汇优秀试题之精萃　集思想方法之大成

筑能力培养之平台　走培优竞赛之新路

数学培优竞赛新方法

SHUXUE
PEIYOU JINGSAI
XINFANGFA

初二年级

黄东坡 著

湖北人民出版社

XINFANGFA

数学培优竞赛新方法

初二年级

黄东坡 著

湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

数学培优竞赛新方法
初二年级
黄东坡　著

出版：
发行：湖北人民出版社
地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：武汉市汉桥印刷厂
经销：湖北省新华书店
开本：787 毫米×1092 毫米 1/16
印张：14
字数：349 千字
版次：2002 年 7 月第 1 版
印次：2002 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—12 120
定价：15.00 元
书号：ISBN 7—216—03391—4/G・906

序

2002年1月，湖北省新闻出版局组织评选了2001年“最有影响的10本书”，名列榜首的是《康熙大帝》，排名第六的是《数学培优竞赛新帮手》(下简称《新帮手》)——黄东坡的大作，其余的8本书，也都选自不同的领域：政治、经济、科普、历史和艺术。从1月9日的《武汉晚报》得到这一消息后，我感到非常激动，因为《新帮手》的成功也是我的预期，证明我对该书的判断和鉴赏是正确的，向读者的举荐和承诺是可信的；我感到激动，还因为一本关于培优竞赛辅导的书，也能跻身于《康熙大帝》、《中国共产党历史图典》、《世界摄影名作欣赏》、《21世纪高级营销书库》等宏篇巨制之中，毕竟是一件意料之外的事。

面对《新帮手》的成就，本来可以弹冠相庆，作些修饰与补正的工作，但黄东坡并没有止于此，而是乘胜前进，继续探索，终于又一部新作《数学培优竞赛新方法》(下简称《新方法》)问世。我赞赏这样的精神，因为著书与教学满足同样的公理：没有最好的，只有不断地反思才可能更好。一打开《新方法》，你就会发现，它的创新之处在于：从知识的回眸说起，重过程；以“知识纵横”发轫，浸透着历史的信息，重思想；在标题后是一阕名言，紧扣主题的同时也关注着人文精神的滋养，这体现的是什么呢？一种改革的精神，一种数学教育的现代理念，这是同中之异。同样，你也会发现《新方法》贯穿了现代数学教育的基本理念：比如课题组织与学习进程同步、与学生发展协调、与培优过程一致的基本设想；以典型问题为载体，着力反映教学真实，选材联系课本而又高于课本的基本原则；点拨、旁批和计白当黑的例题分析方式；着眼针对性、层次性以及开放互动性的训练材料；以及丰富性、实用性和有序性兼具的数学竞赛课程资源等，这些被实践所证明了的成功经验，在本书中又得以进一步张扬，成为作者的写作个性，这体现的是什么？是一种重视学术经验、重视教学积累的正确态度，既有反思，又有发展，不是否定，而是扬弃，这正是现代数学教育理念的精神所在。因此，我们说，体现现代数学教育理念，而且把这种理念转化为教学行为和写作实践，是本书的突出特点。

随着《义务教育国家课程标准》的颁布，数学教育正处于一个重要的变革时期，人们对数学的认识，对数学学习的认识，对数学价值与功能的认识，都在发生着显著的变化，它们将直接影响到中考数学、竞赛数学中内容的选取、题型的变化，影响到数学试题的立意、情境和设问方式，当这一切都在变化的时候，不能没有适应这种变化的培优竞赛读本。这是一个良好的机遇，看来，这个机遇又被黄东坡抓住了。我们期待着：有更多的老师会与作者达成共识，有更多的学生会从中受益。

裴光亚

2002年5月于武昌水果湖

审视反思　萌动突破

2001 年 10 月，我来到广州，参加骨干教师国家级培训，在三个月的培训中，我有幸聆听到国内外著名专家学者关于国家课程标准、基础教育改革、数学教育进展、东西方数学教育比较等方面的演讲，他们高屋建瓴、总揽全局的讲演，极大地开阔了我的视野，我看到一场数学教育的范式革命已悄然拉开了序幕。

