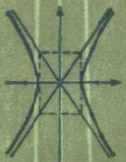

中学数学复习资料

ZHONGXUE SHUXUE FUXI ZILIAO

《中学数学复习资料》编写组编

湖 北 人 民 出 版 社

中学数学复习资料

《中学数学复习资料》编写组编

湖北人民出版社

中学数学复习资料

《中学数学复习资料》编写组编

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

襄阳报印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　22.875 印张　531,000 字

1978 年 6 月第 1 版　1978 年 6 月第 1 次印刷

统一书号：7106·1401　定价：1.55 元

前　言

为了积极提高中学数学教学质量，我们——武汉市中小学教材编写组、武汉师范学院、武汉市教师进参学院和武昌实验中学联合编写了这本《中学数学复习资料》，经湖北省中小学教学教材研究室组织审定，供我省高中学生复习和社会专年自学及中学教师参考。

本书内容包括代数、几何、三角、解析几何和附录等五卩分。各卩分的基本内容以省编中学数学教材（一九七三年版）为主要依据，同时参照教育卩 1977 年制定的《中学数学教学大纲》（试行草案）中所规定的传统数学内容，比现行教材又略有增加。所加卩分，均标有“*”号，便于读者自行选择。凡现行教材已详讲的卩分，只列内容提要，不加解释和论证；尚未涉及的卩分，则叙述比较详细。各章例题、习题的配备比较充分，对常见习题类型和一般解题方法，大都做到有例可循，有题可练。读者应根据各自需要有所选择或侧重，不必每例必读，每题必做。较难习题都有提示，计算题附有答案，以便读者自学。

在编写过程中，武汉有关大专院校和中等学校的数学教师对本书提出了不少宝贵意见，在此致以真诚的谢意。

由于时间仓促，水平有限，本书一定存在许多缺点错误，请读者批评指正。

编　　者

一九七八年元月

目　录

代数卩分

几何卩分

平百三角卩分

解析几何部分

第一章* 复　　数

数是表达量的，它是具体量的抽象．数的概念，一般地是在自然数的基础上，为表示量的度量的需要，通过一次又一次地引入新数而形成的．例如在自然数的基础上引入正分数而形成正有理数；再引入零及负数而形成有理数；再引入无理数而形成实数；再引入虚数而形成复数．列表如下：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\end{array}\right\}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

数的扩充也是不断解决本身内在矛盾的结果．例如分数的出现解决了乘法逆运算的矛盾；零和负数的出现解决了加法逆运算的矛盾；无理数和虚数的引入解决了乘方逆运算的矛盾．最后在复数范围内，六种代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）可畅行无阻．但在除法中，零不能做除数．

有理数和实数在中学教本中已详细叙述，此处只概括其基本性质，重点放在复数上．

一、有理数集

数学中讨论的对象，如代数中的数，几何中的点、直线等，统称为元素（简称为元），若干个元素的集体称为集合（简称为集）．

由正整数、零、负整数以及正分数、负分数为元素构成的

数集，称为有理数集。

有理数集具有下述几种性质：

性质 1　在有理数集里，加、减、乘、除(除数不为零)这四种算术运算，永远可以单值地实施．且加法和乘法满足基本运算律：

加法的交换律：$a+b=b+a$，

加法的结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

乘法的交换律：$ab=ba$

乘法的结合律：$(ab)c=a(bc)$，

乘法对加法的分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

性质 2　在有理数集里，任意两个元素之间存在着顺序关系．且满足下面的基本顺序律：

对任意二数 a 和 b 的关系：$a=b$，$a<b$，$a>b$ 中的一种而且只有一种成立．

不等的对逆性：若$a<b$，则 $b>a$；若 $a>b$，则 $b<a$.

不等的传递性：若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$.

相等的传递性：若 $a=b$，$b=c$，则 $a=c$.

相等的反射性：$a=a$ 对于任何数 a 皆成立．

性质 2 称为有理数集的有序性．

性质 3　若 a，b 是两个有理数，如果 $a\gtreqless b$，则$a-b\gtreqless 0$；若 $a-b\gtreqless 0$，则 $a\gtreqless b$.

由性质 3，可导出如下的单调律：

若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

若 $a<b$，$c>0$，则 $ac<bc$.

