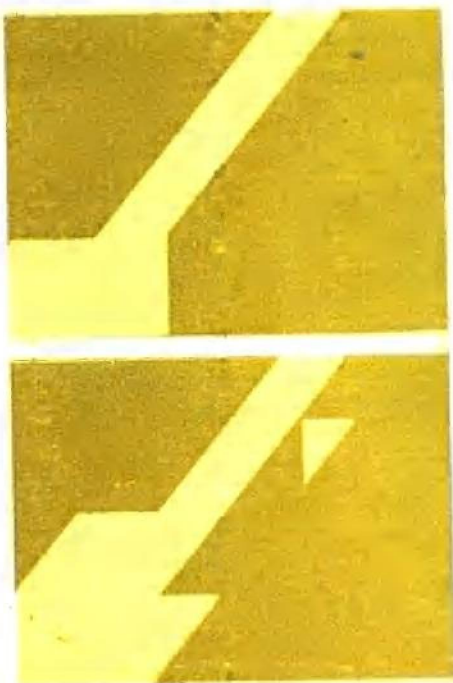


非线性

有限元法

及其在塑性加工中的应用

乔端 编著
钱仁根



冶金工业出版社

内 容 简 介

本书对弹塑性、刚塑性和粘塑性等材料非线性有限元法的基本概念、基本方程和基本计算方法作了较为全面而详细的阐述，并举例说明它们在塑性加工中的应用。为了便于阅读，书中还对学习非线性有限元法所需要的数学、力学和有限元法等基础知识作了介绍。

本书可作为有关专业高年级学生、研究生学习非线性有限元法的教材或教学参考书，也可供固体力学、计算力学和轧钢、锻压等压力加工专业的科技人员参考。

非线性有限元法及其在 塑性加工中的应用

乔 端 钱仁根 编著

*

冶金工业出版社出版发行

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 11 3/4 字数 309 千字

1990年6月第一版 1990年6月第一次印刷

印数00,001~1,200册

ISBN 7-5024-0568-2

TG·90 定价7.30元

前 言

随着电子计算机的普及和数值计算方法的进步,有限元法的理论和应用得到蓬勃发展。它在金属塑性加工成形分析中的应用也取得了惊人的进步。

有限元法及其在金属塑性加工成形分析中的应用这一研究领域,涉及到有限元的数学和力学基础,非线性有限元法的基本理论、算法语言,程序设计以及有关金属塑性加工成形理论、工艺和设备等方面的问题。在这一方面已出版了不少包括弹塑性有限元法在内的参考书和大量的有关文章。我们也在完成教学和科研过程中编写了《有限单元法的非线性理论》^[10]等几种教学参考书。从实践中我们感到在这方面需要有一本入门的书,这本书应该具有一定的深度和广度。它应包括有限元法非线性理论和有关的数学、力学基础,以及如何应用这一方法解决金属塑性加工成形分析中的问题等内容。在理论方面,既要由浅入深,又不过分深奥,而且又不泛泛地面面俱到;在应用方面,既要讲述求解的依据、方法步骤和结果,但也不是对某些塑性加工成形问题做专门性的讨论。当然,这本书的重点应该是放在有限元法的非线性理论和方法上。读者通过对这样一本书的阅读,能够对这一研究领域有一个比较清楚和深入的了解,在基本掌握全书内容后,有能力用这些理论分析实际问题,这就是我们编写此书的目的。

在本书的绪论中,除介绍有限元法的发展及其在塑性加工成形分析中应用的一些概况外,对常用的其他分析方法和近似计算方法也作了简单介绍。这是因为目前分析方法的趋势之一是不同因素的耦合计算和不同分析方法的组合。另一方面,对这些分析方法有大概的了解后,将有助于与有限元法进行比较,便于理解。

第1章的内容为张量记号和矩阵运算,这是张量分析和矩阵

运算中的部分内容。这些内容是阅读本书所必需的。

现在所介绍的有限元法是以连续介质力学为基础的。在第2章中,简单介绍弹塑性力学的一些基本概念、理论和计算公式。有关这方面的参考书很多,可以进一步阅读。

变分原理是有限元法的理论基础之一。不仅如此,现在常用的塑性加工成形分析方法差不多均可归结为界限法的范围内,而界限法也是以变分原理为基础的。因此,在第4章中着重讨论塑性理论变分原理,这对深入理解和正确运用各种塑性加工成形分析方法(包括有限元法)是有好处的。

第5章主要介绍有限元法的基础知识,并着重讨论了线弹性有限元法和高斯求积法。本章不仅对于未学过有限元法的读者来说是一个入门介绍,而且其中的某些公式、方法和概念,也是学习下面几章必不可少的。

