

吕文灿 编

风机三元流动 理论与设计

华中科技大学出版社

知 识

PDG

风机三元流动理论与设计

吕文灿 编

责任编辑 韩瑞根

*

华中工学院出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

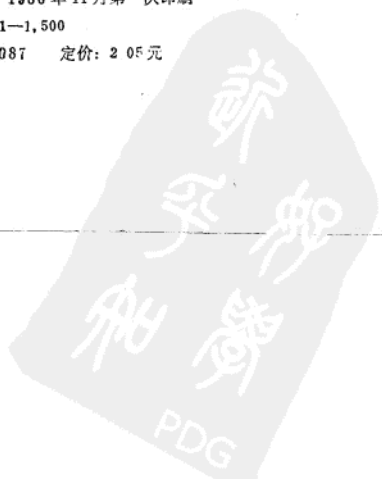
*

开本: 787×1092 1/16 印张: 12.25 字数: 285,000

1986年11月第一版 1986年11月第一次印刷

印数: 1—1,500

统一书号: 15255-087 定价: 2.05元



前 言

本书系根据机械部流体动力机械教材分编委会 1983 年 11 月西安会议与 1984 年 5 月上海会议关于高等工业学校压缩机专业《透平压缩机械三元流动》选修课教学大纲编写的。

本书的编写是基于如下看法：

1. 各类风机，包括通风机、鼓风机与透平压缩机，在国民经济中应用广泛，耗能多，据统计每年耗电量约占全国总发电量的 12%。

2. 三元流动理论在我国早已建立，并在国外受到了普遍重视和广泛应用。但在我国，将三元流理论有效地应用于工程实践，为经济建设服务还做得很少，在风机工业方面尤其如此。

3. 当前，我国风机的设计，一般仍采用“一元流”理论，设计水平不高，因此产品的技术水平与质量也不高，大部分产品还只相当于国际上六十年代水平。

随着我国国民经济的迅速发展，国民经济各个部门对风机的设计提出了新的技术经济指标与要求，例如要求风机具有高效率、高负荷、低噪音、尺寸小及工况宽等等。因此，对各类风机，包括通风机在内，应该突破“一元”乃至“二元”流动的设计方法的束缚，而采用沿空间任意流动方向的三元流动设计法。五十年代初期，我国吴仲华教授发表了关于理想气体的“三元流动通用理论”的文章[1]，但当时由于数值计算上的困难，未能得到实际应用。现在，应用计算机，将三元流理论应用于工程实践，特别是应用于风机的设计已经有了条件。

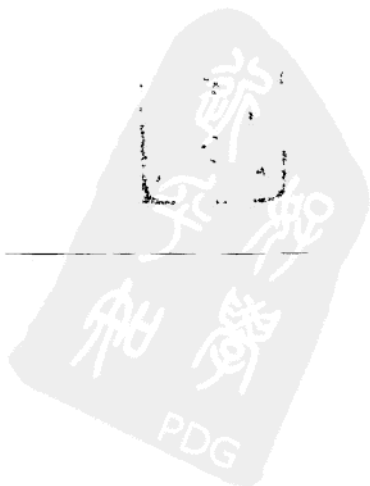
基于上述看法，本书力图对风机三元流动的基本理论作简明扼要的阐述，着重于研究方法与数值解法的描述；同时探讨三元流动理论应用于各类风机的设计与计算的方法。全书共分六章。第一章叙述风机三元流动研究所需的基本知识与方法；第二、三章阐述三元流动的基本方程与气动理论；第四章介绍三元流动的三种数值解法：流线曲率法、通流矩阵法及有限元法。第五、六章分别叙述离心式（混流式）与轴流式（斜流式）风机三元叶轮的设计与计算方法。

