线性代数复习与考试指导

葛万霞　董春华　编

首都经济贸易大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习与考试指导/ 葛万霞,董春华编. - 北京:首都经济贸易大学出版社,2002.9
(经济数学基础参考丛书)
ISBN 7-5638-1044-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①葛… ②董… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059159 号

线性代数复习与考试指导
葛万霞　董春华　编

出版发行	首都经济贸易大学出版社
地　　址	北京市朝阳区红庙(邮编 100026)
电　　话	(010)65976483　65065761　65071505(传真)
E-mail	publish@cueb.edu.cn
经　　销	全国新华书店
照　　排	首都经济贸易大学出版社激光照排服务部
印　　刷	北京迪赫尔印刷有限公司印刷厂
开　　本	850 毫米×1168 毫米　1/32
字　　数	156 千字
印　　张	6.125
版　　次	2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数	1~5 000
书　　号	ISBN 7-5638-1044-7/O·23
定　　价	12.00 元

前　言

高等学校招生制度改革后，连年的扩大招生，使越来越多具有不同知识背景的学生走进大学。学生知识水平的差异及其他各种原因导致部分学生在数学学习中遇到较大困难，不及格率有逐年增长的趋势；另外近年来学生考研热情空前高涨，而作为全国统考课程的微积分、线性代数和概率论与数理统计，却成为许多学生考研的主要障碍。为此，我们结合多年来的教学经验并借鉴同类型的其他参考书，根据各类学生在学习数学中的不同问题编写了这套适合经济类专业本(专)科生且兼顾其他非数学专业学生的教学参考书。

本套参考书按教学大纲的要求，突出知识结构，便于学生理解掌握现行教材中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在此基础上精选典型例题，详细介绍各种解题思路和方法，并配有一定数量的练习题及参考答案；同时结合学生考研的需要，选用部分考研试题进行解析，使学生对考试题型以及深度、广度有一个总体的把握。

本套参考书包括《微积分复习与考试指导》、《线性代数复习与考试指导》、《概率论与数理统计复习与考试指导》三册，适合所有非数学专业的本、专科学生使用。

由于水平所限，错误难免，欢迎读者批评指正。

目　录

1　行列式

1.1　基本要求

1.理解 n 阶行列式的定义。

2.熟练运用行列式的性质和展开定理进行行列式的计算。

3.从理论上掌握克莱姆(Gramer)法则。

本章的难点是 n 阶行列式的定义及计算。

1.2　内容提要

1.2.1　n 阶行列式定义

1.排列及其逆序数:

由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1\ i_2\cdots\ i_n$ 称为一个 n 阶排列。n 阶排列共有 $n!$ 种不同排列。

在一个排列 $i_1\ i_2\cdots\ i_t\cdots\ i_s\cdots\ i_n$ 中,若数 $i_t>i_s(t<s)$,则称这两个数组成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$。若 N 为奇数,则称此排列为奇排列;若 N 为偶数,则称此排列为偶排列。

排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换。

对换改变排列的奇偶性。任意一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过若干次对换可变为像 $1\ 2\cdots n$ 一样的自然顺序排列,且所作的对换次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 有相同的奇偶性。

(2)n 阶行列式定义:

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 由 n 行 n 列 n^2 个元素构成，它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和。这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，每项按下列规则带有符号：当行标按自然顺序排列时，其符号取决于列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的奇偶性。若其为偶排列，则该项取正号；若其为奇排列，则该项取负号。用数学式子表示如下：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 阶排列求和。

1.2.2 行列式的性质

1. 行列式与其转置行列式的值相等；

2. 互换行列式的两行(列)，行列式改变符号；

3. 行列式中有两行(列)元素对应相等，其值为零；

4. 行列式的某一行(列)的每一个元素都乘以数 k，则等于用数 k 乘此行列式；

5. 行列式有两行(列)对应元素成比例，其值为零；

6. 行列式的某一行(列)各个元素都是两数之和，则行列式等于两个行列式之和，两个行列式中除该行(列)元素分别为对应的两个加数之一外，其余各行(列)的元素与原行列式相同；

7. 把行列式的某一行(列)每一元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上去，行列式的值不变。

1.2.3 行列式按行(列)展开

1.2.3.1 行列式按某一行(列)展开

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于某一行(列)中各个元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。