性质 3 说明了算术运算与顺序间的关系，称为运算的比较性质．

性质 4　若 a，b 是两个相异的有理数，则 a，b 之间存在着无限多个有理数.

这个性质称为有理数集的稠密性.

任何一个有理数都可写成有限小数或无限循环小数的形式；反之，任何一个有限小数或无限循环小数都可化成有理数.

二、实数集

$\sqrt{2}$ 不是有理数，故 $\sqrt{2}$ 不是有限小数或无限循环小数. 因此把 $\sqrt{2}$ 用小数表示时，它是无限不循环小数.

无限不循环小数叫做无理数.

由正有理数、负有理数、零和正无理数、负无理数为元素构成的数集，称为实数集.

实数集具有下述几种性质：

性质 1　在实数集里，加、减、乘、除(除数不为零)这四种算术运算，永远可以单值地实施. 且加法和乘法满足基本运算律.

性质 2　实数和数轴上的点是一一对应的.

既然实数与数轴上的点是一一对应的，而直线上的点是连续的，所以我们把实数的这种性质，叫做连续性. 当然有理数集的稠密性在实数集里仍然成立.

性质 3　实数集里的任意两个元素之间存在着顺序关系，并且满足基本顺序律.

性质 4　实数集满足运算比较性质.

对实数进行运算时，通常根据需要的精确度取近似值进行运算.

三、复数集

1. 复数集的形成

(1) 虚数单位　要使方程 $x^2=-1$ 有确定的解，必须引进新数，用 i 表示这个新数，并且规定数 i 具有下面的性质：①$i^2=-1$；②i 与实数在一起，可以按照实数的运算法则进行运算.

数 i 称为虚数单位.

根据前面的规定，得 $(-i)^2=i^2=-1$，从而方程 $x^2+1=0$ 有两个根 i 与 $-i$；或者说 -1 有两个平方根 i 与 $-i$.

根据前面的规定，容易推出 i 的重要性质：

$$i^1=i,\qquad i^2=-1,$$
$$i^3=i^2\cdot i=-i,\qquad i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1.$$

推广到一般就有：

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

这个性质称为 i 的周期性.

(2) 纯虚数　要使方程 $x^2+2=0$ 有确定的解，可根据 i 的意义算出：

$$(\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2,\quad(-\sqrt{2}i)^2=(\sqrt{2}i)^2=-2.$$

可见这个方程有两个根 $\sqrt{2}i$ 与 $-\sqrt{2}i$.

一般而言，如果 a 是一个正实数，则 $\sqrt{a}$ 也是一个正实数，且

$$(\pm\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a.$$

这表明负数 $-a$ 的平方根有两个值 $\sqrt{a}i$ 与 $-\sqrt{a}i$.

形如 bi(b 是不等于零的实数)的数称为纯虚数.

(3) 虚数　要使方程 $x^2-2x+2=0$ 有确定的解，可用配方法把原方程化成 $(x-1)^2=-1$，可得 $x-1=\pm i$，从而有

$x=1\pm i$.

这表明方程 $x^2-2x+2=0$ 有两个根 $1+i$ 与 $1-i$.

形如 $a+bi$(a, b 都是实数，且$b\neq 0$)的数称为虚数.

(4) 复数　如果 a, b 都表示实数,那末形如 $a+bi$ 的数称为复数. a 称为复数的实部，bi 称为复数的虚部，b 称为虚部的系数.

当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就表示实数 a，即 $a+0i=a$.

当 $a=b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就表示数 0，即 $0+0i=0$.

当 $b\neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 是一个虚数. 此时若，$a=0$,那末它就表示纯虚数 bi，即 $0+bi=bi$.

上列各种情况可图示如下：

$$\begin{array}{l}\text{复数}\\ a+bi\end{array}\begin{cases}\text{实数}(a+0i=a)\\ \text{虚数}(a+bi,\ b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(0+bi=bi,\ b\neq 0)\\ \text{非纯虚数}(a+bi,\ a\neq 0,\ b\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

2. 复数与平面内点之间的对应

(1) 复数平面　复数 $a+bi$ 是由一对排定了顺序的实数 a 和 b 构成的，其实部 a 和虚部系数 b 分别相当于点$M(a, b)$的横坐标和纵坐标. 所以引进复数后，平面直角坐标系里的点和复数之间可建立一一对应的关系. 很明显，当 $b=0$ 时，对应的点都在 x轴上；当 $a=0$ 时,对应的点都在 y 轴上. 这种用来表示复数的平面称为复数平面，其中 x 轴称为实轴,y 轴称为虚轴(如图 1).