本书可作为高等学校风机与压缩机、流体机械、燃气轮机等专业选修课的教材，也可供从事风机和流体机械的工程技术人员参考。

书中如有不妥之处，敬希读者批评指正。

编 者

一九八五年八月



目 录

主要符号说明	(1)
第一章 风机三元流动的基本知识与研究方法	(3)
§1-1 风机内部流场特征	(3)
§1-2 直角坐标系与圆柱坐标系之间基本参量转换	(4)
§1-3 绝对与相对坐标系之间的关系	(7)
§1-4 几种数学表达式	(10)
§1-5 曲线坐标系	(14)
§1-6 三元流动的研究动向	(19)
第二章 三元流动基本方程	(22)
§2-1 连续方程	(22)
§2-2 粘性气体不定常运动方程	(24)
§2-3 理想气体定常运动方程	(28)
§2-4 理想气体运动方程的积分	(30)
§2-5 能量方程	(32)
§2-6 初始条件与边界条件	(35)
第三章 两类相对流面的气动理论	(37)
§3-1 两类相对流面的概念及其计算模型	(37)
§3-2 沿流面的偏导数及其与流速的关系	(40)
§3-3 气体沿 s_1 与 s_2 流面的基本方程组	(41)
一、 s_2 流面	(42)
二、 s_1 流面	(48)
三、轴对称方程	(49)
§3-4 三元流动的普遍关系式及其应用	(50)
第四章 三元流动数值解法	(55)
§4-1 流线曲率法	(55)
一、 s_2 流面正、反问题计算	(55)
二、 s_1 回转面正问题计算	(65)
§4-2 通流矩阵法	(68)
一、 s_2 流面	(68)
二、 s_1 流面	(80)
§4-3 有限元法	(84)

一、变分法概述	(85)
二、有限元法的基本内容与步骤	(90)
三、 S_2 流面气动问题的有限元解法	(93)
四、任意旋成面叶栅正问题变分原理与有限元解法	(102)
第五章 离心式风机三元叶轮设计计算	(112)
§5-1 离心式叶轮实际气体流动模型与设计考虑之因素	(112)
§5-2 三元叶片与中间流面的几何描述	(118)
§5-3 离心式三元叶轮正问题计算	(123)
一、概述	(123)
二、中间流面正问题计算	(124)
三、回转面正问题计算——流线曲率法与快速分析法	(126)
四、按映象平面的流函数法计算回转面	(129)
五、密度计算	(132)
§5-4 中间流面几何参数计算	(134)
§5-5 离心式三元叶轮反问题计算与三元翼型设计	(139)
一、中间流面反问题计算	(139)
二、翼型最佳设计的约束条件	(140)
三、叶片子午面形状设计	(143)
四、叶片弯曲角的设计规律	(143)
五、叶片径向面形状设计	(145)
六、叶片形状的修改	(147)
§5-6 数值解法过程及程序说明	(147)
第六章 轴流式风机三元叶轮设计计算	(153)
§6-1 倾斜流面的一般概念及其设计方案	(153)
§6-2 沿子午面任意准正交线的气动方程与解法	(157)
一、沿子午面准正交线正、反问题方程	(157)
二、损失分布	(158)
三、方程的解法	(161)
四、完全径向平衡方程式的求解	(164)
五、子午流面气动计算的主要步骤	(167)
§6-3 轴流式三元叶片设计方法	(167)
§6-4 轴流式风机中粘性损失的处理方法	(179)
§6-5 工程应用实例——子午加速风机设计	(183)
附录 高斯求积公式的权系数与横坐标	(188)
参考文献	(188)

主要符号说明

A 面积; 系数	l 叶片高度; 子午面沿流线弧长方向线段
a 音速; 翼型前缘至最大挠度处距离; 加速度	M 马赫数
B 系数; s_2 流面角厚度; 弦长 b 在子午 面投影	m 质量流量
b 弦长; s_1 流面流片法向厚度	N 功率; 叶片数
b/t 叶栅实度, $b/t = \sigma$	n 转速; 多变指数; 法线方向
C 绝对速度; 翼型最大厚度	P 全压
c_p 定压比热	p 压力
c_v 定容比热	Q 外加热量; 熵函数; 容积流量
C_x 绝对速度 x 分量	q 对单位质量气体所加热量; 函数
c_x 阻力系数	R 气体常数; 圆锥坐标系中的径线
C_y 绝对速度 y 分量	$r, \theta(\varphi), z$ 圆柱坐标系坐标轴
c_y 升力系数	S 熵
D 直径; 扩压因子; 系数	s 路径; 准正交线方向
$\bar{d}$ 轮毂直径比	s_1, s_2 相对流面
E 总内能; 系数	T 绝对温度
e s_1 流面沿流线方向线段	t 时间; 栅距; 摄氏温度
$\bar{F}$ 质量力; 叶片力	U 内能
f 粘性力	u 圆周速度; 单位质量内能; 函数
h_t 欧拉理论能量头	v 比容; 函数
I 转子焓; 变量	W 相对速度
i 静焓; 冲角	x, y, z 直角坐标系的坐标轴
K 局部转角; 变量; 系数	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ 直角坐标的单位向量
K_h 减功系数	$\bar{i}_r, \bar{i}_\theta(\bar{i}_\varphi), \bar{i}_z$ 圆柱坐标的单位向量
K_m 流量储备系数	y 沿空间任意曲线方向
k 绝热指数	α 子午流线倾角, 即 l 方向与 z 轴的夹角
L 微元体所做之功	β 相对气流角
L_i 微元体对惯性力所做之功	β_0 翼型安装角
L_p 微元体克服表面力所做之功	γ 叶弦角, $\gamma = 90^\circ - \beta_0$
	∇ 微分运算符
	δ 落后角; 附面层厚度; 变分符号

