

连续介质力学

复旦大学数学系 编著

上海科学技术出版社

連續介質力學

(試用本)

復旦大學數學系 編著

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系数学专业革新教材之一,内容包括弹性力学、曲面論与薄壳理論、流体力学等三个部分。本书可作綜合大学数学专业連續介質力学課程的教材,講授85学时,亦可作高等院校有关专业的参考书。

連 續 介 质 力 学

(試 用 本)

复旦大学数学系 編著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海洪兴印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 15 12/32 字數 337,000

1960年9月第1版 1961年3月第2次印刷

印數 1,001—3,500

統一書号: 13119 · 398

定 价: (十) 1.75 元

編輯說明

我們受到全國持續躍進的大好形勢的鼓舞和推動，積極響應了黨的號召，在兩年來教育大革命已經取得偉大成績的基礎上，掀起了一个聲勢浩大的教學改革的群眾運動。通過這個運動，我們揭露了現在教學體系、教學內容和教學方法上陳舊落后的狀況，抓住訂方案、編大綱、寫教材、搞試驗等重要環節，試圖建立一套以馬克思列寧主義、毛澤東思想為指導的、反映現代科學發展水平的、理論聯繫實際的新的教學體系和內容，以及與之相適應的教學方法，使培養人才的工作更好地貫徹黨的社會主義建設總路線的精神。

作為這種新的探索和嘗試，我們在教學改革運動中，師生結合，提供了“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”，編寫了一套可供綜合大學數學專業試用的基礎課程教材。全套教材包括數學分析（一）、數學分析（二）、泛函分析、高等代數、線性規劃和計算實習、計算數學、數理邏輯與控制論、常微分方程、數學物理方程、一般力學、連續介質力學、統計數學（包括信息論）等十二種，尚有物理學一種，因力量所限，未能及時編出。

根據“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”的精神，我們力圖使這套教材具有以下几个特點：

一、在選材上，注意克服資產階級教育思想的影響，體現為社會主義建設服務和反映現代科學發展的要求。中國數學會提出的“數學發展的方向必須以解決尖端技術和重大工程、現代物理、自動化、國民經濟和大量計算任務中的數學問題為綱”，具體地說明了社會主義建設和現代科學發展對數學的要求，我們即以此作為選材的主要標準，同時，也考慮到基礎課的某些特殊要求，適當注

174407/03

意了根据理論与实践之間的直接联系与間接联系,当前需要与长远需要等关系,来确定材料的取舍和不同材料的主次安排。根据这个精神,我們精簡了原来基础課內容中一部分不必要的古典內容,添加了一部分現代材料,还增加了一些新課程。

二、在材料处理上,注意克服过去課程設置各自为政、互不联系的缺点,体现科学知識的綜合与分类的辯証統一的关系。特别是近年来,邊緣学科大量出現,科学发展在原有基础上愈来愈明显地趋向新的更高级的綜合,我們想力求使这套教材适应这个趋势。

具体說来,对那些条件已經成熟的、可以綜合处理的內容,即加以統一处理,例如將泛函分析与实变函数、积分方程以及綫性代数中的部分內容統一处理,在泛函分析中加以綜合;对那些綜合趋势已經比較明显,但独立設課条件尚不成熟的,也分別情况,注意在有关課程間建立密切的有机联系,若干材料还重新另行配置,例如原来理論力学中振动理論的一部分內容,这次就移到常微分方程中去了。

三、在材料的处理与闡述上,以辯証唯物主义观点为武器,破除形而上学和唯心主义对数学教学的影响。数学的研究对象是客觀世界的量的側面,所以它具有較多的抽象性,在研究方法上也較多地运用邏輯上的演繹推証。这些特点,本来應該有利于深刻地闡明問題的本質,但唯心主义者却总是加以歪曲,企图在引出抽象概念时,掩盖其实践来源,在形式論証中,避免闡述問題的本質。在这套教材中,我們力求消除这些唯心主义观点的影响。具体說来,对某些与生产实践有着更加直接联系的課程(如数学物理方程),既吸收已經严格建立数学理論的材料,也采用在实践中有广泛应用而理論上尚未成熟的材料,重新加以組織,恢复这門課程本来的生动活潑的面貌。各門課程中,对重要数学概念与問題的引进,都尽量闡明它們的直接和間接的实践来源;闡述論証过程中,