岁末回到武汉，我全面分析了一年来全国各地中考试题、各级竞赛试题，透过试题，能感受到颁布不久的《义务教育国家课程标准》(以下简称《标准》)给命题者带来的深刻影响，把握到他们清晰的命题思路：逼近课程标准，通过命题的改革与创新，反映新的数学教育理念，具体体现在：

● 设计新颖的试题，在新的情景下考查基础知识和基本技能，组合填空、完形填空、多项选择、阅读理解问题崭露头角；

● 削弱几何证明难度，强调数形结合，引入几何动态；

● 改变问题的设问方式，变封闭为开放，给学生以主动的思考空间；

● 要求运用学过的数学知识，通过观察、试验、联想、演绎、归纳、类比、分析、综合等思维形式，对数学问题进行探索和研究，探索性问题、发展性问题大量涌现；

● 通过类比和联想、延伸和推广，考查数学创新能力；

● 倡导数学建模、数学应用，贴近社会实际、体现时代要求的情景应用题应运而生

……

本套书就是这次培训学习与分析思考的结晶，它以《标准》为指导，将初中数学组织为 90 个专题讲座，以最新中考、竞赛试题为载体，运用开放互动式写作方式，注重数学思想方法的介绍、数学思维的培养、数学意识的培育、跨学科的综合透渗、数学文化氛围的营造，**本套书的编写宗旨是：知识能力并举、培优竞赛兼顾、激发学习兴趣、优化学习过程、追求人文关怀、培养数学美感。**

愿读者能透过本书的创意，优化教学过程，优化学习过程，从中感受到数学教育改革、试题创新设计的一缕气息。

多年来，湖北大学数学系汪江松先生、武汉市教研室胡顺先生给了我很多的支持和帮助。百忙之中，裴光亚先生又欣然作序。在写作过程中，湖北省水果湖第二中学领导、老师给了我关怀，武汉魏红女士、柯华女士、张立临先生，江苏海门范红洪小姐，广州留美博士朱洁华女士等给予了我帮助，在此一并表示诚挚的谢意。

黄东坡

2002 年 5 月于湖北省水果湖第二中学

目录

代数篇

1 分解方法的延拓——换元法与主元法 …………………… (1)
2 分解方法的延拓——配方法与待定系数法…………… (5)
3 因式分解的应用 …………………………………………… (10)
4 分式的概念、性质及运算 ……………………………… (15)
5 有条件的分式的化简与求值 …………………………… (20)
6 实数的概念及性质……………………………………… (25)
7 二次根式的运算 ………………………………………… (30)
8 二次根式的化简求值 …………………………………… (36)

几何篇

9 三角形的边与角 ………………………………………… (41)
10 全等三角形 ……………………………………………… (46)
11 等腰三角形的性质……………………………………… (52)
12 等腰三角形的判定……………………………………… (58)
13 从勾股定理谈起 ………………………………………… (64)
14 多边形的边角与对角线 ………………………………… (70)
15 平行四边形 ……………………………………………… (76)
16 完美的正方形 …………………………………………… (83)
17 梯形 ……………………………………………………… (90)
18 由中点想到什么 ………………………………………… (96)
19 平行截割 ……………………………………………… (103)
20 飞跃——从全等到相似 ……………………………… (110)
21 相似三角形的性质 …………………………………… (116)
22 直角三角形的再发现 ………………………………… (122)

综合篇

23 代数证明 ……………………………………………… (128)
24 配方法的解题功能 …………………………………… (132)
25 整体方法 ……………………………………………… (136)
26 面积问题评说 ………………………………………… (140)
27 折与剪的启示 ………………………………………… (147)
28 奇妙的对称…………………………………………… (153)
29 几何动态 ……………………………………………… (158)
30 数形互助 ……………………………………………… (163)
参考答案 ……………………………………………… (168)

1 分解方法的延拓——换元法与主元法

具有丰富知识和经验的人,比只有一种知识和经验的人更容易产生新的联想和独到的见解.

