi(x) = \lg x^2$.

解法 它们的定义域不相同.

(4) $f(x) = \frac{\pi}{2}x$ 与 $\varphi(x) = x(\arcsin x + \arccos x)$.

解法 它们的定义域不相同.

10. 证明, 若 $\varphi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则 $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证法 应用对数性质: $\ln M + \ln N = \ln MN$.

11. 如果等边三角形的面积为 1, 连结这个三角形各边的中点得到一个小三角形, 又连结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形, 如此无限继续下去, 求出这些三角形面积的数列.

解法 设三角形的面积数列是 $\{S_n\}$. 已知 $S_1 = 1$. 由图 1.2, 知

$$S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4}, \dots$$

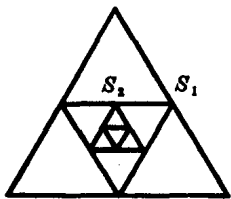


图 1.2

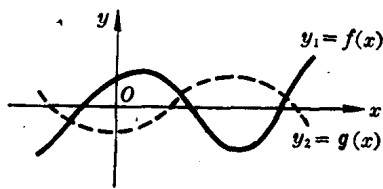


图 1.3

16. 已知函数 $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ 的图象, 作出下列函数的图象:

(1) $y = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\};$

(2) $y = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 (1)} \quad y &= \frac{1}{2} \{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\} \\
 &= \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{当 } f(x) < g(x) \end{cases} \\
 &= \max\{f(x), g(x)\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= \frac{1}{2} \{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\} \\
 &= \begin{cases} g(x), & \text{当 } f(x) \geq g(x) \\ f(x), & \text{当 } f(x) < g(x) \end{cases} \\
 &= \min\{f(x), g(x)\}.
 \end{aligned}$$

其中符号 $\max\{a, b\}$ 表示取 a, b 中的最大值, $\min\{a, b\}$ 表示取 a, b 中的最小值.

设函数 $y_1 = f(x)$ 与 $y_2 = g(x)$ 的图象如图 1.3. 请画出函数 $\max\{f(x), g(x)\}$ 与 $\min\{f(x), g(x)\}$ 的图象.

§ 1.2. 几种特殊的函数

一、基本内容

本节有四段.

函数的类型是多种多样的, 函数的样子是千姿百态的. 我们首先从中选出经常遇到的四种特殊的函数. 本节每段给出一种特殊的函数, 顺次是, 有界函数(包括无界函数), 单调函数, 奇偶函数, 周期函数.

我们在给出这四种函数定义的同时, 以举例的方式复习了五种常用的函数: 三角函数, 反三角函数, 指数函数, 对数函数, 幂函数, 以及它们的图象.

二、学习要求

有界函数、单调函数、奇偶函数、周期函数是今后学习中经常