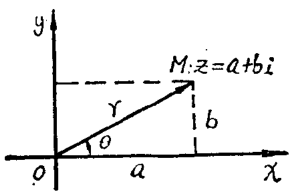

图 1

(2) 复数的相等与不等　根据两个复数 $a+bi$ 和 $a'+b'i$ 在平面内所对应的点可知：如果 $a=a'$, $b=b'$ 那末 $a+bi=a'+b'i$；反之，若 $a+bi=a'+b'i$，那末 $a=a'$, $b=b'$.

在实数集内，对于两个不相等的实数，可根据它们在数轴上所对应的点的左、右位置关系来规定这两个实数间的大小．但是对于两个复数（只要其中有一个不是实数）所对应的点之间，就没有这种关系，故不能比较它们之间的大小．

(3) *共轭复数*　关于 x 轴对称的两个点所对应的两个复数称为共轭复数．如果用 z 表示复数 $a+bi$，那末它的共轭复数 $a-bi$ 可用 $\overline{z}$ 表示．

显然实数与它的本身共轭．

3．复数与平面内向量之间的对应

(1) *向量*　连结 O 与 M，以 O 为起点，M 为终点就得一条有方向的线段 OM，称为向量，记作 $\overrightarrow{OM}$．$\overrightarrow{OM}$ 的长度 r 指出了向量 $\overrightarrow{OM}$ 的值的大小，$\angle XOM$ 的值指出了向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向(如图1)．当点 M 与点 O 重合时，称这样的向量为零向量．零向量没有确定的方向．

因此，通过平面的点作为媒介，可建立如下的一一对应关系：

复数 $z=a+bi \overset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}$ 点 $M(a,\ b) \overset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}$ 向量 $\overrightarrow{OM}$．

(2) *复数的模数*　向量 $\overrightarrow{OM}$ 的长 r 称为复数 $z=a+bi$ 的模．记作

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(3) *复数的幅角*　表示向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向的这个角 θ 称为复数 $z=a+bi$ 的幅角．其中适合 $0\leq\theta<2\pi$ 的幅角 θ 的值叫做幅角的主值．

要确定一个复数 $z=a+bi\,(z\neq0)$ 的幅角 θ，可利用公式 $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ 其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$．但数 0 没有确定的幅角．

根据 a，b 符号可确定复数 $z=a+bi$ 的幅角主值所在的范围，如下表所示：

a	b	幅角终边所在象限	幅角的主值范围
+	+	Ⅰ	$0<\theta<\frac{\pi}{2}$
−	+	Ⅱ	$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$
−	−	Ⅲ	$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$
+	−	Ⅳ	$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

在确定了幅角的主值范围以后，可应用公式 $\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$ 来确定 θ 的值. 例如复数 $z=-1-i$；从 $a=-1$，$b=-1$ 可知幅角的主值在 π 与 $\frac{3}{2}\pi$ 之间，再从 $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{-1}=1$ 可确定幅角的主值是 $\frac{5}{4}\pi$.

(4) 复数的三角函数式　因 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，故

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

式子 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 称为复数 z 的三角函数式. 为了区别，称 $a+bi$ 为复数 z 的代数式.

(5) 复数的指数形式　根据尤拉公式　$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$，则复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 可写成

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}.$$

式子 $re^{i\theta}$ 称为复数 z 的指数形式. 在高等数学中常常使用.

4. 复数的加法和减法

加法法则　$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$,

减法法则　$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$.

复数用三角函数式表示时，欲求它们的和或差，一般要先化为代数式，这样计算比较简单.

5. 复数的乘法

乘法法则

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

若复数用三角函数式表示时，其法则是：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

即积的模数等于因数模数的积，而积的幅角等于因数的幅角的和.

