经济数学基础

线性代数

安徽财贸学院数学教研室 编

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

中国商业出版社

(京)新登字 073 号

经济数学基础

(线性代数)

安徽财贸学院应用数学教研室编

*　*　*

中国商业出版社出版发行

(北京宣武区报国寺 1 号)

新华书店经销　　安徽财贸学院印刷厂印刷

安徽省蚌埠粮校激光照排印刷厂照排

*　*　*

开本:787×1092　1/16　印张:11.5　字数:240 千字

1994 年 10 月第 1 版　1994 年 10 月第 1 次印刷

印数:00001～04500

ISBN7－5044－2786－1/G・198　　定价:9.00 元

前　　言

《线性代数》是高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》的第二部分。为了适应我院本科、函授以及夜大等多种形式的教学需要，我们依据国家教委审定的教学大纲编写了本教材。

参加本书编写的人员有：徐永恒、唐晓静、朱文、杨桂元。

限于编者的教学水平和业务水平，书中不当之处在所难免，敬请有关专家和读者不吝赐教。

安徽财贸学院应用数学教研室

1994.7

内 容 提 要

本书依据高等学校财经类专业《经济数学基础》教学大纲编写。全书分六章介绍了行列式、线性方程组、矩阵、向量空间 、矩阵的特征值与特征向量、二次型等线性代数知识。

本书内容适当、概念清楚、文字通顺。各章节后选配了一定数量的练习和习题，书末附有参考答案，便于教学。可作为高等院校财经类专业学生及相关专业函授生、自考生教材，也可作为财经、经济管理工作者的自学用书。

目　　录

第一章 行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解。在中学代数里，已经介绍过二阶、三阶行列式的定义、性质和计算。由于行列式是研究线性代数的一个重要工具，在数学的各个分支以及其它学科中，都会经常遇到它。在这一章中，我们将介绍 n 阶行列式的定义，讨论它的性质以及计算方法。最后给出 n 元线性方程组的克莱姆法则。

§1.1 n 阶行列式

一、 二阶、三阶行列式

设有二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

由加减消元法，可以得出与其同解的方程组：

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。 \tag{1.2}$$

为了记忆的方便，引进符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

并称它为二阶行列式。利用行列式概念，(1.2)中的分子可以分别记成：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此，当行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，方程组(1.1)的解可以表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=8\\2x_1+7x_2=5\end{cases}$$

解　因为方程组中未知量的系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}3&4\\2&7\end{vmatrix}=3\times7-2\times4=13\neq0$$

所以方程组有唯一解。再计算：

$$D_1=\begin{vmatrix}8&4\\5&7\end{vmatrix}=36,\qquad D_2=\begin{vmatrix}3&8\\2&5\end{vmatrix}=-1$$

于是方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{36}{13},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{13}。$$

对于含有三个变元的线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

也有类似的结论。为此，引进三阶行列式。记：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式所表示的代数和可以用对角线规则(亦称沙流氏规则)来记忆。

例2　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}$$

解　$D=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6$

$=-10-48=-58$

三元方程组(1.4)，当其系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$$

时，可以由加减消元法得出它的唯一解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad X_3=\frac{D_3}{D}。\tag{1.5}$$

式中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}。$$

例3　解三元线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=26\\2x_1-4x_2-x_3=9\\x_1+2x_2+x_3=16\end{cases}$$

解　系数行列式：

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & -4 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

所以方程组有唯一解。再计算三个行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}26 & -1 & 1\\ 9 & -4 & -1\\ 16 & 2 & 1\end{vmatrix}=55,\quad D_2=\begin{vmatrix}3 & 26 & 1\\ 2 & 9 & -1\\ 1 & 16 & 1\end{vmatrix}=20,\quad D_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 26\\ 2 & -4 & 9\\ 1 & 2 & 16\end{vmatrix}=-15$$

