潘德惠 著

数学模型的统计方法

辽宁科学技术出版社

数学模型的统计方法

潘德惠　著

辽宁科学技术出版社
一九八六年·沈阳

数学模型的统计方法

Shuxue Moxing De Tongji Fangfa

潘德惠 著

辽宁科学技术出版社出版 （沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行 朝阳新华印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：18 3/4 字数：480,000

1986年5月第1版 1986年5月第1次印刷

责任编辑：路 明 李殿华 插 图：李宝成

封面设计：秀 中 责任校对：东 戈

印数：1—1,600

统一书号：13288·22 定价：4.60元

序　　言

随着我国社会主义现代化建设事业的迅速发展和逐步实现四个现代化的需要，利用快速数字电子计算机来控制生产和其他方面的自动化过程已经越来越普遍了。为使电子计算机能自动指挥并控制生产，必须将生产过程中某些规律用有关的量与量间的关系描述出来，编好程序存入电子计算机。这种描述生产或其他变化过程中因果之间数量关系的数学表达式，就是该过程的数学模型。下面用一些例子来说明。

例1．在不考虑空气阻力的条件下，一个物体从高处开始自由下落，下落经过的时间 t 与下落距离 s 间的关系由

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

来描述。这里 $g=9.81$米/秒^2，是落体加速度。

例2．一个质量为m的物体作直线运动，受到大小与速度的大小成正比，方向与速度的方向相反的阻力，阻尼系数为μ。运动过程中，物体还受到与时间 t 有关的直线方向上的外力$f(t)$。用 $s(t)$表示物体从起动点量起的位移，则得运动的微分方程

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\mu\frac{ds}{dt}+f(t) \tag{2}$$

如果初位移和初速度分别为s_0与v_0，则得初始条件

$$s|_{t=0}=s_0,\qquad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0 \tag{2'}$$

例3．在串联的电阻R与电容C的$R—C$线路中，输入电压$U(t)$与电容两端电压$y(t)$间满足一阶线性常微分方程

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{RC}y=\frac{1}{RC}U(t) \tag{3}$$

初始条件为

$$y|_{t=0}=0 \tag{3'}$$

上边三个例子中，方程（1）、（2）、（3）分别是每个过程的数学模型。方程（1）直接表达了路程 s 与时间 t 的关系。方程（2）则通过 $s(t)$ 应满足的微分方程来描述 s 与 t 的关系。当然，用方程的解来说明 s 与 t 间明显的关系更为直接。方程（3）是 R—C 线路的数学模型。

例4．已知某物体的导温系数 $a^2=\frac{\lambda}{cP}$，其中 λ 是物体的导热系数，c 是比热，ρ 是比重。则物体的导热过程可由物体上各点 (x,y,z) 处的温度 $T(x,y,z,t)$ 随时间 t 变化的规律来刻画。它满足热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+f(x,\ y,\ z,\ t) \tag{4}$$

$f(x,\ y,\ z,\ t)$ 是描述物体内各处热源分布的已知项。若物体内部无热源分布，该项为零。一般除方程（4）之外，还要给出边界条件和初始条件。如已知开始 $t=0$ 时物体上各点的温度分布为 $T_0=\varphi_0\ (x,\ y,\ z)$，边界面 S 上各点的温度随时都已给出，则初始条件与边界条件分别为

$$T(x,\ y,\ z,\ t)|_{t=0}=\varphi_0(x,\ y,\ z) \tag{4'}$$

$$T(x,\ y,\ z,\ t)|_S=\varphi(x,\ y,\ z,\ t) \tag{4''}$$

$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ 是 $(x,\ y,\ z)$ 沿 S 变动时，x、y、z、t 的已知函数。有时更确切地把微分方程、边界条件和初始条件放在一起作为过程的数学模型。于是热传导过程的数学模型就是（4）、（4′）、（4″）。