6. 复数的除法

因 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$，根据这一性质，就可应用复数乘法的法则来做复数的除法. 即

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.\quad(a_2^2+b_2^2\neq0)$$

即两个复数相除(除数不为零)，可先写成分式的形式，然后将分子、分母同乘以分母的共轭复数，再把结果化简即可.

若复数用三角函数式表示时，其法则是：

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

即商的模数等于被除数的模数除以除数的模数所得的商；商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角所得的差.

7. 复数的乘方

把复数 $a+bi$ 看成一个二项式，可用二项式定理来计算复数的乘方，在所得的展开式里，把 i 的幂都化简，并且把实数和纯虚数分别合并.

若复数用三角函数表示时，其法则是：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

即复数的 n 次幂（n 是正整数）的模数等于这个复数的模数的 n 次幂，它的幅角等于这个复数的幅角的 n 倍.

这个法则称为棣美弗定理.

8. 复数的开方

设复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (z\neq 0)$ 的 n 次方根是，$\omega=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 那末从 $\omega^n=z\ (z\neq 0)$ 可得

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

根据复数相等的定义，有

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi,\quad (k\text{ 为整数})$$

从而有 $$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n},$$

$$\therefore\quad \omega_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right].$$

这里 $\sqrt[n]{r}$ 表示 r 的 n 次算术根，k 取 $0,1,2,\cdots\cdots(n-1)$.

为了方便起见，采用符号 $\sqrt[n]{z}$ 表示复数 z 的各个 n 次方根，（注意：当 z 为复数时，符号 $\sqrt[n]{z}$ 不表示算术根）这样就有

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],$$

$$k=0,1,2,\ \cdots\cdots(n-1).$$

即复数的 n 次方根有 n 个值，它们的模数等于这个复数的模的 n 次算术根；它们的幅角分别等于这个复数的幅角与 2π 的 0，1，2，$\cdots\cdots(n-1)$ 倍的和的 n 分之一.

例　题

例 1　把下列复数改用三角函数式表示.

$$\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}-i.$$

解　这里 $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，又 $a=\sqrt{3}\quad b=1$，可知幅角的主值在 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，再从 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 故幅角的

主值是$\frac{\pi}{6}$，从而

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

同理可求出$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$,

$$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

例 2 求复数 $4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$的模和幅角.

解 因 $4\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

故这个复数的模是 4；幅角是 $2k\pi+\frac{5\pi}{3}$(k 是整数)，令 $k=0$，即得主值是$\frac{5}{3}\pi$.

例 3 (1) 计算① $(1-i)+(2-i^3)+(3-i^5)+(4-i^7)$;

② $(-2+2\sqrt{2}i)-(\sqrt{2}i-2)$;

③ $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 设$(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=0$，求实数 x 和 y.

解 (1) ① 原式$=(1-i)+(2+i)+(3-i)+(4+i)$

$=(1+2+3+4)+(-1+1-1+1)i$

$=10$;

② 原式$=(-2+2\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)$

$=(-2+2)+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})i$

$=\sqrt{2}i$;

③ 原式$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=(1+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i.$

(2) 因 $(x+y-5)+(2y-3x+5)i=0,$

由 $x+y-5=0,\ 2y-3x+5=0,$

可求得 $x=3,\ y=2.$

例 4 (1) 计算$(1+i)(4-i^3)(2+3i^5)$；

(2) 验证 $x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)$
$(x+1-i)(x+1+i)$；

(3) 设 x，y 都是实数，解方程

$(1+2i)(x+yi)+(2y-2xi)=-5+3i.$

解 (1) 原式$=(1+i)(4+i)(2+3i)=(3+5i)(2+3i)$

$=-9+19i$；

(2) 因 $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$

$=[(x-1)^2-i^2][(x+1)^2-i^2]$

$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=x^4+4$；

(3) 因左端$=(x-2y)+(2x+y)i+(2y-2xi)$

$=x+yi,$

故 $x+yi=-5+3i,$

∴ $x=-5,\ y=3.$

例 5 (1) 计算 $3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$
$\cdot 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ)$；

(2) 化简 $(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$.

解 (1) 原式$=30[\cos(18^\circ+54^\circ+108^\circ)$
$+i\sin(18^\circ+54^\circ+108^\circ)]$

$=30(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-30$；

(2) 原式$=[\cos(-3\theta)+i\sin(-3\theta)]$