弹塑性有限元法运用比较广泛,因此在这6章中,我们尽可能多地把这方面的内容介绍给读者。不仅有增量理论的,也有全量理论的,不仅有各向同性材料的,也有正交异性材料的,同时还讨论了重复加载问题。

在第7章中,主要介绍了拉格朗日乘子法,可压缩性材料的刚塑性有限元法和罚函数法。为了帮助读者掌握刚塑性有限元法,分析塑性加工成形问题,在本章中,还讨论了如何处理在计算中经常遇到的几个问题。在解决塑性加工成形问题时,刚塑性有限元法有着重要的作用。

在第8章中,首先讨论了一维弹/粘塑性材料的本构方程及有限元法,然后讨论一般情况下的粘塑性材料的本构方程,以及弹/粘塑性和刚/粘塑性有限元法。

温度场的研究以及塑性加工成形过程中的温度效应的确定,是极重要的,因此在第9章中专门讨论塑性加工成形过程中的温度场。在这一章中,除了介绍热传导问题的有限元法外,还介绍了考虑热效应的有限元法,即速度场与温度场不耦合或耦合时的有限元法。

本书前言、第1~4章由乔端教授编写，第5~9章由钱仁根副教授编写。由于能力所限，书中错误及不当之处敬请读者批评指正。

作者于北京科技大学

1988年10月

目 录

1 绪 论	1
1.1 金属塑性加工成形问题的分析方法简介	1
1.2 固体力学中的近似解法	18
1.3 有限元法的发展概况及其在塑性加工中的应用	27
2 笛卡尔张量与矩阵	31
2.1 指标记号及求和约定	31
2.2 矢量的坐标变换	32
2.3 笛卡尔张量的定义、应力张量	36
2.4 张量的基本性质	39
2.5 矩阵的概念	43
2.6 矩阵的运算	46
2.7 逆矩阵的概念	50
2.8 分块矩阵	51
3 应力、应变和弹塑性物理关系	54
3.1 应力分析	54
3.2 应变分析	62
3.3 弹性物理定律	68
3.4 屈服条件	73
3.5 硬化材料的加载条件	78
3.6 德路克公设	81
3.7 塑性应力—应变关系	86
4 塑性理论变分原理	95
4.1 塑性形变理论变分原理	95
4.2 塑性流动理论变分原理	104
4.3 刚塑性广义变分原理	111
4.4 弹/粘塑性变分原理	117
5 有限元法基础	121
5.1 有限元法的一般概念	121
5.2 等参单元及插值函数	126

5.3 线弹性问题的有限元法	144
5.4 高斯求积法	154
6 弹塑性有限元法	163
6.1 概述	163
6.2 弹塑性矩阵	164
6.3 变刚度法	170
6.4 初载荷法	175
6.5 重复加载时的弹塑性有限元法	186
6.6 正交异性材料的弹塑性有限元法	191
6.7 全量理论的弹塑性有限元法	200
6.8 弹塑性有限元法在塑性加工中的应用实例	212
7 刚塑性有限元法	229
7.1 拉格朗日乘子法	229
7.2 可压缩性材料的刚塑性有限元法	241
7.3 罚函数法	257
7.4 刚塑性有限元法计算中的几个问题	260
7.5 刚塑性有限元法在塑性加工中的应用实例	268
8 粘塑性有限元法	284
8.1 一维情况下弹/粘塑性材料的本构方程	284
8.2 一维弹/粘塑性材料的有限元法	293
8.3 粘塑性材料的本构方程	299
8.4 粘塑性应变增量和应力增量	304
8.5 弹/粘塑性有限元法	307
8.6 刚/粘塑性有限元法	312
8.7 粘塑性有限元法在塑性加工中的应用实例	316
9 塑性加工过程中的温度场	328
9.1 热传导基本方程	328
9.2 热传导问题的变分原理	335
9.3 热传导问题的有限元法公式	338
9.4 线性热传导问题的有限元解法	341
9.5 温度场和速度场耦合计算的有限元法	344
9.6 温拉拔过程的有限元分析	353
参考文献	363

1 绪 论

1.1 金属塑性加工成形问题的分析方法简介

金属塑性加工成形过程主要包括轧制、锻造、拉拔、挤压和板料冲压等。

金属塑性加工成形理论，就其内容来分，有金属变形的物理基础、物理化学原理和数学力学理论，它们之间存在着密切的联系。其中金属塑性变形的数学力学理论，我们称它为金属塑性加工力学，它主要是用宏观的数学力学分析方法和实验方法，求解塑性加工过程的力能参数，变形参数以及工件中应力，应变分布和金属流动规律等。