方程组的解为：

$$x_1=\frac{55}{5}=11,\qquad x_2=\frac{20}{5}=4,\qquad x_3=\frac{-15}{5}=-3。$$

二、排列及其逆序数

二阶、三阶行列式可以由对角线规则计算，但是 n 阶行列式却不能按对角线规则推广，而要依据其结构规律进行。为此，先引入排列的概念。

定义 1.1 由 n 个数码 1,2,…,n 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 **n 阶排列**。

例如，3124 是一个四阶排列；2715436 是一个七阶排列。我们知道，不同的 n 阶排列共有 n! 个，例如 1,2,3 这三个数码的不同排列总共有 3! ＝6 个：

123， 132， 213， 231， 312， 321。

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $i_s>i_t(t>s)$ 时，称这一对数 i_si_t 构成一个**逆序**。一个排列的逆序总数，称为其**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例 4 在排列 25413 中，构成逆序的数对有 21,54,51,53,41,43 共 6 个。因此：

$$\tau(25413)=6$$

例 5 计算排列 123…n 与 n(n－1)…321 的逆序数。

解 在 n 阶排列 123…n 中，各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，这一排列称为 n 元**自然序排列**。自然序排到的任何一个数对都不构成逆序。其逆序数为 0： $\tau(123\cdots n)=0$； 而在排列 n(n－1)…321 中，排在 n 之后而小于 n 的数码有(n－1)个，排在(n－1)之后小于(n－1)的数码是(n－2)个，…，排在 3 之后小于 3 的数码有二个，排在 2 之后小于 2 的数码是一个。可见：

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}。$$

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。

如例 4 中的排列 25413 是一个偶排列。容易验证 132,213,321 是奇排列，而 123,231,312 则是偶排列。

定义 1.4 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，把其中的某两个数码 i_s 和 i_t 互换位置，而其余数码不动，就得出另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，对排列施行的这种变换称为**对换**，常用符号 (i_s,i_t) 表示。

例如， $25413\xrightarrow{(5,1)}21453$

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性。

证明 首先讨论对换相邻两个数码的情形，设排列为 AijB，其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外的其余数码，经过对换(i,j)，变为排列 AjiB。

在这两个排列中，除 i,j 外，其它任何两个数的顺序均未改变，并且 i,j 与 A、B 中数码的次序也

没有改变。因此，若 $i<j$，则新排列比原排列增加了一个逆序；反之，则减少了一个逆序。即相邻对换改变排列的奇遇性。

一般情况，设对换的两个数 i,j 之间还有 k 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，即原排列为 $Aii_1i_2i_3\cdots i_KjB$，经过对换 (i,j) 变为排列 $Aji_1,i_2\cdots i_kiB$。我们可以把它看作是先把 i 依次与 $i_1,i_2,\cdots,i_K,j$ 作 $k+1$ 次相邻对换，得到排列 $Ai_1i_2\cdots i_KjiB$ 后，再把数 j 依次与 $i_K,\cdots i_2,i_1$ 作 k 次相邻对换而得出。也就是说 (i,j) 对换可以看作经过上述 $(2k+1)$ 次相邻对换得来，其奇偶性变更了 $(2k+1)$ 次。即两者的奇偶性恰好是不同的。

定理 1.2　当 $n\geqslant 2$ 时，所有 $n!$ 个 n 阶排列中，奇偶排列各占一半。

证明　设有 p 个奇排列，q 个偶排列，$p+q=n!$。对于 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j)，那么由定理 1.1，可得出 p 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一对换 (i,j) 后不能得到相同的偶排列，故 $p\leqslant q$。同理，可证 $q\leqslant p$，所以 $p=q=\frac{1}{2}n!$。

三、n 阶行列式

定义 1.5　n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,.\cdots,n)$ 组成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列。它表示所有可能取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，在这个代数和中，一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的行标按自然顺序排列，其符号由列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性确定。若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列则取负号，而当它是偶排列时取正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.6)$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 阶排列求和。