δ_m	微元体质量	pol	多变
ε	压力比; 最大误差值; 幅角	t	叶尖
η	效率	R	转子
σ	总压恢复系数; 叶栅实度	s	静子; 吸力面
θ	翼型弯曲角; 附面层动量厚度; 坐标转角	st	级
μ	动力粘性系数; 速度比	j	准正交线号
ρ	密度	k	流线号
λ	速度系数	0	计算工况
Φ	势函数	u	周向
ϕ	形函数; 流量系数	W	相对值
ψ	准正交线 s 与 r 轴的夹角; 流函数	m	平均值
ω	角速度	e	有限单元; 基元级
Ω	反应度; 涡度; 二维区域	mer	子午加速式
Γ	速度环量; 分离判别准则	sp	积迭点
τ	切向应力	g	静叶栅
ξ, η	局部坐标	p	压力面
	下标:	b	分离点
1	工作轮进口		上标:
2	工作轮出口; 导流器进口	*	滞止参数
3	导流器出口	v	迭代次数
A	安装角	$\rightarrow$	矢量
ad	等熵	(e)	有限单元或序号
h	叶根	—	相对值



第一章 风机三元流动的基本知识与研究方法

本章概述风机三元流动的基本知识与研究方法，其内容主要包括：风机内部气体流动特征；不同坐标系之间参数转换；绝对运动与相对运动参数转换；几种数学表达式；曲线坐标系及三元流动的研究动向。

§1-1 风机内部流场特征

风机属于透平机械。透平机械指的是一切由旋转的工作叶片和静止的导流叶片组合而成的机械。与一切透平机械相类似，风机的通流部分是由按顺序排列的动叶（工作叶片）与静叶（导流叶片）组成。这种流道结构的特点决定了其内部流场的复杂性。它的特征有如下几点。

（一）风机内部气体的实际流动是三元流动

所谓三元流动，其含义是指在实际流场中，所有气流参数都是空间坐标系上三个方向的变量的函数。首先，根据能量方程与连续方程，气流参数沿轴向必有变化。其次，由于有机功的输入，气流在工作叶片通道内的压力面与吸力面之间必然形成压力差，从而使气流参数沿周向呈周期性变化。最后，由于转子的圆周速度沿叶高的变化和气体沿径向的完全平衡，气流参数沿半径也必有变化。这种特性是实际气体最主要的流动特征之一。当然，在某些条件下，可以把三元流动加以简化。例如，当取流道中心流线 l 作为坐标时，气流就可看成是沿流向 l 的一元流动。五十年代对热力透平机械的设计计算都是采用这种方法。以后，在一元流动的基础上作了改进，即气流不仅根据沿某一方向上的变量进行计算，而且在与之准正交的另一方向上也采取适当的方法考虑流场参数的变化。这就是准二元流动分析。任意旋转面叶栅的设计就是属于这一范畴。现在，由于高速电子计算机技术的发展，已经能够将二元流和准三元流理论直接用于包括风机在内的透平机械工程设计中，并在直接求解三元流动方面也有了新的进展（见文献[34]）。

（二）实际气体都是有粘性的

这种粘性必然会在通流部分的叶片表面与环形通道的端壁上产生附面层。附面层与主流之间的相互作用，使流场出现更为复杂的现象，其中主要的是二次流的现象。二次流包括与叶片压力面和吸力面的压力差有关的周向二次流、与附面层和主流区的径向流动有关的径向二次流。前者将在叶片出口处形成旋涡，后者将使附面层内气流质点向动叶顶部或静叶根部聚集。因此，附面层的产生、发展与分离都将对主流发生干扰作用。

在风机的设计中，要完全考虑上述粘性力的影响是困难的。我们的处理方法是：假定粘性的作用只集中在附面层内，而在主流区则可以忽略粘性力的影响。这样，就可以在运动方程中略去粘性力项，而只考虑粘性引起的熵的变化。关于粘性的处理将在以后的章节中详细论述。

(三) 风机通流部分是由一系列旋转部件(工作轮)与静止部件(导流器)组合而成。这种情况下, 气体运动必有两种运动, 即绝对运动与相对运动, 从而形成了风机流场所特有的复杂的边界条件。