塑性加工成形问题的分析由于需要考虑下列问题而难于用解析方法求解：①材料本构关系中冷加工时的加工硬化、各向异性，热加工时的温度分布和材料对应变速率敏感性等；②工件的复杂形状；③摩擦边界条件；④有限变形等方面的问题。克服这种困难的方法，一是采用简化的假设，即回避难点，将问题简化为可以用简单数学工具处理。这样做通常得到的解答不够精确，甚至有时是错误的。二是在建立计算模型时保留其较复杂的物理特性，编制程序，用计算机进行数值模拟。

金属塑性加工成形问题的分析方法大致可分为两类：一类是解析计算法，如切片法，均匀变形能法，滑移线场理论，界限法，上限元技术，流函数以及希尔(Hill, R)的一般解法等；另一类是数值解析，包括有限差分，有限元法和边界元法等。当然，有些解析计算法也可采用数值计算的方法。由于在塑性加工成形过程中塑性变形较大，因此在多数分析方法中忽略弹性变形，假设材料为刚塑性体，甚至为了简单，假设材料为理想的刚塑性体。

下面对常见的金属塑性加工成形问题分析方法分别作一介绍。在这一节中主要介绍解析法，在下面两节中再介绍数值解

法。

1.1.1 切片法^{[9][7]}

切片法又称平均应力法，这种方法是西贝尔 (Siebel, E.) 和萨克斯 (Sachs, G.) 在1923年前后提出的，他们用这种方法分别对轧制和锻压问题进行分析。平面应变条件下的稳态轧制过程，如图1-1所示。用截面从变形区中取出单元体，并假设正应力 σ_x 沿高度不变，则简化的单元体平衡方程为：

$$d(h\sigma_x) + 2pdx \operatorname{tg} \theta - 2f p dx = 0 \tag{a}$$

其中 f 为摩擦系数， p 为单位压力。屈服条件近似为：

$$\sigma_x + p = 1.15\sigma_s = K \tag{b}$$

其中 K 为平面应变条件下材料的变形抗力。利用式 (a) 和 (b)，以及相应的应力边界条件，容易解此“静定”问题，求得单位压力分布如图1-1。

切片法可以用比较简单的公式，表示在平面应变以及轴对称条件下的工件材料，工具尺寸和形状等因素与力参数间的关系。正是由于此种分析方法具有简单的优点，直到今天在解决某些问题时，仍得到广泛应用，但对复杂的求解条件，用这种方法求解就存在一定的困难。