插入若干必要的描述性材料;得到的結論,也闡明它在實踐中直接和間接的作用。本學期我系几門主要基礎課程,都初步做到了減少學時、提高質量,據了解,主要是在教學過程中初步體現了這個精神。因此,根據我們一些不成熟的經驗,要徹底解決這個問題,除在教材內容上盡量克服這些唯心主義觀點的影響以外,還要注意在教學方法中消除這些影響。

徹底實現教學改革,建立一套新的體系,是一個艱巨複雜的任務,也需要一個較為長期的時間來摸索。我們所作的一些嘗試,僅僅是個開端,既受到思想水平和科學水平的限制,又缺乏較充分的實踐經驗,某些課程的教材,還是在師生結合、邊學邊寫的情況下編出來的。因此不論在處理原則上或者在處理方法上都還不夠成熟。有不少問題,例如如何在教材中反映我國社會主義建設實際中所提出的數學問題、如何在有關各課程間建立更密切的有機聯繫等等,在編寫過程中,也還把握不定,處理不盡適當。我們懇切地希望同志們批評和指正。

上海科學技術出版社和商務印書館上海印刷廠對這套教材的迅速出版,給了極大的支持,我們在這裡表示衷心的感謝。

復旦大學數學系

1960年5月

序

連續介質力學是數學理論聯繫實際的一門學科。反過來，它對數學理論的發展也起着積極的促進作用。隨着社會主義建設事業的發展，數學專業的学生不僅需要具有良好的數學基礎知識，而且還需要掌握比較深入的力學知識，因此有必要在數學專業設置這門課程。

根據當前的形勢和我們的任務，原來的教材內容遠不能適應這樣的要求，因為它存在着如下的缺點：

一、內容陳舊、落後，不能很好地反映現代科學內容。例如在彈性力學中只講了一些簡單的經典理論，對現代工程技術中應用較廣的復變方法、能量法以及板殼理論等根本沒有反映；在流体部分用了過多的篇幅來介紹古典的理想不可壓縮流體的平面問題，而對現代發展較多的氣體動力學與電磁流体力學等新分支，以及實際應用較大的河渠不定常流、管道運動等問題卻很少講授，因此完全不能適應現代科學發展的形勢。

二、處理方法追求形式，理論脫離實際。過去講授中僅注意到數學推導的系統性和理論的完整性，而沒有講清力學概念和理論在實際中如何應用，只從理想模型出發來討論，缺乏對實際現象的具體分析，因而使學生對許多概念、條件、問題的來源以及所得結論的意義和作用搞不清楚，從而也不可能把所學的理論用到實際中去。例如在講理想不可壓縮流体動力學的平面問題時，學生就只知道有共形映照而不知道理想流体假定的局限性和有效性。

在這次編寫的教材中，我們力圖反映如下的特點：

一、充分反映理論联系实际及現代的内容。在不影响基础理論的前提下,尽量介紹某些联系实际的內容,如現代建筑中薄壳屋頂、柱形壳体的結構計算、河渠不定常流以及气体在管道中的流动等等。另外,我們大大地加强了現代的空气动力学部分并反映了現代流体力学的許多新分支,例如电磁流体力学、高超音速流等部分。

二、加强了数学和力学的联系,把理想不可压缩流体平面問題的某些內容与数学分析(二)(复变函数)結合起来,移至分析(二)中講述,这样可以使教材內容更加紧凑而精炼。把微分几何的曲面論与薄壳理論結合起来講,这样可以使微分几何有了新的发展方向,而薄壳理論也得到了有力的数学工具。

三、数学推导力求簡要、合理,俾能自然地引入力学概念,清晰易懂地講清現象的本質,使学生能具备一定的归結实际問題的能力。

我們的这些改进还只是初步的,必然不全面和存在很多缺点,有待于繼續改进,希望大家多提出批評和指正。

复旦大学数学系連續介质力学編写小組

1960年5月

目 录

序

第一篇 弹性理论

第一章 緒論	1
§1 对象和任务	1
§2 固体的力学性质和弹性力学的基本假设	1
第二章 基本方程	6
一、应变分析	6
§1 位移和形变	6
§2 物体內一点附近的变形情况	11
§3 主应变和主方向	17
§4 体积应变	19
§5 連續性方程	20
二、应力分析	22
§6 应力状态	22
§7 平衡方程	23
§8 边界条件	26
§9 应力張量的一些性质	29
三、物理方程——广义虎克定律	32
§10 弹性体的势能	32
§11 广义虎克定律的一般形式	34
§12 各向同性弹性体的弹性常数为二个的证明	35
第三章 問題的建立	41
§1 方程的綜合	41