由于 n 阶排列共有 $n!$ 个，所以(1.6)所表示的代数和共有 $n!$ 项。当 $n=2$ 时，就得到二阶行列式；$n=3$ 时，即是三阶行列式；而当 $n=1$ 时，就是一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$。这里，一阶行列式与绝对值记号虽然形式上一样，但其意义是完全不同的。

例 6　　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　按照定义，D 是一个含有 $5!=120$ 项的代数和，但是除了项 $1\times2\times3\times4\times5$ 外，其余各项均为零。而项 $1\times2\times3\times4\times5$ 的行标排列是自然序排列，列标排列则是 54321，其逆序数 $\tau(54321)=10$，所以 $D=(-1)^{\tau(54321)}1\times2\times3\times4\times5=(-1)^{10}\cdot120=120$。

例 7　计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

解　根据定义 1.5：

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在上述和式中，只有当 $j_n=n, j_{n-1}=n-1, \cdots, j_2=2, j_1=1$ 时，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不为零。因此：

$$D_n=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

具有(1.7)形状的行列式称为**上三角形行列式**。行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元素**。上三角形行列式是主对角线下方元素全为零的行列式；如果主对角线上方元素全为零，则称为**下三角形行列式**；而当主对角线以外的元素全为零时，称为**对角形行列式**。

同理可知，下三角形行列式以及对角形行列式，其值亦等于主对角元素的乘积。

练习 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \log_a^b & 1 \\ 1 & \log_b^a \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$

2. 求下列排列的逆序数：

(1)6312547　　(2)134782695

(3)1357…2n－12468…2n　　(4)246…2n135…2n－1

3. 下列各元素的乘积在六阶行列式中应取什么符号？

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　　(2)$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　(4)$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

4. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

§1.2 行列式的性质

利用行列式定义计算行列式的值，只在较低阶的情形才有可能。因此，有必要研究行列式的基本性质，这些性质有助于我们了解行列式，简化行列式的计算。而且，它们在理论上也具有重要意义。

定理 1.3　n 阶行列式中的一般项可以记为　$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$　(1.8)

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 阶排列。

证明　由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 阶排列，因此(1.8)式中的 n 个元素取自 D 的不同行与不同的列。

如果交换(1.8)式中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$，则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 变为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，由定理 1.1 可知两者有不同的奇偶性；而列标排列由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 变成 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，两者的奇偶性亦不同。但两下标排列逆序数之和的奇偶性则是相同的，即有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}$$

可见交换(1.8)式中元素的位置，其符号不改变。经有限次交换后，总可以使(1.8)式中各元素的位置，其行标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为自然序排列 $12\cdots n$，记此时的列标排列为 $k_1k_2\cdots k_n$，则(1.8)式变成

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

此结果即是行列式定义中的一般项。

性质 1　将行列式的行、列互换，行列式的值不变。即设：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D^T$。行列式 D^T 称为行列式 D 的**转置行列式**。

证明　记 D 的一般项为：

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

它的元素在 D 中位于第一行、第二行、…、第 n 行以及第 j_1 列、第 j_2 列、…、第 j_n 列上，因而它是 D^T 中位于第 j_1 行、j_2 行、…、j_n 行和第一列、第二列、…、第 n 列上的元素。这 n 个元素的乘积在 D^T 中应为：

$$a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

由定理 1.3，其符号也是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$。即 D 与 D^T 具有相同的项，且符号也相同，所以 $D=D^T$。

性质 1 表明在行列式中，行与列的地位是对称的：凡是行具有什么性质，它的列也必具有同一性质。因此有关行列式的定理、性质，只需就其中的行(或列)给出即可。

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号。

证明 给定行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

互换 D 的第 i 行与第 s 行,得到行列式:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } s \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

D 的一般项中 n 个元素的乘积为:

$$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

它的各个元素位于 D 中不同的行、列上,因而也是 D_1 中不同行列上的元素的乘积。该乘积在 D 中的符号为:

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

由于 D_1 是互换 D 的第 i 行与第 s 行得出的,列的次序并没有改变,并且注意到 $\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)$ 是奇数,所以它在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