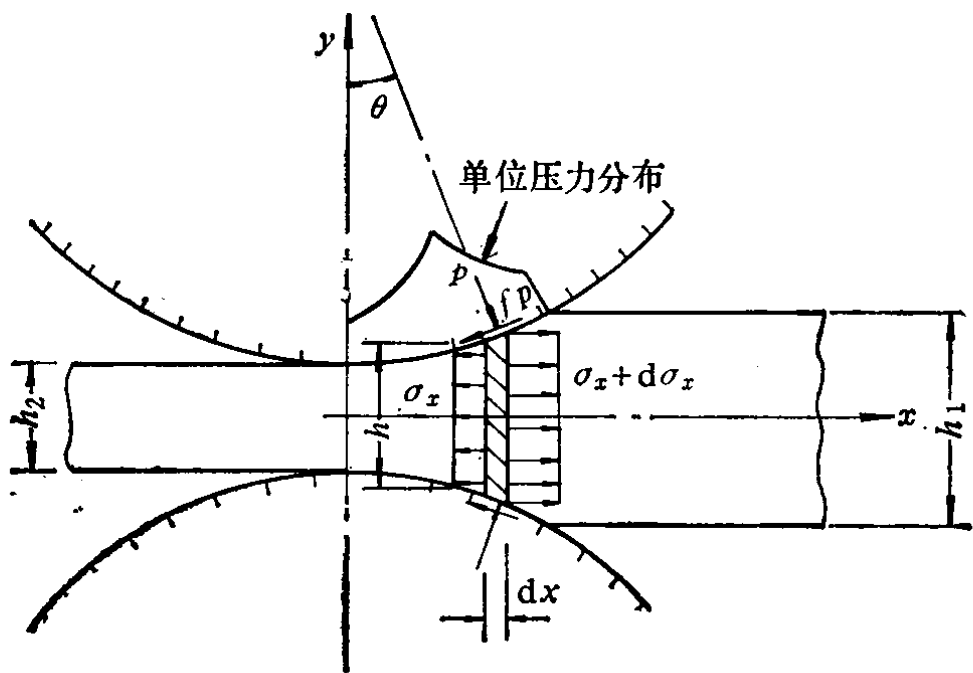


图 1-1 平面应变条件下的稳态轧制

1.1.2 均匀变形能法

这种方法是西贝尔在1920年提出的，它是根据均匀变形的模型，计算变形能即内力功，并由外力功与内力功相等求得加工力。如以图1-2a所示的平面应变压缩问题为例，假设变形前、后工件形状如图1-2b、c所示。尽管由于工件与工具间存在摩擦力，工件的变形不可能是均匀的，但仍假设它为均匀变形，并假设材料为理想刚塑性，剪切屈服应力 k 等于常数，摩擦应力 $\tau_f = f p$ ， p 为单位接触压力。在压缩过程中，单位接触压力作的功应等于克服摩擦力所作的功和材料塑性变形时所作的塑性功。由此可求得其平均接触压力为：

$$\overline{p}/2k = \left(1 + \frac{fb}{2h}\right) \quad (1-1)$$

要研究图1-3所示受外端刚性区影响的平面应变压缩问题时，则在计算塑性功时，必须考虑刚性区与变形区界面上剪应力 k 所作的功，这样其平均接触压力为：

$$\overline{p}/2k = 1 + \frac{fb}{2h} + \frac{h}{8b} \quad (1-2)$$

摩擦系数分别为0.05, 0.10和0.15时， $\overline{p}/2k$ 随 b/h 变化的规律如图1-4所示。由图可以看出， b/h 较小时，摩擦影响小，接触压力随 b/h 的减小而剧增，但当 b/h 大于1以后，摩擦对接触压力的影响大。式（1-2）也可以用来近似计算平均轧制压力。实验