(四) 风机内部实际气体流动都是非定常的

例如旋转的工作轮内气体的绝对运动必然是非定常的, 否则能量就无从输入。为了便于研究, 假定转子角速度为常值, 各相邻的动、静叶片间相隔足够远, 则可以认为非定常流动的气流参数的周期平均值与定常流动时的数值近似相等。于是, 气流在工作轮中的相对运动和在导流器中的绝对运动可以认为是定常运动。实践表明, 这一假定条件是符合实际的。

(五) 在一般情况下, 实际气体都是可压缩的非理想气体

随着级负荷和圆周速度的增加, 气体的可压缩性是不能忽略的。例如, 运输式的轴流式压气机, 其动叶的叶尖进口的马赫数常达 $0.8 \sim 0.9$ 左右, 这往往可能产生局部超音速并出现冲波, 这时气体的可压缩性就不能忽略了。在风机设计中, 通常可根据压比或风机静压升的大小引进压缩性修正系数以考虑压缩性的影响。

今后的任务是寻求与建立具有不同边界条件的风机内部流动模型(数学模型)和它们的求解方法。

§1-2 直角坐标系与圆柱坐标系之间基本参量转换

运动有绝对运动与相对运动, 坐标系也有绝对坐标系与相对坐标系。不论是在绝对坐标系中还是在相对坐标系中, 又可采用不同参变量的坐标系。例如, 在绝对坐标系下, 对风机来说, 既可用以参量 r, θ, z 表示的圆柱坐标系, 又可用以参量 x, y, z 表示的直角坐标系。这两种坐标系之间的关系可参见图

1-1。对一切旋转机械(特别是轴对称的)来说, 最适宜采用的是圆柱坐标系。但直角坐标系也有其显著特点, 因为这种坐标系的任何单位矢量方向都不因空间位置的改变而变化。从而直角坐标系能以最简明的形式表达流场中诸参量之间的关系。

现在以绝对运动坐标系为前提, 讨论直角坐标系与圆柱坐标系的参量之间的关系。

由图1-1可见, 空间任意点 P 的直角坐标系与圆柱坐标系的参数之间存在如下关系:

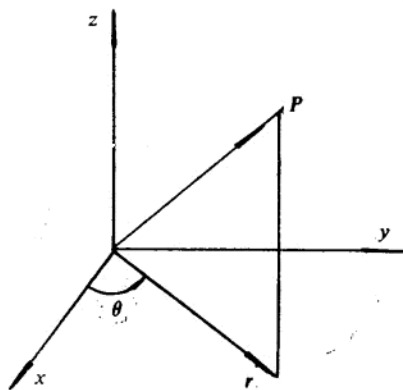


图1-1 直角坐标系与圆柱坐标系

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} y/x \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

为了求得其他参量（例如速度、加速度、偏导数等）分别用上述两种坐标系的转换关系时，必须对两种坐标系之间的关系作矢量分析。

设空间流场中某一点 P ，其位置用位置矢量 $\vec{r}_p$ 来表示，用 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 及 $\vec{i}_r$ 、 $\vec{i}_\theta$ 、 $\vec{i}_z$ 分别表示直角坐标系与圆柱坐标系的单位矢量，则点 P 的位置矢量

$$\vec{r}_p = r \vec{i}_r + z \vec{i}_z = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1-3)$$

由图 1-2 不难得到两种坐标系单位矢量之间的关系为

$$\begin{aligned} \vec{i}_r &= \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \\ \vec{i}_\theta &= -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta \\ \vec{i}_z &= \vec{k} \end{aligned} \quad (1-4)$$

在圆柱坐标系中，单位矢量 $\vec{i}_r$ 与 $\vec{i}_\theta$ 的方向将随 P 点的空间位置的变化而变化。因此，在 dt 时间内，当点的位置在空间变化 $d\vec{r}$ 时，相应的 $\vec{i}_r$ 与 $\vec{i}_\theta$ 也改变 $d\vec{i}_r$ 与 $d\vec{i}_\theta$ 。而 $\vec{i}_z$ 的方向是不变的，故可得：

