高等学校教材

高等代数

（第二版）

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等代数

（第二版）

北京大学数学系
几何与代数教研室代数小组 编

高等教育出版社

本书是1978年出版的《高等代数》的修订版. 1978年版则是作者们在他们所编的《高等代数讲义》(1964年)、《高等代数简明教程》(1965年)的基础上修改而成的.

这次修订，除了个别的刊误外，主要是增加了新的章节：第四章的§§7—8，第七章的§9，第十章以及与这些新增加内容相应的习题.

本书可作为高等院校数学专业、应用数学专业的教材.

高等学校教材

高等代数

(第二版)

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

天水新华印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张14.25 字数357 000

1978年3月第1版 1988年3月第2版 1989年6月第2次印刷

印数 21291－26790

ISBN 7-04-000882-3/O·339

定价3.25元

再版前言

本书自1978年出版以来，有相当多的学校采用它作高等代数课程的教材，在使用中也发现了其中不少问题和错误，广大读者和教师向我们提了许多宝贵意见．在本书历次重印中，我们曾作了一些刊误．这次的修订，除了一些刊误以外，主要是增加了一些章节（第四章§7，§8，第七章§9和第十章——原来的第十章代数基本概念介绍现在成了第十一章）．我们衷心感谢广大读者和教师对本书的关心，并欢迎继续提出宝贵意见．

本书是北京大学数学系几何代数教研室代数小组集体教学经验的积累．段学复教授、聂灵沼教授、丁石孙教授，王萼芳教授等早在五十、六十年代就先后多次教授高等代数课程并编写过讲义．1964年和1965年丁石孙教授在此基础上先后执笔编写了《高等代数讲义》和《高等代数简明教程》（高等教育出版社出版）．1977年我们受在上海召开的理科教材会议的委托，在上述教材的基础上修改而成本书．历年来还有很多同志（他们中的许多人已离开了教研室）参加了习题的建设，因此很多同志对本书作出了贡献．可是本书是由我们编写的，这次也是由我们修订，其中的缺点和疏漏之处是应由我们负责的．

王萼芳

石生明

1987年3月

第一版前言

本书是在我校1964年编的《高等代数讲义》和1966年编的《高等代数简明教程》的基础上，根据1977年在上海召开的理科教材编写大纲讨论会上制订的高等代数教材编写大纲的精神修改而成的．本书分三个部分，即多项式理论，线性代数及群、环、域的概念介绍．因有计算方法的试用教材，方程论的大部分内容和代数中的计算方法内容都略去了．另外考虑到综合大学数学专业和高等师范院校数学专业两方面的需要，所以本书中包含的内容对每个学校不一定都是必要的．还有些内容，如行列式的拉普拉斯展开定理、线性变换的值域和核、线性空间按特征值分解成不变子空间的直和、λ-矩阵和若当标准形的理论推导、酉空间介绍是选学内容，不作基本要求．因此在采用本书作为教本时，教师可根据实际情况作适当的取舍．如学生以后有近世代数基础课，第十章群、环、域的基本概念也可不讲．我们力求做到所附的习题大致反映各章的基本要求，至于补充题就只有参考的意义，不在基本要求之内．

本书用了数学归纳法，但是没有讲数学归纳法．这是考虑到，数学归纳法（特别是第二数学归纳法）可以在高等代数中讲，也可以在其它课程中讲，甚至于也可以只简单地提一下而在用的过程中熟悉它．教师可根据情况作适当处理．关于连加号“$\sum$”，我们写了一个附录，供参考．

我们采用符号“▌”表示一个定理或者论断的证明完结．当符号“▌”紧接着一个定理或者论断的叙述之后出现，这就表示它不证自明或者在前面已经证明了．

这几年教育战线受“四人帮”严重破坏，影响了教学活动正常进行，极大地妨碍了高等代数课教学经验的积累，加之这次修改时间仓促，书中的问题一定不少．我们希望大家在使用的过程中不断提出意见，以便今后写出高质量的教材．