——泰勒

知识纵横

因式分解(factorization)是针对多项式的一种恒等变形,提公因式(common factor)法、公式法、分组分解法是因式分解的基本方法,通常根据多项式的项数来选择分解的方法.

一些复杂的因式分解问题,常用到换元法和主元法.

所谓换元,即对结构比较复杂的多项式,若把其中某些部分看成一个整体,用新字母代替(即换元),则能使复杂的问题简单化、明朗化,在减少多项式项数,降低多项式结构复杂程度等方面有独到作用.

所谓主元,即在解多变元问题时,选择其中某个变元为主要元素,视其他变元为常量,将原式重新整理成关于这个字母的按降幂排列的多项式,则能排除字母间的干扰,简化问题的结构.

例题求解

【例 1】 分解因式:$(x^4+x^2-4)(x^4+x^2+3)+10=$________.

(第 12 届"五羊杯"竞赛题)

思路点拨 视 x^4+x^2 为一个整体,用一个新字母代替,从而能简化式子的结构.

【例 2】 多项式 $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是(　　).

A. $(y-z)(x+y)(x-z)$　　B. $(y-z)(x-y)(x+z)$

C. $(y+z)(x-y)(x+z)$　　D. $(y+z)(x+y)(x-z)$

链接

分组分解法是因式分解的基本方法,体现了化整体为局部、又统揽全局的思想,如何恰当分组是解题的关键,常见的分组方法有:

(1) 按字母分组;

(2) 按次数分组;

(3) 按系数分组.

为了能迅速解决一些与代数式恒等变形相关问题,读者应熟悉如下多项式分解因式后的结果:

(1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

（上海市竞赛题）

思路点拨 原式是一个复杂的三元三次多项式，直接分解有一定困难，把原式整理成关于某个字母按降幂排列的多项式，改变其结构，寻找分解的突破口.

链接

从换元的形式看，有常值代换、式的代换；从引元的个数看，有一元代换、二元代换等.换元的思想是简化式子的表达形式，在代数式的化简求值、因式分解、解方程等方面有广泛的应用，用换元法解题时，需认真观察，恰当变形，发现数式的结构特点.

【例 3】 把下列各式分解因式：

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$；（天津市竞赛题）

(2) $1999x^2-(1999^2-1)x-1999$；（重庆市竞赛题）

(3) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(xy-1)^2$.（“希望杯”邀请赛试题）

思路点拨 (1)是形如 $abcd+e$ 型的多项式，分解这类多项式时，可适当把 4 个因式两两分组，使得分组相乘后所得的有相同的部分；(2)式中系数较大，不妨把数用字母表示；(3)式中 $x+y$，xy 多次出现，可引入两个新字母，突出式子特点.

项数多、次数高、元数多是解代数问题时产生困难的原因之一，主元法是促使我们解决困难的有效方法.选择次数低的字母为主元，是确定主元的基本方法，也是运用主元法解题的关键.

【例 4】 把下列各式分解因式：

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$；

(2) $x^2+xy-2y^2-x+7y-6$.

思路点拨 (1)式字母多次数高，可尝试用主元法；(2)式是形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 的二元二次多项式，解题思路宽，用主元法或分组分解法或用待定系数法分解.

本例是一个开放性、逆向思维的问题，解题的关键是要有一定宏观的整体的驾驭能力，再辅以提公因式、分组分解等因式分解的基本方法.

【例 5】 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式：

$$m^3+\boxed{}\ m^2+\boxed{}\ m+\boxed{}$$

现有两个人做填数字游戏：甲在任一空位内填上一个非零整数，接着，乙在剩下的两个位置中任选一个填上一个整数，最后，甲在余下的空位上填上一个整数.

若要求无论怎样填数，所得到的多项式可分解，则该如何填？

思路点拨 甲有选择任一个空位的主动权,只需先填上某一方框内的整数,然后根据乙填的情况再相应填写即可.