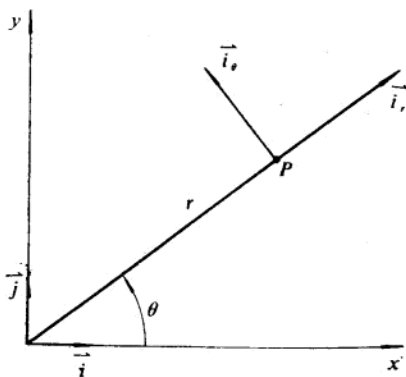


图 1-2 单位矢量分析图

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}_r}{dt} &= \left(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{i}_\theta \\ \frac{d\vec{i}_\theta}{dt} &= \left(-\vec{i} \cos \theta - \vec{j} \sin \theta \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{i}_r \\ \frac{d\vec{i}_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (1-5)$$

将式(1-4)代入速度矢量方程

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k} = C_r \vec{i}_r + C_\theta \vec{i}_\theta + C_z \vec{i}_z$$

可得用直角坐标系与圆柱坐标系时速度分量中的转换关系：

$$\begin{aligned} C_x &= C_r \cos \theta - C_\theta \sin \theta \\ C_y &= C_r \sin \theta + C_\theta \cos \theta \\ C_z &= C_z \end{aligned} \quad (1-6)$$

为简化式(1-1)，令 $x = f_1(r, \theta)$ ， $y = f_2(r, \theta)$ ， $z = f_3(z)$ ，则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-7)$$

由式(1-2)可得：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cos\theta \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

将以上诸关系代入式(1-7)，便建立了直角坐标系与圆柱坐标系之间任意标量对坐标的偏导数的关系：

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (1-7a)$$

以上结果对任意偏导数的坐标转换将起重要作用。利用式(1-7a)，可以方便地将直角坐标系的哈密尔顿算子

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

转换成圆柱坐标系的算子。

由图1-2可以得到直角坐标系单位矢量与圆柱坐标系的单位矢量之间的转换关系[类似于式(1-4)]：

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos\theta \hat{i}_r - \sin\theta \hat{i}_\theta \\ \hat{j} &= \sin\theta \hat{i}_r + \cos\theta \hat{i}_\theta \\ \hat{k} &= \hat{i}_z\end{aligned} \quad (1-4a)$$

将式(1-4a)及式(1-7a)代入直角坐标系的算子 ∇ ，则有

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\cos\theta \hat{i}_r - \sin\theta \hat{i}_\theta) \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + (\sin\theta \hat{i}_r + \cos\theta \hat{i}_\theta) \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \hat{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \quad (1-8)$$

式(1-8)便是在圆柱坐标系下的哈密尔顿算子。

利用以上推得的公式，可方便地将各种方程直接进行坐标转换。例如可将直角坐标系的运动微分方程直接转换成圆柱坐标系的运动微分方程。读者可自行推导。

§1-3 绝对与相对坐标系之间的关系

上节已指出, 两种坐标系, 都可描述绝对运动与相对运动。如果圆柱坐标系与旋转的工作轮固连在一起, 则此坐标系即称相对圆柱坐标系, 其坐标以 (r, φ, z) 表示之, 其中 z 轴与转动轴重合, φ 角的增加方向与工作轮的旋转方向一致。如果圆柱坐标系是与地面固连在一起, 则称绝对圆柱坐标系, 其坐标以 (r, θ, z) 表示之。同样, 对于直角坐标系, 也存在着绝对与相对两种坐标系。由于研究方法大致相同, 故这里只着重讨论圆柱坐标系的绝对坐标系与相对坐标系之间的参数变换。

设空间某点 P 的绝对圆柱坐标为 r, θ, z , 瞬时时间为 t 。 P 点的相对圆柱坐标为 r', φ, z' , 瞬时时间为 t' , 并认为两种坐标系的原点始终重合, 则两种坐标的相互关系 (图1-3) 为

$$\left. \begin{aligned} t &= t' \\ r &= r' \\ z &= z' \\ \theta &= \varphi + \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

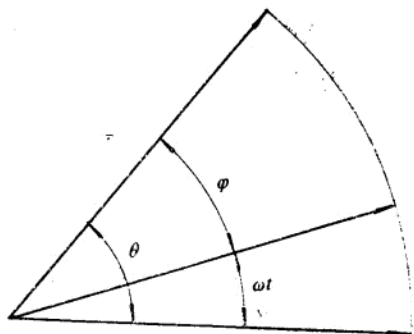


图1-3 绝对坐标角与相对坐标角之间的关系

由上式可知, 除了绝对坐标角 θ 与相对坐标角 φ 不同以外, 两种坐标系的其余参量彼此相同。故在今后的研究中不再区分 t 与 t' 、 r 与 r' 、 z 与 z' 。

由式(1-9)可得两种坐标系的单位矢量之间关系:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_r &= \vec{i}_r' \\ \vec{i}_\theta &= \vec{i}_\varphi \\ \vec{i}_z &= \vec{i}_z' \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