元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是把 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去，乘下的元素按照原来的顺序构成的 $(n-1)$ 阶行列式。

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 是将余子式 M_{ij} 乘以系数 $(-1)^{i+j}$ 而得到的，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

n 阶行列式按第 k 行的展开式是

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

按第 k 列的展开式是

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

行列式的任何一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

$$a_{1k}A_{1l}+a_{2k}A_{2l}+\cdots+a_{nk}A_{nl}=0 \qquad (k\neq l)$$

1.2.3.2　行列式按某 k 行(列)展开

k 阶子式：n 阶行列式中，任意取 k 行、k 列，位于交叉点上的 k^2 个元素按原来的顺序组成的一个 k 阶行列式，称为这个 n 阶行列式的一个 k 阶子式，记为 M_k。

k 阶子式的代数余子式：n 阶行列式中任意划去 k 行、k 列后，余下的元素按原来的顺序组成的 $n-k$ 阶行列式，称为这个 k 阶子式的余子式，记为 M_k'。如果某 k 阶子式所在的行的序数为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，所在列的序数为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'_k=A_k$$

称为 k 阶子式 M_k 的代数余子式。

拉普拉斯展开式:在 n 阶行列式 D_n 中,任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n-1$),由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D_n,即

$$D_n = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t \qquad (t = C_n^k)$$

1.2.4 克莱姆(Gramer)法则

如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则此方程组有解,且解是惟一的,并可表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

其中 D_j 是由常数列替代系数行列式 D 中第 j 列构成的。

1.3 例题解析

【例 1.1】 计算下列各排列的逆序数,并讨论它们的奇偶性。

(1) 431625;

(2) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)4\cdots(k+1)k$;

(3) $n(n-1)(n-2)\cdots321$。

解 计算 n 阶排列的逆序数常用的方法有:①分别算出排在 $1,2,\cdots,n-1,n$ 前面比它大的数码,即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$

这 n 个元素的逆序数，它们的和即为所求排列的逆序数；②分别算出排列中每个元素前面比它大的数码个数，即算出排列中每个元素的逆序数，它们的和即为所求排列的逆序数。

对此例中的(1)运用方法①，(2)，(3)运用方法②。

(1)排在 1,2,3,4,5,6 前面比它大的数码个数分别为 2,3,1,0,1,0，故所求排列的逆序数

$$N=2+3+1+0+1+0=7$$

为奇排列。

(2)分别算出排列中每个元素的逆序数为 0, 1, 1, 2, 2, …, $(k-1)$, $(k-1)$, k，把它们相加，即为所求排列的逆序数：

$$N=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k=k^2$$

故所求排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同。

(3)分别算出每个元素的逆序数为 0, 1, 2, …, $(n-2)$, $(n-1)$，把它们相加，即为所求排列的逆序数

$$N=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

当 $\frac{1}{2}n(n-1)=2k$，即 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，N 为偶数，此排列为偶排列；当 $\frac{1}{2}n(n-1)=2k+1$，即 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，N 为奇数，此排列为奇排列。

【例 1.2】 选择 i 与 k，使下列条件成立：

(1) $1274i56k9$ 成偶排列；

(2) $1i25k4897$ 成奇排列。

解 (1)中排列缺数码 3, 8，于是令 $i=3$, $k=8$，得 127435689。

此排列逆序数为 5，故为奇排列，但由于对换改变排列的奇偶性，故将上面排列中的 3 与 8 对换，即取 $i=8$, $k=3$ 得 127485639，为偶排列。

(2)方法同上。当 $i=3$, $k=6$ 时，132564897 为奇排列。

【例 1.3】 若$(-1)^{N(i432k)+N(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$是 5 阶行列式$|a_{ij}|$的一项，则 i,j,k 应为何值？此时该项符号是什么？

解 根据行列式的定义，5 阶行列式的每项由取自不同行不同列的 5 个元素乘积构成，所以列标中的 $j=3$。当行标 $i=5,k=1$ 时，$(-1)^{N(54321)+N(52314)}=(-1)^{16}=1$，此时该项取正号，即此项为 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$；当行标 $i=1,k=5$ 时，$(-1)^{N(14325)+N(52314)}=(-1)^9=-1$，此时该项取负号，即此项为 $-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$。