参加教材审查会的同志们对本书提出了不少宝贵意见，我们表示衷心感谢．

北 京 大 学 数 学 系

几何与代数教研室代数小组

1978.3

目　　录

第一章　多　项　式

§1　数　　域

多项式是代数学中最基本的对象之一，它不但与高次方程的讨论有关，而且在进一步学习代数以及其它数学分支时也都会碰到．本章就来介绍一些有关多项式的基本知识．在中学代数中我们学过多项式，现在的讨论可以认为是中学所学知识的加深，并且推广到更一般的情况．

我们知道，数是数学的一个最基本的概念．我们的讨论就从这里开始．在历史上，数的概念经历了一个长期发展的过程，由自然数到整数、有理数，然后是实数，再到复数．这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入．中学数学的学习也基本上反映了这样一个发展过程．回想一下，中学数学中数的涵义在不同的阶段实际上是不同的，只是没有明确指出而已．

按照所研究的问题，我们常常需要明确规定所考虑的数的范围．譬如说，在解决一个实际问题中列出了一个二次方程，这个方程有没有解就与未知量所代表的对象有关，也就是与未知量所允许的取值范围有关．又如，任意两个整数的商不一定是整数，这就是说，限制在整数的范围内，除法不是普遍可以做的，而在有理数范围内，只要除数不为零，除法总是可以做的．因此，在数的不同的范围内同一个问题的回答可能是不同的．我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数，它们显然具有一些不同的性质．当然，它们也有很多共同的性质，在代数中经常是将

有共同性质的对象统一进行讨论．关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**．代数所研究的问题主要涉及到数的代数性质，这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的．有时我们还会碰到一些其它的数的范围，为了方便起见，当我们把这些数当作整体来考虑的时候，常称它为一个数的集合，简称数集．有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质．为了在讨论中能够把它们统一起来，我们引入一个一般的概念．

定义 1 设P是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1．如果P中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是P中的数，那么P就称为一个**数域**．

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域．这三个数域我们分别用字母Q、R、K来代表．全体整数组成的集合就不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数．

如果数的集合P中任意两个数作某一运算的结果都仍在P中，我们就说数集P对这个运算是**封闭的**．因此，数域的定义也可以说成，如果一个包含 0、1 在内的数集P对于加法、减法、乘法与除数（除数不为 0）是封闭的，那么P就称为一个数域．

下面来举一些例子．

例 1 所有具有形式

$$a+b\sqrt{2}$$

的数（其中a,b是任何有理数），构成一个数域．通常用$Q(\sqrt{2})$来表示这个数域．显然，数集$Q(\sqrt{2})$包含 0 与 1 并且它对于加减法是封闭的．现在证明它对乘除法也是封闭的．我们知道．

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

因为a,b,c,d都是有理数，所以$ac+2bd$，$ad+bc$也是有理数．这就说明乘积$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$还在$Q(\sqrt{2})$内，所以

$Q(\sqrt{2})$对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}$ 也不为零(为什么?)，而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})\,(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-\ \sqrt{2})}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ab-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

因为 a,b,c,d 是有理数，所以$\dfrac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\dfrac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数. 这就证明了$Q(\sqrt{2})$对于除法的封闭性.

例 2 所有可以表成形式

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中 n,m 为任意非负整数，$a_i,b_j(i=0,\cdots,n;\ j=0,\cdots,m,)$是整数. 验证留给读者去做.

例 3 所有奇数组成的数集，它对于乘法是封闭的，但对于加、减法不是封闭的. $\sqrt{2}$的整倍数的全体成一数集，它对于加、减法是封闭的，但对于乘除法不封闭. 当然，以上这两个数集都不是数域.

最后，我们指出数域的一个重要性质. **所有的数域都包含有理数域作为它的一部分**. 事实上，设P是一个数域，由定义，P含有1. 根据P对于加法的封闭性，$1+1=2$，$2+1=3$，$\cdots$，$n+1=n+1$，$\cdots$全在P中，换句话说，P包含全体自然数. 又因0在P中，再由P对减法的封闭性，$0-n=-n$ 也在P中，因而P包含全体整数. 任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由P对除法的封闭性即得上述结论.

§2 一元多项式

在对多项式的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域P作

为基础. 设 x 是一个符号(或称文字), 我们有

定义 2 设 n 是一非负整数. 形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 全属于数域 P,称为**系数在数域 P 中的一元多项式**, 或者简称为**数域 P 上的一元多项式**.