即两种坐标系的单位矢量相同。

在绝对与相对坐标系下, 速度矢量表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} \vec{C} &= C_r \vec{i}_r + C_\theta \vec{i}_\theta + C_z \vec{i}_z \\ \vec{W} &= W_r \vec{i}_r + W_\theta \vec{i}_\theta + W_z \vec{i}_z \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

由速度矢量的定义并考虑到式(1-5)有

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\vec{i}_r + z\vec{i}_z) \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{i}_r + r \frac{d\vec{i}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{i}_z \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{i}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{i}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{i}_z \end{aligned} \quad (1-12)$$

将上式与式(1-11)比较可得:

$$\left. \begin{aligned} C_r &= \frac{dr}{dt} \\ C_\theta &= r \frac{d\theta}{dt} \\ C_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

第 7 页

同理也可推得相对速度矢量

$$\vec{W} = \frac{d\vec{r}_p'}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{i}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{i}_z \quad (1-14)$$

相对速度诸分量为

$$\left. \begin{aligned} W_r &= \frac{dr}{dt} \\ W_u &= r \frac{d\varphi}{dt} \\ W_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

将式(1-9)对时间求全导数后与式(1-13)、(1-15)比较便得绝对速度与相对速度之间的关系式:

$$\left. \begin{aligned} C_r &= \frac{dr}{dt} = W_r \\ C_u &= r \frac{d\theta}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} + \omega r \\ &= W_u + \omega r \\ C_z &= \frac{dz}{dt} = W_z \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

其矢量形式为

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}_p = \vec{W} + \vec{u} \quad (1-17)$$

式中, $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}_p$ 为工作轮以角速度 ω 旋转时与气体质点重合点的牵连速度。式(1-17)表明, 气体质点的绝对速度等于相对速度与牵连速度的几何和。式(1-16)和式(1-17)是分析透平机械内部流场的最基本关系式之一。

现在进一步分析气体质点运动的加速度。利用式(1-11)、式(1-5)和式(1-13)可得气体质点的绝对加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\vec{C}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (C_r \vec{i}_r + C_u \vec{i}_\theta + C_z \vec{i}_z) \\ &= \frac{dC_r}{dt} \vec{i}_r + C_r \frac{d\vec{i}_r}{dt} + \frac{dC_u}{dt} \vec{i}_\theta + C_u \frac{d\vec{i}_\theta}{dt} + \frac{dC_z}{dt} \vec{i}_z \\ &= \left(\frac{dC_r}{dt} - \frac{C_u^2}{r} \right) \vec{i}_r + \left(\frac{dC_u}{dt} + \frac{C_r C_z}{r} \right) \vec{i}_\theta + \frac{dC_z}{dt} \vec{i}_z \end{aligned} \quad (1-18)$$

由上式可得加速度 $\vec{a}$ 在 r 、 θ 、 z 方向的分量:

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \left(\frac{d\vec{C}}{dt} \right)_r = \frac{dC_r}{dt} - \frac{C_u^2}{r} \\ a_\theta &= \left(\frac{d\vec{C}}{dt} \right)_\theta = \frac{dC_u}{dt} + \frac{C_r C_z}{r} \\ a_z &= \left(\frac{d\vec{C}}{dt} \right)_z = \frac{dC_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

同理可求得相对加速度及其分量的表达式:

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \left(\frac{dW_r}{dt} - \frac{W_u^2}{r} \right) \vec{i}_r + \left(\frac{dW_u}{dt} + \frac{W_r W_z}{r} \right) \vec{i}_\theta + \frac{dW_z}{dt} \vec{i}_z \quad (1-20)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_r &= \frac{dW_r}{dt} - \frac{W_u^2}{r} \\ \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_\varphi &= \frac{dW_u}{dt} + \frac{W_r W_u}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(W_u r)}{dt} \\ \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_z &= \frac{dW_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

为了求得绝对加速度与相对加速度之间的关系，可将绝对速度与相对速度的关系式(1-16)代入式(1-19)，并利用式(1-21)便得：

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \frac{dC_r}{dt} - \frac{C_u^2}{r} = \frac{dW_r}{dt} - \frac{(W_u + \omega r)^2}{r} \\ &= \left(\frac{dW_r}{dt} - \frac{W_u^2}{r}\right) - 2\omega W_u - \omega^2 r \\ &= \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_r - 2\omega W_u - \omega^2 r \\ a_\theta &= \frac{dC_u}{dt} + \frac{C_r C_u}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(C_u r)}{dt} = \frac{d(W_u r + \omega r^2)}{r dt} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d(W_u r)}{dt} + 2\omega W_r \\ &= \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_\varphi + 2\omega W_r \\ a_z &= \frac{dC_z}{dt} = \frac{dW_z}{dt} = \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_z \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