学 力 训 练

基础夯实

1. 分解因式:$(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=$ ______.
2. 分解因式:$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=$ ______.
3. 分解因式:$x^2-xy-2y^2-x-y=$ ______.
(2001 年重庆市中考题)
4. 已知二次三项式 x^2-mx-8 在整数范围内可以分解为两个一次因式的积,则整数 m 的可能取值为______.
5. 将多项式 x^4-2x^2-3 分解因式,结果正确的是(　　).
A. $(x^2+3)(x^2-1)$　　B. $(x^2+1)(x^2-3)$
C. $(x^2+3)(x+1)(x-1)$　　D. $(x^2+1)(x+3)(x-3)$
(2001 年北京市崇文区中考题)
6. 下列 5 个多项式:
① $a^2b^2-a^2-b^2-1$;　② $x^3-9ax^2+27xa^2-27a^3$;
③ $x(b+c-d)-y(d-b-c)-2c+2d-2b$;
④ $3m(m-n)+6n(n-m)$;　⑤ $(x-2)^2+4x$.
其中在有理数范围内可以进行因式分解的有(　　).
A. ①、②、③　B. ②、③、④　C. ③、④、⑤　D. ①、②、④
7. 若 $100x^2-kxy+49y^2$ 是一个完全平方式,那么 k 等于(　　).
A. 4900　B. 700　C. ± 140　D. ± 70
8. 若 p 是两位的正整数,则可能成立的等式是(　　).
A. $x^2+px+2001=(x-29)(x-69)$
B. $x^2+px+2001=(x-23)(x-87)$
C. $x^2+px+2001=(x+23)(x+87)$
D. $x^2+px+2001=(x+29)(x+69)$　(2001 年北京市竞赛题)
9. 分解因式:
(1) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$;
(2) $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$;
(3) $x^4+2001x^2+2000x+2001$;
(4) $(6x-1)(2x-1)(3x-1)(x-1)+x^2$;
(5) $a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc$;
(6) $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.　(“希望杯”邀请赛试题)

能力拓展

10. 分解因式：$(x^2-1)(x+3)(x+5)+12=$ ________.

11. 分解因式：$x^2+5xy+x+3y+6y^2=$ ________.（河南省竞赛题）

12. 分解因式：$(x-2)^3-(y-2)^3-(x-y)^3=$ ________.

（第12届“五羊杯”竞赛题）

13. 在1~100之间若存在整数n，使x^2+x-n能分解为两个整系数一次式的乘积，这样的n有________个.（北京市竞赛题）

14. 多项式$a^3-b^3+c^3+3abc$有因式（　　）.

A. $ab+c$　　B. $a+b+c$

C. $a^2+b^2+c^2-bc+ac-ab$　　D. $bc-ac+ab$

15. 已知二次三项式$21x^2+ax-10$可分解为两个整系数的一次因式的积，那么a一定是（　　）.

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 正数　　D. 负数

16. 把下列各式分解因式：

(1) $(a^2+a+1)(a^2-6a+1)+12a^2$;

(2) $(2a+5)(a^2-9)(2a-7)-91$;（湖北省黄冈市竞赛题）

(3) $xy(xy+1)+(xy+3)-2\left(x+y+\frac{1}{2}\right)-(x+y-1)^2$;

（天津市竞赛题）

(4) $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3$;

（第13届“五羊杯”竞赛题）

(5) $(x^4-4x^2+1)(x^4+3x^2+1)+10x^4$;（第13届“五羊杯”竞赛题）

(6) $2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$.（天津市竞赛题）

综合创新

17. 已知乘法公式：

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$.

利用或者不利用上述公式，分解因式：$x^8+x^6+x^4+x^2+1$

（“祖冲之杯”邀请赛试题）

18. (1) 为使① $x^2+ax-18$，② $2x^2+bx+24$在整数范围内可以分解，a、b分别可以取哪些整数？

(2) 为使式子x^2+7x+p在整数范围内可以分解，p可以取哪些整数？

(3) 试比较问题(1)和(2)有什么共同点和不同点？

2 分解方法的延拓——配方法与待定系数法

数学也是一种语言，从它的结构和内容看，这是一种比任何国家的语言都要完善的语言，实际上，数学是语言的语言，通过数学，自然界在论述；通过数学，世界的创造者在表达；通过数学，世界的保护者在讲演.