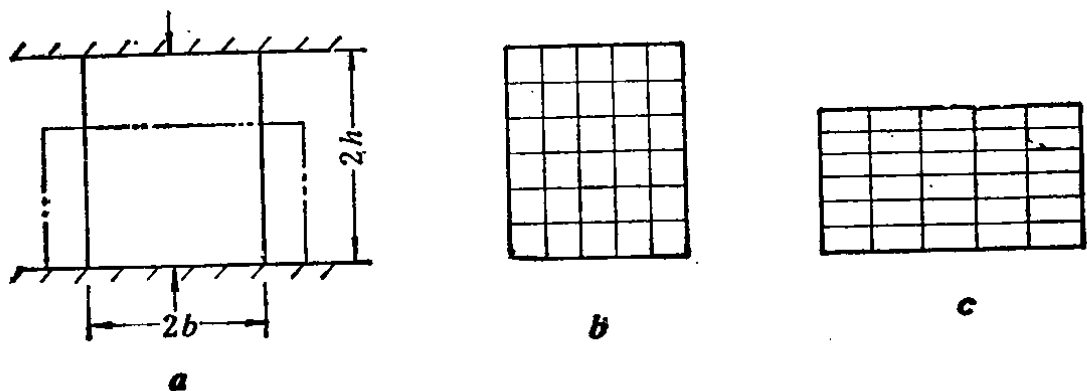


图 1-2 平面应变压缩问题

证明，上述结论基本上反映了冷轧薄板过程的力能参数的物理实质。

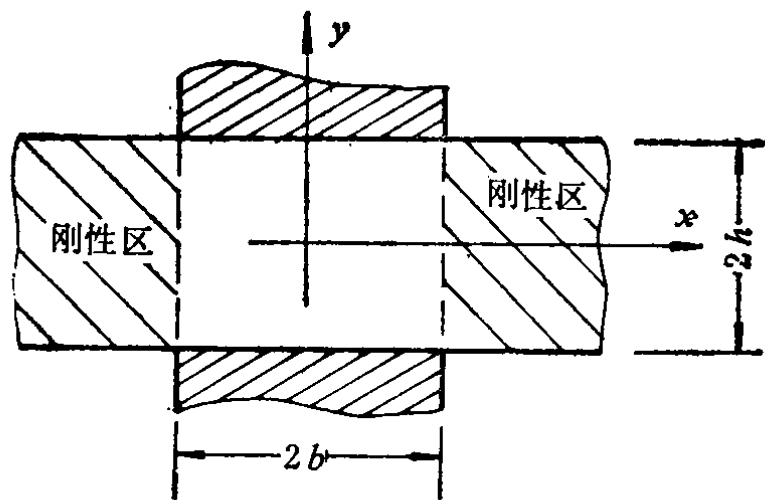


图 1-3 有刚性区影响的平面应变压缩问题

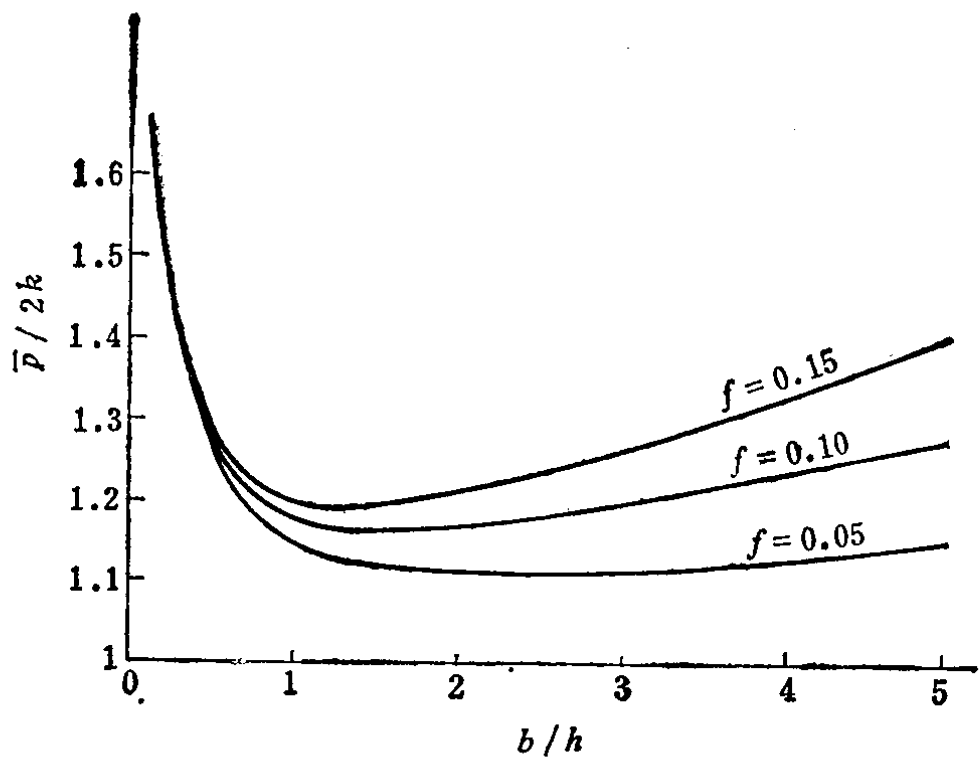


图 1-4 $\bar{p}/2k$ 与 b/h 的关系曲线

1 1.3 滑移线场理论

在平面应变条件下，理想刚塑性区中，把最大剪应力 k 所在平面的法线方向连接起来得到的两族正交曲线，称为滑移线场。根据滑移线场理论，不仅可以得到应力和应变分布，而且可以预测材料的流动规律，以及材料内部缺陷的发生等。该方法理论完整，

数学严谨，与其他方法相比可给出较好的计算结果。

对于平面应变状态，可以用幂级数等解析法求解以滑移线为坐标的基本方程，也可用数值解法建立一般情况下的正交滑移线网络，并利用汉盖方程的差分式，确定滑移线的倾角 φ 和各结点处平均应力 p ，利用盖润格(Geiringer, H.)速度方程的差分式计算各节点处沿滑移线方向的速度 u, v 。各差分式分别由式(1-3)，(1-4) 和 (1-5) 给出。

$$y_{m,n} - y_{m-1,n} = (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) \quad (1-3)$$

$$y_{m,n} - y_{m,n-1} = -(x_{m,n} - x_{m,n-1}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})$$

$$\begin{aligned} p_{m,m+1} - 2k\varphi_{m,m+1} &= p_{m+1,m+1} - 2k\varphi_{m+1,m+1} \\ p_{m,m+1} + 2k\varphi_{m,n+1} &= p_{m,m} + 2k\varphi_{m,m} \end{aligned} \quad (1-4)$$

$$u_{m,n} - u_{m-1,n} = \frac{1}{2} (v_{m,n} + v_{m-1,n}) (\varphi_{m,n} - \varphi_{m-1,n}) \quad (1-5)$$

$$v_{m,n} - v_{m,n-1} = -\frac{1}{2} (u_{m,n} + u_{m,n-1}) (\varphi_{m,n} - \varphi_{m,n-1})$$