可见 D_1 中的每一项都是 D 的对应项的相反数:$D=-D_1$。

推论 如果行列式中的两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零。

因为将行列式 D 相同的两行互换,其结果不变,但由性质 2 知它同时又等于相反数:$D=-D$,故 $D=0$。

性质 3 用数 k 乘行列式某一行(列)的所有元素,等于以数 k 乘此行列式。即:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

证明: 根据行列式定义:

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD$$

推论 1 行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面。

推论 2 若行列式 D 有一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零。

推论 3 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零。

性质 4　若行列式 D 中第 i 行(列)的所有元素都可以表示成两个数的和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 可以写成两个行列式的和，其中一个行列式的第 i 行元素是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$，另一个行列式的第 i 行元素是 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$，而这两个行列式的其它各行都与 D 相同。即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由行列式定义：

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}$$

性质 5　将行列式某一行(列)的所有元素乘以同一数 k 后，加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\times k \\ \\ s\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由性质 4 及性质 3 的推论 3 即可得证。

下面举例说明如何利用行列式的性质，使行列式的计算简化，使高阶行列式的计算成为可能。

例 1　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$$

解　因为第一列与第二列对应元素成比例，根据性质 3 推论 3：D=0。

例 2　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 302\\ -4 & 3 & 297\\ 2 & 2 & 203\end{vmatrix}$$

解 利用性质 4 和性质 3 的推论 3，有：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 3 & 300+2\\ -4 & 3 & 300-3\\ 2 & 2 & 200+3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 3 & 300\\ -4 & 3 & 300\\ 2 & 2 & 200\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=0+5=5$$

例 3 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

解 利用性质 2 和性质 5 把原行列式化为上三角形行列式：

$$D=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\ \times 1,\ \times(-2)\ =-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & -4\end{vmatrix}\ \times 1,\ \times 3$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{vmatrix}\ \times(-1)\ =-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=4$$

利用行列式性质，把行列式化为上(下)三角形行列式或对角形行列式，再求出行列式的值，是计算行列式的基本方法之一。如例 3 所示，如果第一行第一列上的元素 $a_{11}=0$，可先将第一行与其它行交换，使位于第一列的第一个元素不为 0；然后把第一行的合适倍数加到其它各行，使第一列的其余元素全为 0；再用同样的方法处理第二列，使第二列位于元素 a_{22} 之下的其余元素全为 0；依次作下去，直至成为上三角形行列式，这时主对角元素的乘积就是行列式的值。

例 4 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}x-a & a & a & \cdots & a\\ a & x-a & a & \cdots & a\\ a & a & x-a & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & a & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

解 行列式各行元素之和等于 $x+(n-2)a$，把行列式的第二列，…，第 n 列都加到第一列，得：

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-2)a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

提取第一列的公因子，再把第一行的(−1)倍加到其余各行上去，得：

$$D_n=[x+(n-2)a]\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}。$$

例 5 解方程：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}-x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}=0$$

解 把方程左端的行列式记为 D，以(−1)乘 D 的第一行分别加到第 i 行($i=2,3,\cdots,n$)，得：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

$$=a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_{n-1}-x)$$

由此得方程的(n−1)个根为：

$$x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots,x_{n-2}=a_{n-2},x_{n-1}=a_{n-1}。$$

练习 1.2

1. 若行列式有一行(列)是其余某些行(列)的一些倍数之和，则行列式的值为 0。
2. 已知 204,255,527 三个数都是 17 的整数倍，试证下面的三阶行列式也是 17 的整数倍。

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

3. 证明下列等式成立：

(1) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a^4$。

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　(3) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(4) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$　$(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$

§1.3 行列式按行(列)展开

一、行列式按某一行(列)展开

定义 1.6 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来的顺序构成的 n－1 阶行列式，称为元素 a_{ij}的**余子式**，记为 M_{ij}。而把 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的**代数余子式**。

例如，在四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

中，a_{12}的代数余子式是：