式(1-22)的矢量表达式为

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\vec{W}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1-23)$$

由式(1-23)可见， $\frac{d\vec{C}}{dt}$ 与 $\frac{d\vec{W}}{dt}$ 之间多出了右边二项。第一项 $2\vec{\omega} \times \vec{W}$ 称哥氏加速度，其方向始终垂直于 $\vec{W}$ 。它是由气体质点相对于作旋转运动的工作轮的运动所产生的。因为

$$\vec{\omega} = \omega \vec{i}_z, \quad \vec{W} = W_r \vec{i}_r + W_u \vec{i}_\varphi + W_z \vec{i}_z$$

故有

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega} \times \vec{W} &= 2 \begin{vmatrix} \vec{i}_r & \vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ W_r & W_u & W_z \end{vmatrix} \\ &= -2\omega W_u \vec{i}_r + 2\omega W_r \vec{i}_\varphi \end{aligned} \quad (1-24)$$

可见哥氏加速度只在 r 、 φ 方向有分量。

除 $2\vec{\omega} \times \vec{W}$ 外，式(1-23)右边最后一项 $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 称牵连加速度，此处即向心加速度。它是相对坐标系的旋转运动所产生的。它的矢量分解式如下：

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ &= -\vec{r}\omega^2 = -r\omega^2 \vec{i}_r \end{aligned} \quad (1-24a)$$

式(1-23)以下的式中，径矢 $\vec{r}$ 之下标 p 省去。

由上式表明，向心加速度指向 $-\vec{r}$ ，在 φ 、 z 方向无分量，其大小等于 $r\omega^2$ 。

由梯度表达式

$$\omega^2 \nabla \left(\frac{r^2}{2} \right) = \nabla \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = r\omega^2 \vec{i}_r$$

式(1-23)可写成

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{C}}{dt} &= \frac{d\vec{W}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} - r\omega^2 \vec{i}_r, \\ \frac{d\vec{C}}{dt} &= \frac{d\vec{W}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{W} - \nabla \left(\frac{r^2 \omega^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (1-23a)$$

式(1-23)的物理意义在于：对绝对坐标系来说，在单位质量气体上受到的力等于 $\frac{d\vec{C}}{dt}$ 。方程式表明，这个力是由使单位质量气体产生相对加速度 $\frac{d\vec{W}}{dt}$ 、哥氏加速度 $2\vec{\omega} \times \vec{W}$ 和向心加速度 $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 的三种力所合成的。对相对坐标系来说，工作轮静止不动，气体在工作轮中以速度 $\vec{W}$ 和加速度运动。根据达朗勃原理，单位质量气体受到的力等于 $\frac{d\vec{W}}{dt}$ ，而这个力是由实际作用于单位质量气体上的力 $\frac{d\vec{C}}{dt}$ 、虚拟惯性力（即离心力） $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ 、哥氏惯性力 $-2\vec{\omega} \times \vec{W}$ 所合成的。在这几种力的作用下，单位质量的气体产生了 $\frac{d\vec{W}}{dt}$ 的加速度，即

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{d\vec{C}}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{W}$$

因此，今后分析气体质点上的作用力时，必须指明观察者所处的位置。

§1-4 几种数学表达式

（一）运动参数的全导数

一个运动的气体质点，经 Δt 时间后其空间位移有 Δx 、 Δy 、 Δz 相应的变化。因而此质点的运动参数（或状态参数）是时间与空间坐标的函数。若以 u 表示质点的运动参数（或状态参数），则其变化率为

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(t, x, y, z)$$

式中， x 、 y 、 z 又都是 t 的函数，并连续可导，则函数 u 对 t 的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial u}{\partial x} + C_y \frac{\partial u}{\partial y} + C_z \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-25)$$

式中， $\frac{\partial}{\partial t}$ 项是属于运动非定常性产生的变化率，而 $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial}{\partial z}$ 项则是由于流场的空间不均匀性所引起的变化率。