应用滑移线场理论求解金属塑性加工问题^[12]，可根据工件在时间域中的变化，分为：①稳态过程，即工件中产生塑性变形的区域和大小不随时间而变化，如通过楔形模孔的拉拔，平板的稳态轧制等；②非稳态过程。即塑性变形区的形状，以及其应力的变化大小随时间而变化，锻造过程就是一例。图1-5为不同加工方式下的滑移线场，其中图a为粘着条件下介于二平行压板间材料的压缩，图b为剪断加工过程，图c和d分别为挤压和热轧过程。

在本世纪20年代普朗特(Prandtl, L.)、汉盖(Hencky, H.)、纳达依(Nadai, A.)和盖润格等人，奠定了滑移线场的理论基础，并加以应用。希尔在他的著作《塑性数学理论》^[1]一书中解

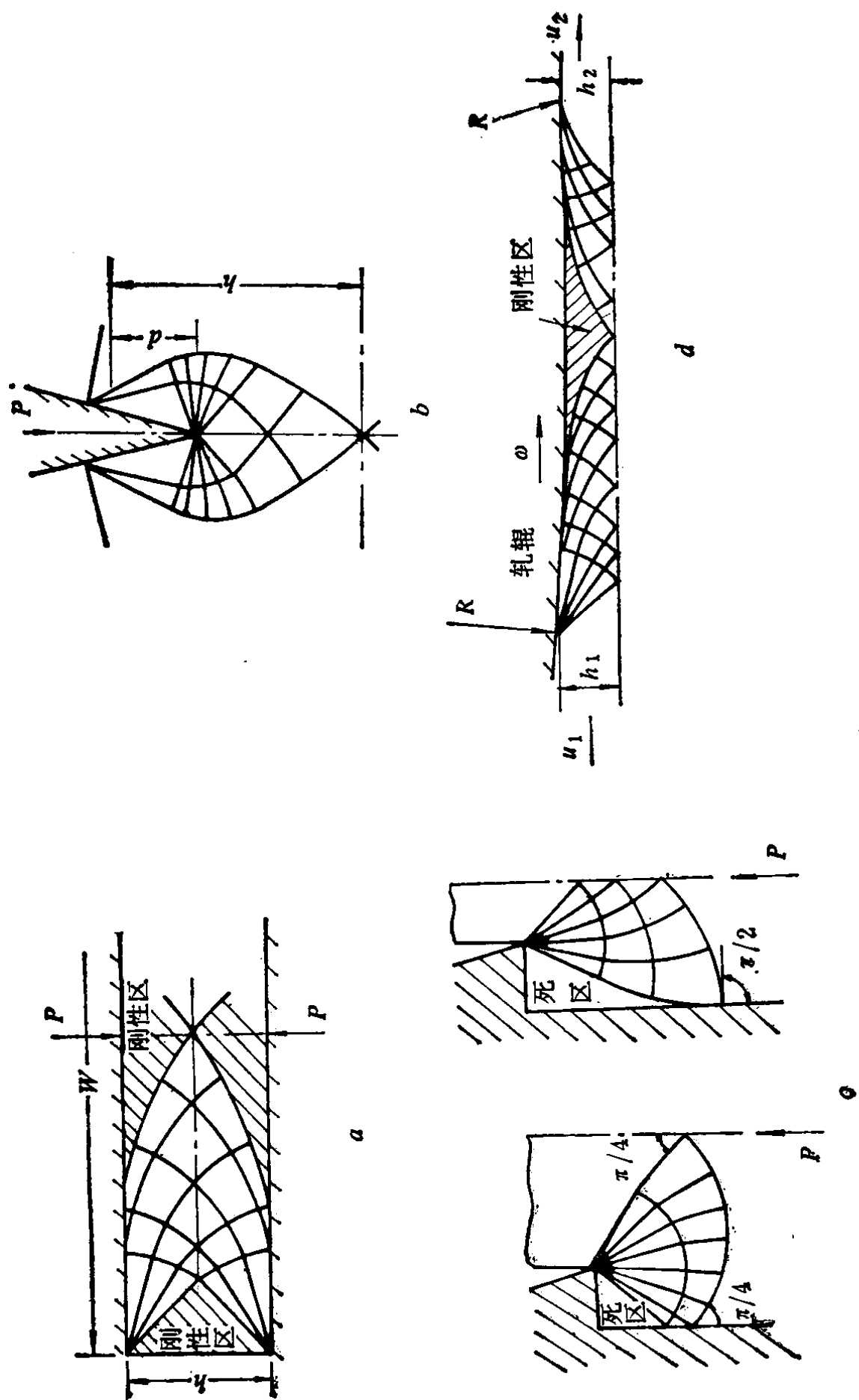


图 1-5 几种塑性加工过程的滑移线场

决了不少塑性加工成形问题，使滑移线场理论在塑性加工中的应用得到蓬勃发展。1967年艾翁(Ewing, D.J.F.)提出用双幂级数表示滑移线曲率半径的通解^[23]。希尔提出滑移线场构成的位置矢量叠加原理，从而为滑移线场理论的矩阵算子法奠定了基础。1968年考林斯(Collins, I.F.)在上述工作的基础上，提出滑移线场的代数几何学方法，他证明了若采用级数系列矩阵表示滑移线的曲率半径，则任何滑移线场及其相关速度场的建立，均可归结为一系列矩阵算子的代数运算，并解决了热轧、挤压等一系列加工成形问题。矩阵算子法是滑移线场理论和应用方面取得的重大进展^{[24][25][26]}。由于它可求解较复杂的问题，而且计算精度较高，所以它是一种非常有前途的分析方法。

另外，在用滑移线场理论求解各向异性材料、加工硬化材料的塑性加工成形问题方面，已进行了大量的研究。需要强调指出的是，对于平面应力状态下理想刚塑性材料的塑性变形问题，仍可联立求解平衡方程和屈服条件。若设

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2k \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sigma_2 &= 2k \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\tag{1-6}$$

则仅当 $\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5}{6}\pi$ 时，方程为双曲型的，并存在两组非正交的实特征线，特征线方程为：

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi)\tag{c}$$

其中

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}}\tag{d}$$

而对于轴对称问题，由于不是“静定”问题，即平衡方程与屈服条件数目少于未知数，因此只有周向应力 σ_θ 为主应力之一的全

塑性状态时，方程为双曲型的，在子午面上才存在正交实特征线族与滑移线重合。沿滑移线有：