——第尔曼

知识纵横

在数学课外活动中，配方法与待定系数法也是分解因式的重要方法.

把一个式子或一个式子的部分写成完全平方式或几个完全平方式的和的形式，这种方法叫配方法，配方法分解因式的关键是通过拆项或添项，将原多项式配上某些需要的项，以便得到完全平方式，然后在此基础上分解因式.

对所给的数学问题，根据已知条件和要求，先设出问题的多项式表达形式(含待定的字母系数)，然后利用已知条件，确定或消去所设待定系数，使问题获解的这种方法叫待定系数法，用待定系数法解题的一般步骤是：

1. 根据多项式次数关系，假设一个含待定系数的等式；

2. 利用恒等式对应项系数相等的性质，列出含有待定系数的方程组；

3. 解方程组，求出待定系数，再代入所设问题的结构中去，得到需求问题的解.

链接

拆项即把代数式中的某项拆成两项的和或差，添项即把代数式添上两个符号相反的项，通过拆添项，多项式增加了项数，从而可以用分组分解法分解.

配方法与待定系数法是数学中重要的思想方法，不仅仅拘泥于分解因式，在后续的学习中如解高次方程、确定函数解析式、挖掘隐含条件、讨论最值问题等方面有广泛的应用.

例题求解

【例 1】 分解因式：$a^2-b^2+4a+2b+3$ 的结果是__________.

(郑州市竞赛题)

思路点拨 直接分组分解困难，由式子的特点易想到完全平方式，关键是将常数项拆成几个数的代数和，以便凑配.

【例2】 如果 x^3+ax^2+bx+8 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$，则 $a+b=$(　　).

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 21

(2001年武汉市选拔赛试题)

思路点拨 原多项式的第三个因式必是形如 $x+c$ 的一次两项式，故可考虑用待定系数法解.

【例3】 把下列各式分解因式：

(1) x^4-7x^2+1;

("祖冲之杯"邀请赛试题)

(2) $x^4+x^2+2ax+1-a^2$;

(哈尔滨市竞赛题)

(3) $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

(扬州市竞赛题)

思路点拨 所给多项式，或有两项的平方和、或有两项的积的2倍，只需配上缺项，就能用配方法恰当分解.

【例4】 k 为何值时，多项式 $x^2-2xy+ky^2+3x-5y+2$ 能分解成两个一次因式的积？

(天津市竞赛题)

思路点拨 因 k 为二次项系数，故不宜从二次项入手，而 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，可得多项式必为 $(x+my+1)(x+ny+2)$ 的形式.

链接

寻找解题途径，是一个创造性的积极思维过程，解题时，应当想什么？怎样想？

(1) 回想：在审题的基础上，根据问题的条件或结论，回想与问题相关的概念、公式、定理、法则，能否直接运用？问题的常用解法是什么？等等.

(2) 联想：从一个数学问题想到另一个数学问题的心理活动，寻找一个熟悉的相似的问题，或找出与题目接近的原理方法，变通使用这些知识，寻找突破口.

(3) 猜想：对事物变化方向的一种"试探"性判断.

待定系数法是解形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$(a、b、c、d、e、f 为常数，a、b、c 不同时为零)的二元二次多项式的有效方法，常见的应用途径是：

(1) 若 $ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)\cdot(a_2x+c_2y)$，则可设原式 $=(a_1x+c_1y+m)(a_2x+c_2y+n)$，其中 m、n 是待定系数.

【例 5】 证明恒等式：$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$

(2001 年北京市竞赛题)

思路点拨 作差比较，或从一边推向另一边，关键是由待证式的特征进行联想，并借助因式分解辅以恰当的变形.