在圆柱坐标系中，气体运动速度 $\vec{C}$ 及其诸分量 C_r 、 C_θ 、 C_z 都是时间与空间坐标的连续函数

$$\vec{C} = \vec{C}(t, r, \theta, z)$$

因而按式(1-25)，速度分量 C_r 、 C_θ 、 C_z 对时间的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{dC_r}{dt} &= \frac{\partial C_r}{\partial t} + \frac{\partial C_r}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \frac{r d\theta}{dt} + \frac{\partial C_r}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dC_\theta}{dt} &= \frac{\partial C_\theta}{\partial t} + \frac{\partial C_\theta}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \frac{r d\theta}{dt} + \frac{\partial C_\theta}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dC_z}{dt} &= \frac{\partial C_z}{\partial t} + \frac{\partial C_z}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial C_z}{\partial \theta} \frac{r d\theta}{dt} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}\end{aligned}\quad (1-26)$$



将式(1-26)代入式(1-19)并利用式(1-13), 则可得圆柱坐标系的绝对运动加速度的诸分量表达式:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{C}}{dt}\right)_r &= \frac{\partial C_r}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_u \frac{\partial C_r}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} \\ \left(\frac{d\vec{C}}{dt}\right)_u &= \frac{\partial C_u}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_u}{\partial r} + C_u \frac{\partial C_u}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial C_u}{\partial z} + C_r C_u \\ \left(\frac{d\vec{C}}{dt}\right)_z &= \frac{\partial C_z}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + \frac{C_u}{r} \frac{\partial C_z}{\partial \theta} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-27)$$

同理可得相对运动加速度的诸分量的表达式:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_r &= \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_u^2}{r} \\ \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_u &= \frac{\partial W_u}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + \frac{W_r W_u}{r} \\ \left(\frac{d\vec{W}}{dt}\right)_z &= \frac{\partial W_z}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (1-28)$$

式(1-27)可用矢量导数表示, 即

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{C} \quad (1-29)$$

从上式可见: 等号右边第一项是由于时间变化引起的加速度分量; 第二项则是由于空间位置变化引起的加速度分量。

因 $(\vec{C} \cdot \nabla) \vec{C} = \nabla \left(\frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times (\nabla \times \vec{C})$

故有

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times (\nabla \times \vec{C}) \quad (1-29a)$$

对于定常运动, 有

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{C} = \nabla \left(\frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times (\nabla \times \vec{C}) \quad (1-29b)$$

同样相对运动加速度分量公式(1-28)可写成

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{W}}{dt} &= \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{W} \\ &= \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W})\end{aligned}\quad (1-30)$$

对于定常运动, 有

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{W} = \nabla \left(\frac{W^2}{2} \right) - \vec{W} \times (\nabla \times \vec{W}) \quad (1-30a)$$

由以上诸式可见, 矢量参数对时间的全导数可用一般形式表达为

$$\left. \begin{aligned}\frac{d(\quad)}{dt} &= \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\vec{C} \cdot \nabla)(\quad) \\ \frac{d(\quad)}{dt} &= \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla)(\quad)\end{aligned}\right\} \quad (1-31)$$

或

式(1-31)也适用于标量参数,例如对气体的压力 p 、密度 ρ 来说,它们的全导数可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{C} \cdot \nabla) p \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{C} \cdot \nabla) \rho \end{aligned} \right\} \quad (1-31a)$$

必须指出的是:标量函数与选取的坐标系(例如绝对坐标系或相对坐标系)无关。

(二) 梯度

设三元连续可微函数 $u = f(x, y, z)$ 沿其等值面之法向单位矢量为 $\vec{n}$, 则称

$$\text{grad } u = \frac{du}{dn} \vec{n}$$

为函数 u 的梯度。它的数学含义是函数 u 沿任意方向导数中的最大值。设 u 沿 s 方向的数量为最大, 则

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \end{aligned}$$

式中, $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos \beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos \gamma = \frac{dz}{ds}$, α, β, γ 为 ds 与直角坐标系中三轴的夹角。

设

$$\frac{du}{ds} = \vec{g} \cdot \vec{S}$$

则

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{S} &= \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \\ |\vec{S}| &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1 \end{aligned}$$

可见 $\vec{S}$ 是一个单位矢量。故有

$$\frac{du}{ds} = \vec{g} \cdot \vec{S} = |\vec{g}| |\vec{S}| \cos \theta = |\vec{g}| \cos \theta$$

当 $\cos \theta$ 取最大值时, 即有 $\vec{S} = \vec{n}$, 亦即

$$|\vec{g}| = \frac{du}{dn}$$

因而

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \frac{du}{dn} \vec{n} = \text{grad } u \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \\ &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u \\ &= \nabla u \end{aligned} \quad (1-32)$$

式中 $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ 亦称矢量微分算子。