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{k} - 2\varphi\right) - (\sin\varphi + \cos\varphi)\frac{ds_\alpha}{r} &= 0 \\ d\left(\frac{p}{k} + 2\varphi\right) + (\sin\varphi + \cos\varphi)\frac{ds_\beta}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

式中 ds_α ， ds_β 为沿滑移线 α ， β 的长度。由上可知，用滑移线场理论求解平面应力和轴对称条件下的金属塑性加工问题，要比平面应变问题繁难得多。

1.1.4 界限法

虽然关于极限分析的概念的提出，可以追溯到伽利略，但到20世纪初，卡金契（Von Kármán）和基斯特（Kist, N.C.）才提出实际上是下限定理的结构极限承载能力的分析。现在界限法在结构的塑性分析和确定极限载荷方面得到深入的研究和广泛的应用。在塑性加工成形问题分析中，界限法也是近似求解加工力的一种卓有成效的方法。界限法包括上限定理和下限定理。上限定理是任意选取满足协调方程，体积不可压缩条件和速度边界条件的运动许可速度场，使某一泛函取得极值，从而求得上限载荷。由上限定理求得的载荷总是大于真实载荷，为高估的近似解，故称上限法。而下限定理则是选取满足平衡方程，屈服条件和应力边界条件的静力许可的应力场，使某一泛函为极值，从而求得下限载荷。由下限定理求得的载荷总是小于真实载荷，为低估的近似解，故称为下限法。

上下限定理实质上是理想刚塑性材料的变分原理，这一部分内容将在第4章中详细讨论。在塑性加工成形分析中，上限定理常写成下列形式：

$$\iint_{\Gamma_p} p_i \hat{v}_i d\Gamma + \iint_{\Gamma_c} (p_i v_i^*)_n d\Gamma \leq \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV +$$

$$+ \iint_{\Gamma_{\Sigma}} k[\Delta v_i^*] d\Gamma + \iint_{\Gamma_c} (p_i v_i^*)_t d\Gamma \quad (1-8)$$

其中

$$\dot{W}^{(p)} = \iint_{\Gamma_p} p_i \widehat{v_i} d\Gamma \quad (1-9)$$

为加工工具对材料所施加的正压力的功率， Γ_p 为加工力作用表面， $\widehat{v_i}$ 为给定速度。

$$\dot{W}^{(n)} = \iint_{\Gamma_c} (p_i v_i^*)_n d\Gamma \quad (1-10)$$

为容器法向表面力所消耗的功率， Γ_c 为其接触面， v_i^* 为选取的运动许可速度场。

$$\begin{aligned} \dot{W}^{(u)} &= \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \sqrt{2} k \iiint_V \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} dV \\ &= \iiint_V \sigma_s \overline{\dot{\epsilon}^*} dV \end{aligned} \quad (1-11)$$