§2 解問題的基本途徑	43
§3 解的唯一性	48
§4 塑性理論, 非綫性彈性理論	50
第四章 杆的三种基本变形	53
§1 拉伸变形	53
§2 柱形杆的純弯曲	55
§3 圓軸的扭轉	59
§4 梁的支承方式与梁的种类	61
第五章 变分原理	64
§1 拉格朗日变分方程	64
§2 卡斯提也努变分方程	65
§3 运用拉格朗日变分方程建立的近似解法	67
§4 利用卡斯提也努变分方程建立的近似解法	71
第六章 平面問題	73
§1 平面应变問題	73
§2 平面应力問題	75
§3 应力函数	76
§4 用复变函数解平面問題	78
§5 用极坐标解平面問題	86
§6 一些例题	91
§7 空間的应力函数	99
第七章 薄板理論	100
§1 板的基本假設	100
§2 应力与挠度的关系	101
§3 弯矩与扭矩	102
§4 平衡方程	104
§5 板的边界条件	107
§6 板的势能	112
§7 在均布載荷下边界簡支的矩形板的弯曲	113
§8 彈性薄板的大撓度理論	116

第二篇 曲面論和彈性薄壳理論

第一章 曲面論.....	122
§1 曲面、曲面的切面和法綫.....	122
§2 曲面的第一基本形式	125
§3 曲面的第二基本形式	130
§4 法曲率,測地曲率和測地綫.....	132
§5 直紋面和可展曲面	137
§6 主曲率,总曲率,平均曲率	142
§7 曲率綫,欧拉公式,罗德里克公式.....	146
§8 特殊曲面	150
§9 曲面基本定理	154
第二章 薄壳理論.....	163
§1 基本概念与假定	163
§2 壳体的位移与变形	164
§3 中面变形的連續性方程	174
§4 內力和內矩,壳体的平衡方程式	175
§5 內力、內矩和中面变形之間的关系式——物理方程.....	183
§6 壳体的边界条件	186
§7 軸对称载荷的閉口圓柱形薄壳	188
§8 无矩理論的基本方程及边界条件	192
§9 旋轉壳体的基本理論	195
§10 圓頂壳体.....	200
附 录 張量分析及其在彈性力学中的应用.....	205
§1 三維欧氏空間的曲綫坐标,克氏記号.....	205
§2 張量的定义	208
§3 張量的代数运算	210
§4 共变微分	211
§5 曲綫坐标系下彈性体的变形張量	214
§6 曲綫坐标系下的应力張量、平衡方程及边界条件.....	216

第三篇 流体力学

第一章 基本概念 基本方程	227
§1 緒論	227
§2 分析流体运动的两种方法,連續性方程	231
§3 流体微团的运动、无旋运动和有旋运动	238
§4 运动方程,广义牛頓定律	244
§5 能量方程	249
§6 貝努利积分和柯西积分	253
§7 理想流体动力学問題的一般提法	257
第二章 理想不可压缩流体动力学的几个問題	260
§1 繞流問題	260
§2 小振幅波	268
§3 有限振幅重力波	275
§4 河渠不定常流	283
第三章 气体动力学	293
§1 基本方程組、音速	293
§2 等熵气流中的能量方程、一元气流	299
§3 正激波	306
§4 斜激波	314
§5 平面超音速流,特征綫	320
§6 平面无旋超音速运动中的特征綫法	327
§7 有旋超音速流中的特征綫法、机翼理論	339
§8 小扰动法,亚音速流与跨音速流介紹	343
§9 高超音速流动	352
§10 电磁流体力学	371
第四章 粘性流体力学	381
§1 流体动力現象的相似	384
§2 附面层的概念,平面定常层流附面层的基本方程	389
§3 外部势流为 $U=Cx^m$ 的层流附面层	398
§4 动量方程,近似計算层流附面层的波尔豪森法	407