链接

(2) 若 a、b、c 中至少有一个本身就是待定系数，则可从 ax^2+dx+f(或 cy^2+ey+f)入手，即若 $ax^2+dx+f=(a_1x+f_1)(a_2x+f_2)$，则可设原式 $=(a_1x+my+f_1)(a_2x+ny+f_2)$，其中 m、n 是待定系数.

学 力 训 练

基础夯实

1. 分解因式：$a^3b+ab+30b$ 的结果是________.

(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

2. 若 x^3+3x^2-3x+k 有一个因式是 $x+1$，则 $k=$________.

3. 若 $x^2+y^2+\frac{5}{4}=2x+y$，则 $x+y=$________.

4. 已知多项式 $2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6$ 可以分解为 $(x+2y+m)\cdot(2x-y+n)$ 的形式，那么 $\frac{m^3+1}{n^2-1}$ 的值是________.

(第 11 届“希望杯”邀请赛试题)

5. 已知 $a^2+b^2+4a-2b+5=0$，则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为(　　).

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

6. 如果 a、b 是整数，且 x^2-x-1 是 ax^3+bx^2+1 的因式，那么 b 的值为(　　).

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

(第 15 届江苏省竞赛题)

7. 把多项式 $x^2-y^2-2x-4y-3$ 因式分解后，正确的结果是(　　).

A. $(x+y+3)(x-y-1)$　　B. $(x+y-1)(x-y+3)$

C. $(x+y-3)(x-y+1)$　　D. $(x+y+1)(x-y-3)$

8. 把下列各式分解因式：

(1) a^4+64b^4;

(2) $x^4+x^2y^2+y^4$;

(3) $x^2+(1+x)^2+(x+x^2)^2$;

(4) $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$;

(昆明市竞赛题)

(5) x^3-9x+8;

("祖冲之杯"邀请赛试题)

(6) x^3+2x^2-5x-6

(重庆市竞赛题)

9. 已知 x^2+2x+5 是 x^4+ax^2+b 的一个因式,求 $a+b$ 的值.

(第 13 届"希望杯"邀请赛试题)

能力拓展

10. 已知 x^2+x-6 是多项式 $2x^4+x^3-ax^2+bx+a-b-1$ 的因式,则 $a=$________, $b=$________.

(第 15 届江苏省竞赛题)

11. 一个二次三项式的完全平方式是 $x^4-6x^3+7x^2+ax+b$,那么,这个二次三项式是____________.

(重庆市竞赛题)

12. 已知多项式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式是 $x+y-2$,则 $a+b$ 的值为__________.

(北京市竞赛题)

13. 已知 n 为正整数,且 $4^7+4^n+4^{1998}$ 是一个完全平方数,则 n 的值为__________.

14. 设 m、n 满足 $m^2n^2+m^2+n^2+10mn+16=0$,则 $(m,n)=($　　$)$.

A. $(2,2)$或$(-2,-2)$　　B. $(2,2)$或$(2,-2)$

C. $(2,-2)$或$(-2,2)$　　D. $(-2,-2)$或$(-2,2)$

15. 将 x^5+x^4+1 因式分解得(　　).

A. $(x^2+x+1)(x^3+x+1)$　　B. $(x^2-x+1)(x^3+x+1)$

C. $(x^2-x+1)(x^3-x+1)$　　D. $(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

16. 若 a、b、c、d 都是正数,则在以下命题中,错误的是(　　).

A. 若 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则 $a=b=c$;

B. 若 $a^3+b^3+c^3=3abc$,则 $a=b=c$;

C. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=2(a^2b^2+c^2d^2)$,则 $a=b=c=d$;

D. 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,则 $a=b=c=d$.

17. 把下列各式分解因式:

(1) $4x^3-31x+15$;

链接

一元高次多项式,分解因式有下列两种常用方法:

(1) 拆添项法;

(2) 待定系数法.

拆添项是一项技巧性很强的工作,只有认真观察多项式的结构特征和数量关系,才能正确地对多项式进行拆添项,待定系数虽具有一般性,但是操作过程较繁,因此,需具体问题具体分析,灵活选用方法分解.

(2) $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$;

(3) x^5+x+1;

(4) x^3+5x^2+3x-9.

18. k 为何值时，多项式 $x^2+xy-2y^2+8x+10y+k$ 有一个因式是 $x+2y+2$?

综合创新

19. 求证：x^2-xy+y^2+x+y 不能分解成两个一次因式的乘积.

20. 一个自然数 a 若恰好等于另一个自然数 b 的平方，则称自然数 a 为完全平方数，如 $64=8^2$，64 就是一个完全平方数，已知 $a=2001^2+2001^2\times2002^2+2002^2$，求证：$a$ 是一个完全平方数.

3 因式分解的应用

对一个数学问题，改变它的形式，换一种叙述方式，变换它的结构，直到发现有价值的东西，这是解题的一个重要原则.

——玻利亚

知识纵横

在一定的条件下，把一个代数式变换成另一个与它恒等的代数式称为代数式的恒等变形，是研究代数式、方程和函数的基础.

因式分解是代数变形的重要工具，在后续的学习中，因式分解是学习分式、一元二次方程等知识的基础，现阶段，因式分解在数值计算、代数式的化简求值、不定方程(组)、代数等式的证明等方面有广泛的应用.同时，通过因式分解的训练和应用，能使我们的观察能力、运算能力、变形能力、逻辑思维能力、探究能力得以提高.因此，有人说因式分解是学好代数的基础之一.

许多多项式分解因式后的结果在解题中经常用到，我们应熟悉以下的常用结果：

1. $ab \pm b \pm a + 1 = (a \pm 1)(b \pm 1)$；
2. $ab \pm a \mp b + 1 = (a \mp 1)(b \pm 1)$；
3. $a^4 + 4 = (a^2 + 2a - 2)(a^2 - 2a + 2)$；
4. $4a^4 + 1 = (2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1)$；
5. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$；
6. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$.

链接

在信息技术飞速发展的今天，信息已经成为人类生活中最重要的因素.在军事、政治、商业、生活等领域中，信息的保密工作显得格外重要，现代保密技术的一个基本思想，在编制密码的工作中，许多编码方法，就来自于因数分解、因式分解技术的应用.

例题求解

【例 1】 已知 $ab \neq 0, a^2 + ab - 2b^2 = 0$，那么$\dfrac{2a - b}{2a + b}$的值为______.

(全国初中数学联赛题)

思路点拨 对已知等式通过恰当的变形，寻求 a、b 之间的关系，代入关系求值.

代数式求值的常用方法是：

(1) 代入字母的值求值；

(2) 通过变形，寻找字母间的关系，代入关系求值；

(3) 整体代入求值.

【例 2】 已知 a、b、c 是一个三角形的三边，则 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ 的值(　　).

A. 恒正　　　　B. 恒负

C. 可正可负　　D. 非负

(太原市竞赛题)

思路点拨 从变形给定的代数式入手，解题的关键是由式子的特点联想到熟悉的结果，注意几何定理的约束.

【例 3】 计算下列各题：

(1) $\dfrac{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2)\cdots(1994\times1997+2)}{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2)(7\times10+2)\cdots(1993\times1996+2)}$；

(2) $\dfrac{2000^3-2\times2000^2-1998}{2000^3+2000^2-2001}$.

思路点拨 观察分子、分母数字间的特点，用字母表示数，从一般情形考虑，通过分解变形，寻找复杂数值下隐含的规律.

链接

解题思路的获得，一般要经历三个步骤：

(1) 从理解题意中提取有用的信息，如数式特点、图形结构特征等；

(2) 从记忆储存中提取相关的信息，如有关公式、定理、基本模式等；

(3) 将上述两组信息进行有效重组，使之成为一个合乎逻辑的和谐结构.

【例 4】 已知 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是质数，求 n 的值.

(第 13 届"希望杯"邀请赛试题)

思路点拨 从因数分解的角度看，质数只能分解成 1 和本身的乘积(也可从整除的角度看)，故对原式进行恰当的分解变形，是解本例的最自然的思路.