为耗散于材料内部的功率， $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 和 $\overline{\dot{\epsilon}^*}$ 分别为对应于 v_i^* 的应变速率和等效应变速率。

$$\dot{W}^{(\Sigma)} = \iint_{\Gamma_{\Sigma}} k[\Delta v_i^*] d\Gamma \quad (1-12)$$

为因速度间断，剪切力消耗的功率， Γ_{Σ} 为间断面， $[\Delta v_i^*]$ 为间断面上的速度间断值。

$$\dot{W}^{(f)} = \iint_{\Gamma_c} (p_i v_i^*)_t d\Gamma = \iint_{\Gamma_c} mk \Delta v_i^* d\Gamma \quad (1-13)$$

为材料与工具间因摩擦而消耗的功率， m 为摩擦因子， $0 \leq m \leq 1$ ， Δv_i^* 为相对速度。

式(1-8)表明，对于所选取的运动许可速度场，其变形和滑动所消耗的功率大于工具对材料所施加正压力的与材料和容器接触的正压力的功率之和。

约翰逊 (Johnson, W.), 工藤等在处理平面应变条件下塑性加工成形问题时, 提出简化的变形模式, 即设想塑性区是由若干个刚性块组成 (通常为三角形), 刚性块本身不发生变形 (即 $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$), 只发生相互间的错动, 从而使上限法得到简化。例如平板拉薄问题, 选取如图1-6所示的变形模式, AB 和 BC 为间断面, 模壁为光滑的, 即摩擦因子 $m = 0$ 。若取半模角 $\alpha = 20^\circ$, 断面减缩率 $r = (h_1 - h_2)/h_1$, 则求得拉拔应力 σ_D 随断面减缩率 r 的变化曲线如图1-7所示。由图可以看出, 它与用切片法, 滑移线场理论求得的结果相近。

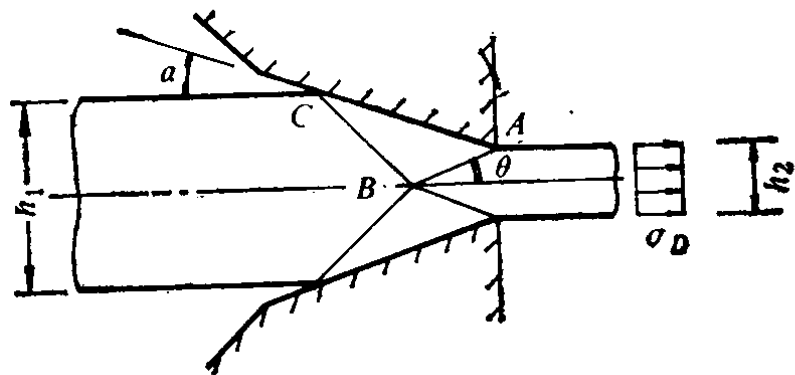


图 1-6 平板拉薄

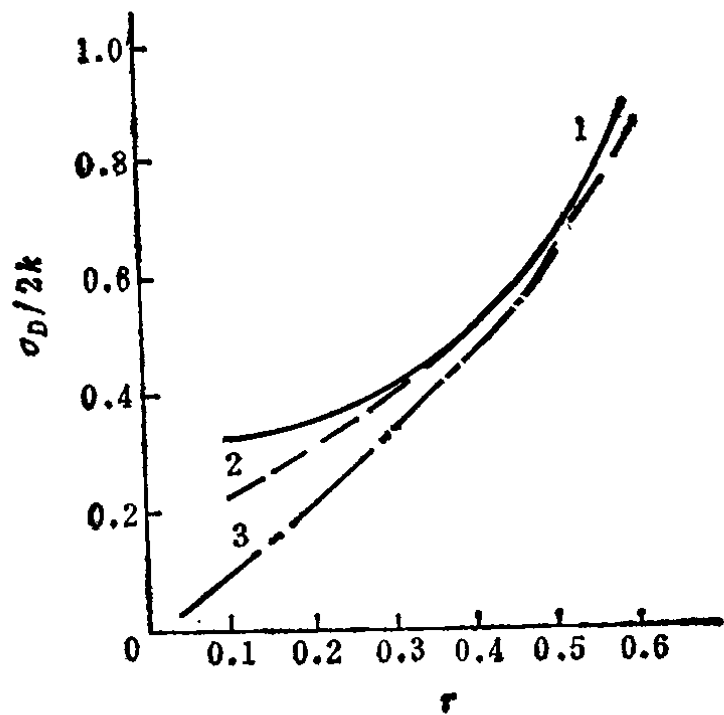


图 1-7 拉拔应力与断面减缩率的关系曲线
1—上限法; 2—滑移场理论; 3—切片法