在多项式(1)中, a_ix^i 称为 i 次 **项**, a_i称为 i 次项的**系数**. 以后我们用 $f(x),g(x),\cdots$或 $f,g,\cdots$等来代表多项式.

注意, 我们这儿定义的多项式是符号或文字的形式表达式. 当这符号是未知数时,它是中学中学到的多项式. 看应用需要,这个符号还可代表其它待定事物. 为了能统一研究未知数和其它待定事物的多项式, 我们才抽象地定义上述形式表达式. 并且还要对它们引入运算来反映各个待定事物所满足的运算规律, 统一研究以得到它们普遍的公共的性质.

定义 3 如果在多项式 $f(x)$与$g(x)$中, 除去系数为零的项外, 同次项的系数全相等, 那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**, 记为

$$f(x)=g(x)$$

系数全为零的多项式称为**零多项式**, 记为 0 .

在(1)中,如果 $a_n\neq0$,那么 a_nx^n 称为多项式(1)的**首项**,a_n称为**首项系数**,n 称为多项式(1)的**次数**. 零多项式是唯一不定义次数的多项式. 多项式 $f(x)$的次数记为

$$\partial(f(x))①.$$

在中学所讲的代数中,两个多项式可以相加、相减、相乘. 例如,

$$(2x^2-1)+(x^3-2x^2+x+2)=x^3+x+1$$

$$(2x^2-1)(x^2-x+1)=2x^4-2x^3+2x^2-x^2+x-1$$

---

① 因为零多项式不定义次数, 所以在用符号 $\partial(f(x))$时, 总是假定 $f(x)\neq0$. 以后就不一一说明了.

$$=2x^4-2x^3+x^2+x-1$$

我们对形式表达式(1)，可类似地引入这些运算，为便于计算和讨论，我们常常用和号来表达多项式.

定义 3′ 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

是数域P上两个多项式. 那么可以写成

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$$

在表示多项式$f(x)$与$g(x)$的和时，如$n\geqslant m$，为了方便起见，在$g(x)$中令$b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$. 那么$f(x)$与$g(x)$的和为

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

而$f(x)$与$g(x)$的乘积为

$$f(x)\cdot g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

其中s次项的系数是

$$a_sb_0+a_{s-1}b_1+\cdots+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j$$

所以$f(x)g(x)$可表成

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$$

显然，数域P上的两个多项式经过加、减、乘等运算后，所得结果仍然是数域P上的多项式.

对于多项式的加减法，不难看出

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))^{①}$$

对于多项式的乘法，可以证明，如果$f(x)\neq0$，$g(x)\neq0$，那么$f(x)g(x)\neq0$，并且

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$$

事实上，设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

其中$a_n\neq0$，$b_m\neq0$，于是$f(x)g(x)$的首项是

$$a_nb_mx^{n+m}$$

显然$a_nb_m\neq0$，因之，$f(x)g(x)\neq0$而且它的次数就是$n+m$.

由以上证明还看出，多项式乘积的首项系数就等于因子首项系数的乘积.

显然，上面得出的结果都可以推广到多个多项式的情形.

和数的运算一样，多项式的运算也满足下面的一些规律.

1．加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

2．加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

3．乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x)$$

4．乘法结合律：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

5．乘法对加法的分配律：

---

① $\max(n, m)$代表n，m中较大的一个数.

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

这些规律都很容易证明. 下面只给出乘法结合律的证明.

设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i;\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j;\ h(x)=\sum_{k=0}^{l}c_kx^k$$

现在来证

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

等式左边,$f(x)g(x)$中 s 次项的系数为

$$\sum_{i+j=s}a_ib_j$$

因此左边 t 次项的系数为

$$\sum_{s+k=t}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

在右边, $g(x)h(x)$中 r 次项的系数为

$$\sum_{j+k=r}b_jc_k$$

因此右边 t 次项的系数为

$$\sum_{i+r=t}a_i\left(\sum_{j+k=r}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

与左边 t 次项的系数一样,所以左、右两边相等,这就证明了乘法满足结合律.

对于多项式的乘法,我们还可以证明

6. 乘法消去律:

如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且 $f(x)\neq0$, 那么

$$g(x)=h(x)$$

因为由

$$f(x)g(x)=f(x)h(x)\text{有}$$