§5 洛强斯基的层流附面层近似计算方法	412
§6 湍流	417
§7 湍流时均运动的雷诺方程、普朗特混合长度理论简述	422
§8 湍流射流	427
第五章 气体在管道中的运动	433
§1 运动方程	433
§2 气体在管道中的定常运动	450
§3 绝热管道中的气体运动	455
§4 等截面管道中气体的加热流动	459
附 录 量纲理论	470
§1 有量纲量与无量纲量	470
§2 量纲公式	471
§3 有量纲量之间的关系式, Π 定理	474
§4 量纲分析	476
参考文献	480

第一篇 彈性理論

第一章 緒 論

§1 对象和任务

彈性力学研究力对彈性体的作用,分析所发生的应力和应变,是一門与生产实践密切联系的学科。它的基本理論是从生产实践中总结概括出来的,都是經实践檢驗过的,而且它所解决的問題都是实践活动所提供的。在建筑、造船、机械制造等工程中,首先必須保証这些工程的絕對安全,以一部机器來說,在确定的外力作用下,要求每一构件都不致发生断裂,也不致引起过分的变形,否則将导致不幸;其次又要求顧到經濟的原則。安全适用和經濟节约两者往往是矛盾的。这就要求通过力学分析物体的强度、剛度和稳定性,以合理地使用材料;尽可能地使安全和經濟两者兼得。

彈性理論就其內容來說,可分为数学彈性力学和实用彈性力学两部分。在第一部分里,用准确的数学方法进行研究,而不引用簡化解答的假設和假定;本书中的“基本方程”、“平面問題”等章节就是属于这方面的內容。在实用部分里,引用了一些簡化假設和假定,抓住了事物的主要方面,放弃其次要方面,使問題簡化;本书中的“薄板”、“薄壳”等章节就是属于这方面的內容。

§2 固体的力学性質和彈性力学的基本假設

物体所受的力可分为两类:外力和內力。外力是外界施加于

物体的力，包括分布于物体体积內的体力（或称为质量力）和作用在物体表面的面力。内力是指物体中的一部分对另一部分所作用的力。当不受外力时，内力仍然存在，正是内力維持了物体存在的形式。当物体受外力作用时，就引起內力的改变，其增量称为附加內力。我們所討論的内力就是这种附加內力。在一点附近某个微分面上的单位面积上的附加內力叫做应力。为簡便起見，以后称附加內力为內力。

外力的作用不仅会引起內力的改变，而且会使物体发生变形。对各种不同性质的材料，即使是外形相同，受力情况相同，但产生的变形却可以完全两样。由这个事实出发，可以把固体分成为韧性固体和脆性固体两类。我們从最简单的情况——杆的简单拉伸来考察它們的区别。所謂杆的简单拉伸是指在两端面上作用着大小相等、方向相反的力。

对于韧性固体，单位长度的长度改变 ε （称为纵应变）与应力 σ 在一开始是成綫性地增加的（图 1-1-1(a) 中由 $O \rightarrow A$ ），在这一范围内，纵应变的增加极慢。对应于 A 点的应力称为比例极限。对于軟鋼，比例极限約为 2000 kg/cm^2 左右。又由图 1-1-1 可知，

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

E 称为楊氏模量。

当应力超过比例极限时，应变的增加就較前迅速，拉伸图也漸呈弯曲；当应力超过 B 点所对应的应力时，材料就失去彈性；而开始发生永久应变（即塑性应变），也就是当外力移去后，拉杆不能恢复其原来的形状。 B 点的应力 σ_E 称为彈性极限。

当应力应变繼續增加至 C 点时，材料变形可以在不增加外力的情况下繼續增大，或者应力下降到一定阶段后保持不变，而应变却能繼續增大[图 1-1-1(b)]，这种现象叫做屈服。对应于 C 点的