【例 1.4】 根据行列式定义，计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由。

解 行列式的展开式中的每项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

要出现 x^4，则 a_{ij_i} 每次都要取到包含 x 的元素，而所有 x^4 的项是

$$(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$$

故 x^4 的系数为 10。

出现 x^3 的项是 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，故 x^3 的系数是 $-2-3=-5$。

【例 1.5】 证明行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}=0$$

证明 根据行列式的定义，行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5j_6)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}a_{6j_6}$$

其中 j_4,j_5,j_6 是取自 1,2,3,4,5,6 中不同的三个数，因此至少有一个数≤4，即 $a_{4j_4},a_{5j_5},a_{6j_6}$ 至少有一个属于后三行的前四列，这个数必为 0，即每项六个元素的乘积中至少有一个元素是 0，该项必为 0，因此，原行列式值为 0。证毕。

【例 1.6】 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+x+1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+x+2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+x+n-1 \end{vmatrix}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数。

(1)由行列式定义说明 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。

(2)由行列式的性质求 $f(x)$ 的根。

解 (1)行列式 $f(x)$ 的展开式中，x 指数最高的项由 $(a_1+x+1)(a_2+x+2)\cdots(a_{n-1}+x+n-1)$ 的乘积决定，x^{n-1} 的系数为 $1\neq0$，所以 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式。

(2)当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 的第 2 行与第 1 行对应元素相同，得 $f(-1)=0$；当 $x=-i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 时，$f(x)$ 的 $i+1$ 行与第 1 行对应元素相同，得 $f(-i)=0$。所以 $f(x)$ 的根为 $-1,-2,\cdots,-(n-1)$。

【例 1.7】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$
D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix}\times(1)\ \times(-2)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times(1)\ \times(3)\\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -[1\times(-1)\times(-2)\times(-2)]=4
$$

计算行列式常利用行列式的性质，将其化为上三角形行列式来计算。

【例 1.8】 计算 n 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}
$$

解 将 $2,3,\cdots,n$ 列的一倍都加到第 1 列上去，得

$$D=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b & a_2 & \cdots & a_n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b & a_2-b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$$

本例特点:各行元素之和相等,利用性质将其第一列全部化为1,再利用该列把行列式化为三角形行列式,从而求出它的值。

【例 1.9】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+y & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2+x & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-x & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2+y & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-y\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \\ \times(-1)\end{array}$$

$$
= \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & y & y \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}
$$

$$
= xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}
$$

$\times(-1)$ $\qquad$ $\times(-1)$

$$
= xy \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -y \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} xy \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -y \end{vmatrix}
$$

$$
= xy \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2
$$

【例 1.10】 计算 n 阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}
$$

解 按第 1 列展开

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y \end{vmatrix}$$

$$= xx^{n-1} + (-1)^{n+1}yy^{n-1} = x^n + (-1)^{n+1}y^n$$

计算行列式时，降阶展开与化上三角形经常结合使用。

【例 1.11】 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解 对于所给的 n 阶行列式 D_n 按第 1 列展开，有

$$D_n = a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+ x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+xD_{n-1}=a_n+xD_{n-1}$$

同理有 $$D_{n-1}=a_{n-1}+xD_{n-2}$$

则 $$D_n=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2})=a_n+xa_{n-1}+x^2D_{n-2}$$

而 $$D_{n-2}=a_{n-2}+xD_{n-3}$$

所以 $$\begin{aligned}D_n&=a_n+xa_{n-1}+x^2(a_{n-2}+xD_{n-3})\\&=a_n+xa_{n-1}+x^2a_{n-2}+x^3D_{n-3}\end{aligned}$$

因此通过递推关系，得

$$\begin{aligned}D_n&=a_n+xa_{n-1}+x^2a_{n-2}+\cdots+x^{n-4}a_4+x^{n-3}a_3+x^{n-2}D_2\\&=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n\end{aligned}$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$$

此方法是利用递推关系计算行列式。本题还可以从最后一列开始每列乘以 x 加于前一列计算，或按最后一行降阶。

【例 1.12】 设 $abcd=1$，求证

$$D=\begin{vmatrix}a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1\\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1\\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1\\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1\end{vmatrix}=0$$

证明 将 D 拆成两个行列式之和，即