有时需要描述若干个与时间无关的因素影响某些量的规律，

反映在数学上就是一些与时间无关的量影响某种量或某些量的定量的相依关系。这样的关系式就是反映这类因果关系的数学模型。

例5．某轧钢厂轧制一种型号的圆钢，从中抽出一批作拉伸试验，测出它的屈服点σ_S（公斤/毫米^2）。钢材的含碳、锰成分分别为C、Mn（单位均为0.01%）。经分析得出σ_S与C及Mn之间的相依关系的数学模型是

$$\sigma_S = 18.02 + 0.229C + 0.054Mn + \varepsilon \tag{5}$$

ε是一个随机变量，也叫模型噪声。

例6．某氧气顶吹转炉炼钢的终点钢水温度T、钢水含碳量C、含磷量P与装炉的铁水重量W_0、铁水温度T_0、铁水含碳量C_0、含磷量P_0、装入废钢重量W_F、矿石重量W_k、铁皮重量W_T、石灰重量W_S、…吹氧体积V等因素有关。为了控制每炉钢的终点温度T和终点碳C、终点磷P的值，需先找出T、C、P与W_0、T_0、C_0、…、W_F、W_k、W_S、V等的相依关系

$$\begin{aligned}
T &= f_1(W_0,\ T_0,\ C_0,\cdots,\ W_F,\ W_K,\ W_S,\ V) + \varepsilon_1 \\
C &= f_2(W_0,\ T_0,\ C_0,\ \cdots,\ W_F,\ W_K,\ W_S,\ V) + \varepsilon_2 \\
P &= f_3(W_0,\ T_0,\ C_0,\ \cdots,\ W_F,\ W_K,\ W_S,\ V) + \varepsilon_3
\end{aligned} \tag{6}$$

其中ε_1，ε_2，ε_3为三个随机变量，是用（6）式右边的函数f_1，f_2、f_3的值作终点量T、C、P的预报值时的随机误差。这就是转炉炼钢的一种数学模型。ε_1、ε_2、ε_3也是模型噪声。

例7．某一动态过程的状态方程为

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U}(t) + \boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{W}(t) \tag{7}$$

初始条件为

$$\boldsymbol{X}(t)\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{X}_0 \tag{7'}$$

其中$\boldsymbol{X}(t)$是状态向量，$\boldsymbol{U}(t)$是控制向量，$\boldsymbol{W}(t)$是随机噪声向量。$\boldsymbol{F}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$、$\boldsymbol{\Gamma}(t)$是一定类型的函数矩阵。方程满足初始条件的

解为

$$X(t)=\Phi(t,\ t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\ \tau)[B(\tau)U(\tau)+\Gamma(\tau)W(\tau)]d\tau \tag{7''}$$

$\Phi(t,\ \tau)$ 是可以求得的二元函数矩阵。这里方程（7）和它的解（7″）都可称做该动态过程的数学模型。

例8．测得某炼焦厂连续59个月的耗煤量数据(单位为吨)，用时间序列分析方法得到连续三个月的耗煤量Z_{k-1}、Z_k、Z_{k+1}间的关系是

$$Z_{k+1}=-0.172Z_k+0.253Z_{k-1}+W_{k+1} \tag{8}$$

可用它由上个月和本月的耗煤量来预测下个月将出现的耗煤量。W_{k+1}为预报误差，是一个随机变量。

一般当影响一个过程的因素是由数量相当多的与时间有关的量所构成的，且这些量一时还不很清楚，人们往往对表达过程的量的历史数据进行分析，从中找出一定的规律。因此可以用过程的历史数据和现在的数据来推测将来要出现的数值。这种刻画一个过程的过去、现在与未来的数量关系的数学关系式也是过程的数学模型。（8）式即是某炼焦厂耗煤过程的数学模型。

一般按描述量与量间关系的方式的不同，可分成决定型模型与随机型模型两类。前者各有关量之间满足确定的方程或函数关系，如模型（1）、（2）、（3）、（4）。后者各有关量之间所满足的方程或函数关系中包含随机成分，如模型（5）、（6）、（7）、（8）。

若模型中表达各个“因”的量，在一定范围内每取一个值，即可对应出表达“果”的量的一个值或一个确定分布的随机变量时，称为静态模型。如（1）、（5）、（6）式都是静态模型。（1）中每给定一个t值，就对应一个S值。（5）中每给定C与Mn各一个值时，可确定σ_S为以右边前三项和为平均值的

一个随机变量，这里假设噪声 ε 的平均值为零。（6）也与此相仿。

如果模型中描述“因”“果”量的值不象上述那样对应，而用某些量在一个范围上的变化规律来表达它们之间的相依关系时，叫做动态模型。例如模型（2）表达了时刻 t 的外力 $f(t)$ 这个“因”与同一时刻的“果”，即路程 $s(t)$ 的变化率 $\frac{ds}{dt}$、$\frac{d^2s}{dt^2}$ 间的相依关系。而时刻 t 的导数 $\frac{ds}{dt}$ 与 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 却要由 $S(t)$ 在 t 附近一个小邻域（范围）上的值来确定。因此微分方程（2）是描述质点运动规律的动态模型。仿此，微分方程（3）、（4）也是过程的动态模型。

由此可知，动态模型不在于是否有时间变量，而要看是否用某些变量与一些变量在某变化区域上确定的量间的相依规律来描述某一因果关系。由上述可知，微分方程所表达的一般都是动态模型，可以说是刻画“微观规律”的数学模型。与此相对，下边所述微分方程解形式的模型是刻画“宏观规律”的动态模型。

实际上，一个动态系统总有输入 $\boldsymbol{U}(t)$（或控制量）与输出 $\boldsymbol{Y}(t)$。确切地说，动态模型应该是描述每一时刻 t 的状态 $\boldsymbol{X}(t)$、或输出 $\boldsymbol{Y}(t)$ 与到时刻 t 为止前一段时间间隔里输入 $\boldsymbol{U}(\tau)$ $(t_0\leqslant\tau\leqslant t)$ 之间相依的关系式如状态微分方程（7）的解式（7″）。从（7″）可看出，时刻 t 的状态 $\boldsymbol{X}(t)$ 与 t_0 到 t 时间区间上的输入 $\boldsymbol{U}(t)$ 有关。如输出 $\boldsymbol{Y}(t)$ 是状态 $\boldsymbol{X}(t)$ 的线性函数 $\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{X}(t)$，$\boldsymbol{H}(t)$ 是观测矩阵，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(t) &= \boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{X}_0\\ &\quad+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)[\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{U}(\tau)+\boldsymbol{\Gamma}(\tau)\boldsymbol{W}(\tau)]\,d\tau\end{aligned}$$

即 t 时刻的输出 $\boldsymbol{Y}(t)$ 与开始时刻 t_0 到 t 这一段时间的输入 $\boldsymbol{U}(\tau)$ $(t_0\leqslant\tau\leqslant t)$ 有关。因此，动态模型反映了时刻 t 以前输入的历史

数值影响 t 这一时刻输出值的规律。可以说动态模型是“有记忆的”。

实际问题中，描述一个量 y 与时间 t 相依的关系式，一般可看成是一个微分方程的解，原则上可写成与（7″）相仿的形式。例如（1）式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 就是微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 在初始条件 $s|_{t=0}=0$，$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 下的解。这可化成如下的微分方程组及初始条件

$$\frac{ds}{dt}=s_1,\qquad \frac{ds_1}{dt}=g$$

$$s|_{t=0}=0,\qquad s_1|_{t=0}=0$$

取向量$[s(t),\ s_1(t)]^\tau$为状态向量时，方程组的解可写成

$$\begin{bmatrix} s(t) \\ s_1(t) \end{bmatrix}=\int_0^t\begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix}gd\tau$$

即 t 时刻的状态与开始时刻 $t_0=0$ 到 t 这一段的地心引力作用 g（输入）有关。

模型（8）是描述过去、现在、未来耗煤量间的关系，是一个离散时间范围上量的相依关系，也是动态模型。

在一定假设条件下，完全按物理或化学机理以及有关专业技术理论建立的模型叫机理模型，如（1）、（2）、（3）、（4），按实际抽样观测用统计分析方法或结合一定机理建立的模型叫统计模型，如（5）、（6）、（7）、（8）。建立机理模型主要是在一定假设条件下，按问题有关的机理结合相应的专业知识和数学方法而实现的。具体作法因问题有关专业的不同而不同，在此不作讨论。本书主要讨论的是，按实际抽样观测结果结合问题特点或专业机理来建立模型的统计方法，也包括用观测数据作出某些预报的统计方法。它们有一定的通用性，在很多方面都可以应

用。为了阅读方便，首先介绍有关的概率论与数理统计基础理论与方法，并加入后面必需的矩阵运算知识，然后讨论一般的回归分析方法和非线性回归的一些计算方法。这些内容是建立统计模型的基本方法。书中还介绍了近年来发展起来的非数量因素的数量化方法与回归设计，以及适于用电子计算机运算的模型参数自适应跟踪算法等。涉及动态模型方面，讨论了线性动态模型的辨识及离散时间系统的线性和非线性递推滤波(卡尔曼滤波)方法，以及随机时间序列的预报等有关内容。

此外，建立数学模型以及处理模型的有关问题时，经常要用到一系列相应的计算方法。本书最后安排了这部分内容。除模型辨识中涉及的线性代数方程组求解等内容之外，还介绍了处理一般微分方程求解等问题所通常使用的一些计算方法，以便于读者查阅。有些部分只列出结果或方法，略去论证。其他部分也大都是作为一部入门的书来写的。这些部分当前已形成了各个不同的专门分支，打算深入研究的读者，可以查阅各相应的专门书刊与书后列出的有关文献。

本书内容曾多次作为我院几个有关专业和冶金部计算机培训班的教材，也作过一些兄弟院校及研究院所培训自动化专业人员用的教材。本应早日整理成书，只因教学与科研工作较多，加上想把自己近年来发表的一些研究内容加工整理写入书内，又想写进一些实例，一时未能完成。这次完成的书稿多蒙学院和系领导大力关心和支持，许多同志从各方面给以敦促和鼓励，特别是赵希男、郭亚军两位同志帮助抄写整理才得以写成。当本书出版之际，谨在这里一并表示衷心的感谢。

由于个人经验不足及水平所限，书中难免会有许多体会不深或错误的地方，希望各方面的专家和读者给予批评和指正。

潘　德　惠

一九八四年十二月于东北工学院自动控制系

内 容 提 要

本书主要介绍用电子计算机控制生产或其他自动化过程时，建立数学模型和处理实验数据等有关的数理统计方法。为使初学者阅读方便，本书简要地介绍了一些有关的数学基础知识；同时，考虑到读者进一步深入研究的需要，除一般的统计分析方法之外，还介绍了一些近年来发展起来的较新的理论和方法。

本书共分三篇。第一篇是本书的基础部分，介绍概率论与数理统计基础知识。第二篇是本书的主要部分，重点讨论静态和动态模型辨识的基本方法以及消除动态模型噪声影响的滤波方法等，并介绍了随机时间序列分析与预报的基本理论与方法。第三篇叙述了模型辨识中常用的计算方法，以及一般计算中通用的计算方法和优化方法，便于读者随时查阅。

本书是作为一部入门的书来写的。凡具有一般高等数学知识的读者都能看懂，可供有关的科技工作者阅读，也可作为理工科高年级大学生或教师的参考书。

目　录

第三篇　常用计算方法与优化方法