应力 σ_P 称为屈服极限。在屈服阶段后,物体又必须加上载荷,然后增加变形,一直到强度极限 σ_U , 发生破坏。

对于脆性固体,在变形很小时拉杆就发生断裂,并且没有明显的屈服应力(图 1-1-2),因此材料不满足虎克(Hooke)定律。

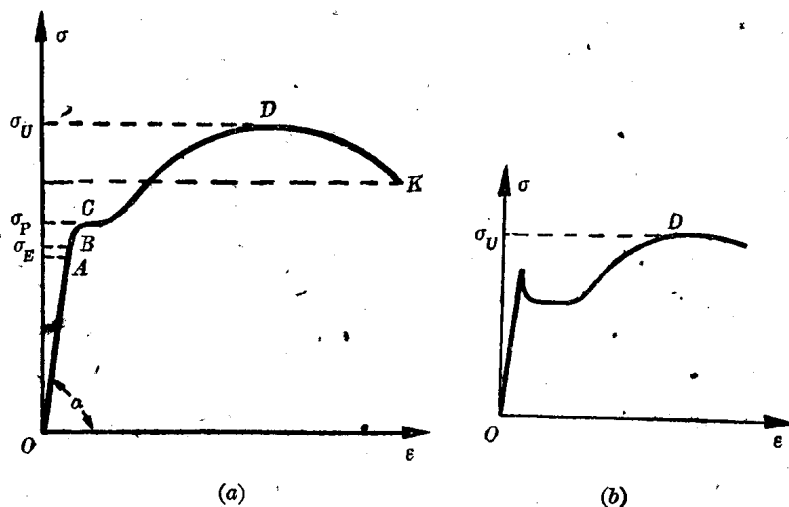


图 1-1-1

为了需要,往往以切线斜率作为杨氏模量,即

$$E = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right).$$

如果在脆性固体上加載,应力应变曲线沿着 OA 上升,若到 A 点后即卸载,应力应变曲线并不是沿着原来的曲线回复到原点,而是沿着曲线 AB 下降(图 1-1-2),这曲线弯曲的程度对许多材料来说并不显著,因而可以用直线来代替。当全部载荷卸去后还存在有变形,这变形称为残余变形。如果再加載,则沿着另一个途径上升,或者简化成直线,即沿着直线上升。从曲线的情形来看,卸载曲线与第二次加载曲线并不重合,这叫做滞后现象。滞后现象是材料振动时破坏的主要因素。从直线卸载曲线来看,第二次加

載也沿着直線上升,綫性的出現增加了物体的彈性極限,即使彈性現象顯著,這種現象叫做硬化。

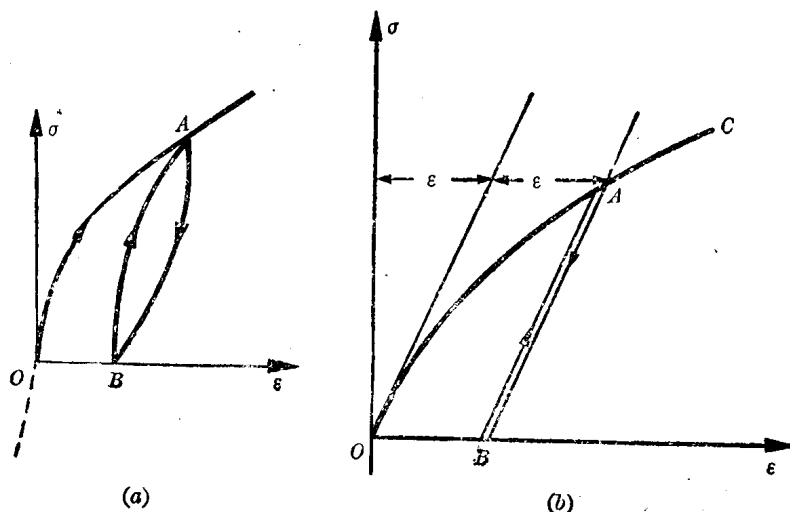


图 1-1-2

物体受拉伸时,不仅在应力方向发生变形,并且在其垂直方向同样有变形存在。一般說来,如果纵向伸长則横向縮短,反之若纵向压缩則横向膨胀,并且对于一定的物质来说,纵向应变和横向应变之比是常数,即

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\nu.$$

ν 称为泊松(Poisson)常数,一般介于 $\frac{1}{4} \sim \frac{1}{2}$ 之間。

物体有各种各样,并且是千变万化的。因而要想找出它們的一般規律和計算方法,就必須把千变万化的現象加以簡化和概括,这就不能不对物体的力学性質提出一些假設。当然这些假設必須根据实际情况,由实践和試驗得来,而不是主观臆想出来的。

我們所提出的基本假設是: