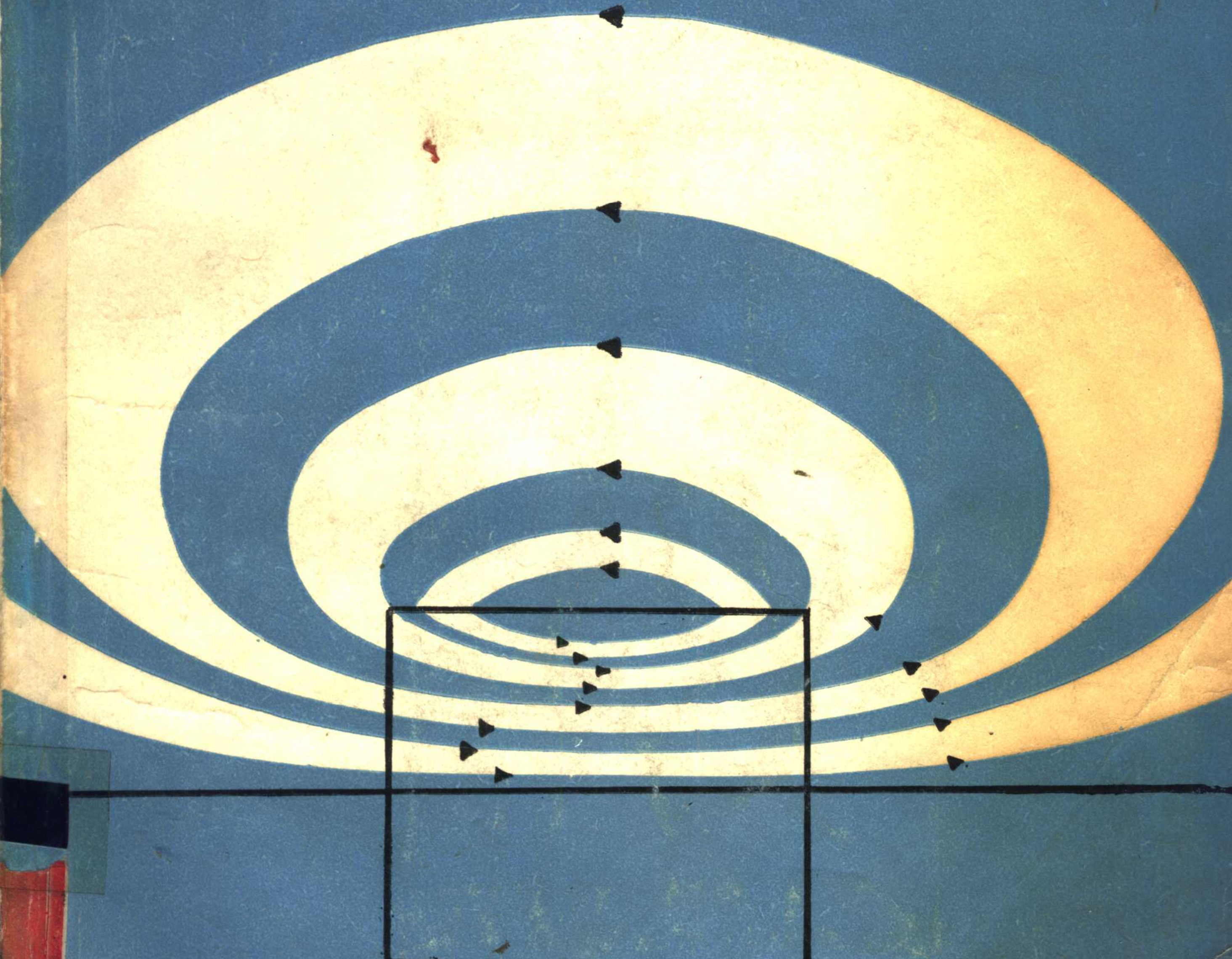
静态电磁场

冯慈璋 编著



西安交通大学出版社

静 态 电 磁 场

冯 慈 璋　编著

西安交通大学出版社

内　容　提　要

全书包括四篇共十四章。主要内容为：静态电磁场的基本性质和方程；求解静态场边值问题的解析方法；静态场中的能量与力；物质的磁性，介质的极化，超导体和等离子体的基本性质。

本书不仅可作为研究生教学用书，也可供电类专业各级学校的教师和工程技术人员参考。大学本科生，也可借助本书扩展视野，加深对电磁现象和电磁过程本质的理解。

静　态　电　磁　场

冯慈璋　编著

责任编辑　刘国柱

西安交通大学出版社出版
（西安市咸宁路 28 号）

西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行·各地新华书店经售

开本 787×1092　1/16　印张 19.75　字数 485 千字
1985 年 6 月第一版　1985 年 6 月第一次印刷
印数 1—3,000 册
统一书号 15340·031　定价 3.70 元

序　言

1982 年以来，编著者在西安交通大学每学期都为研究生讲授“静态电磁场”课程，本书就是在讲稿的基础上，进行适当增删，重新编写而成的。

全书包括四篇共十四章。第一篇（1－4 章）讨论静态电磁场的基本性质和方程，第二篇（5－8 章）介绍求解静态场边值问题的解析方法，第三篇（9，10 两章）为静态场中的能量与力，第四篇（11－14 章）介绍物质的磁性、介质的极化、超导体和等离子体的基本性质。

考虑到静态场边值问题的数值解法已为研究生单独设课，且已出版有相当丰富的专著可供参考，故本书未予列入。鉴于当前科学技术的进步和发展，编著者认为本书第四篇的内容，应得到足够的重视。

本书不仅可作为研究生教学用书，也可供电类专业各级学校的教师和工程技术人员参考。大学本科生，通过阅读本书，也将扩展视野，加深对电磁现象和电磁过程本质的理解。

编　著　者

一九八五年五月

于西安交通大学

目　录

第一篇　静态电磁场的基本性质和方程

第二篇　解静态场边值问题的解析方法

第三篇　静态场中的能量与力

第十章　静态场中的力

第四篇　物质的电磁性质与等离子体物理

第十一章　物质的磁性

第十二章　电介质的极化

第十三章　超导体的电磁性质

第十四章　等离子体物理简介

第一篇　静态电磁场的基本性质和方程

本篇主要介绍静态电磁场的基本性质和方程，共分四章。

第一章讨论电磁场的基本性质和方程，并介绍电磁能量、电磁动量、电磁波动方程和电磁位等概念。第二章中，结合静电平衡条件，导出静电场的基本方程并讨论静电场的性质。其中还介绍了格林定理以及各种电荷分布下电位与场量的不连续问题。第三章讨论恒定磁场的基本性质和方程，并介绍磁荷的概念。第四章中介绍狭义相对论的基本概念，主要力学量和电磁量的变换关系以及电磁场方程组的四维形式和电磁张量等。从中可以更好地理解把电磁场分成电场与磁场两个方面的相对性。

第一章　电磁场的基本性质和方程

本章首先介绍关于电磁场的一些概念，阐明电磁场的物质性。然后从表征真空场的麦克斯韦(Maxwell)方程组（以电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 表示）出发，讨论有媒质存在时的电磁场。对于媒质的影响，分别用极化电荷（体密度 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，面密度 $\sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$，这里的 $\boldsymbol{P}$ 表示极化强度）和磁化电流（体密度 $\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$，面密度 $\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$，这里的 $\boldsymbol{M}$ 表示磁化强度）考虑之。在引入矢量 $\boldsymbol{D}(=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})$ 和 $\boldsymbol{H}\left(=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)$ 后，导得以 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 四个矢量表示的麦克斯韦方程组。以此为基础，讨论了电磁场场量在不同媒质分界面上必须满足的条件和它们在均匀媒质内部的条件。本章的后一部分，先后讨论了能量守恒和动量守恒定律在电磁场中的反映，并导出波印廷(Poynting)定理和电磁动量密度。本章最后介绍了电磁波动方程和电磁位函数。

第一节　关于电磁场的一些概念

1)　本书的讨论对象是电磁场。电磁场是物理学和工程技术上占有重要地位的多种场的一例。根据摩斯(Morse)和范许巴哈(Feshbach)的说法*，实际上近代物理所讨论的都是场的问题，其中包括位场，概率场，电磁场，张量场，旋量场等。

从数学意义上说，场是空间中点的坐标(可能还有时间)的函数。例如，在某一体积内，如果每一点上温度都确定，我们就说在该体积内，存在一个标量温度场。在运动流体中，如

* 见参考书目[18]

果已知速度矢量的三个分量对流体位置的函数关系，就构成了一个矢量速度场。在弹性理论中，弹性固体上的点，相对于未形变位置的相对矢量位移，可以通过两个矢量、或者象通常所说的那样，用一个张量场来描述。在近代物理中，薛定谔 (Schrödinger) 概率幅值或广义的狭拉克(Dirac)旋量幅值，都是场的例子。

从物理上说，各类物理场，不仅仅是空间坐标和时间的函数，而且应包含一定的物理意义，是一个动态的概念。

2） 现在讨论什么是电磁场这个问题。首先，我们要指出，电磁场具有我们通常所认为的“实物”相关的性质。例如:

电磁场具有能量，它遵循能量守恒与转换定律。

电磁场具有与其能量相应的质量（$m=W/c^2$，其中W是能量，c是真空中的光速）。只是由于它的质量密度通常极其微小，在实际中我们一般不注意它的这一性质。

电磁场具有动量，它的动量密度为 $g=\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]$。

能量、质量和动量，是物质的主要属性。电磁场具备这些属性，同时它也遵循自然界的基本规律，如上面已提及的能量守恒和转换定律，以及质量守恒和转换定律。

可是电磁场与我们一般所理解的实物又有不同之处。它的质点(光子)的静止质量是零，它没有一定的体积，它没有“不可入性”等。

电磁场不依赖于人们的意识而存在，它是能被人们的主观所反映的客观现实；电磁场还具有与时间空间不可分割等特点。因此我们说电磁场是物质的特殊形式。

3） 任何带电质点总是被电磁场包围着，电磁场与电荷构成统一的整体。

电磁场具有电与磁两个方面，二者紧密联系着。变动的电场要引起磁场，变动的磁场能感生电场。电场或磁场都不过是统一的电磁场的一个方面。

把电磁场分成电场或磁场是相对的，是随观察条件而异的。一个与带电体相对静止的观察者，在带电体周围能发现电场而不能发现磁场；另一个相对于带电体运动的观察者，则不但能发现电场，并能发现磁场。

4） 电磁场理论的发展，与牛顿(Newton)在力学方面的建树是分不开的。

牛顿、伯努里(John Bernoulli)和欧拉 (Euler) 等人关于刚体质点运动方面的工作，开辟了流体和弹性体的连续媒质力学的发展道路。他们通过连续媒质模型，绕过了流体的实际微观结构，以后又应用同样概念于弹性固体，认为作用于一部分固体的力来源于其余部分的应力和其它外力；用速度和加速度矢量场来表征水力学和流体力学问题。同样地，对于弹性固体问题，用应力及应变张量场来表征。

在电磁理论方面，静电的基本特性是由库仑(Coulomb)定律表达的。除了静电力有吸引力和排斥力之分而万有引力全都是吸引力这一点不同外，库仑定律和万有引力定律十分相似。在当时，它们都是超距作用的例子。以后，法拉第 (Faraday) 通过对介质极化的研究，对于超距作用提出了疑问。

在一个平行板电容器中，填充物用介质代替空气之后，电容器的电容量要变大。法拉第认为这一现象是由于两极板上电荷间的作用力随着介质的引入而减少所引起的，从而说明两极板间的力，是通过中间媒质传递而不是超距的。法拉第还把这一看法进行推广，认为带电粒子间有相互作用起源于电力线，电力线是主要的，而电荷仅仅是提供这些电力线的起始

或终止之处而已。法拉第还把自由空间看成物质，认为它在静电性能上与其它绝缘介质一样。

麦克斯韦以严谨的数学形式概括了电磁现象的规律，建立了完整的电磁场理论。当时指引他的一方面是法拉第的电极化理论，另一方面是弹性振动理论。他还预言了电磁波的存在，并肯定了光波就是电磁波。

但当时麦克斯韦认为电磁场本身是潜在的，它必须通过以太才得存在。他还认为，没有电磁波，以太一样存在；而电磁波不可能脱离以太而单独存在。随着时间的消逝，人们对于以太是否存在的怀疑，越来越大。迈克尔逊(Michelson)和莫雷(Morley)的实验，证实了以太不存在，而电磁波仍然能够传播。可以说，他们的实验，“解放”了电磁波。

综合起来说，作为一种场的理论，电磁场的基本思想是：电荷与电流在空间的每一点产生具有它本身真实性的场。电磁场既拥有也能传播能量、动量和角动量，场对于其它电荷有力作用。电磁场是由电荷引起的，它对电荷又有作用。相应地，也就有两组方程。一组是描述由给定的电荷和电流所引起的场的方程，即通常称为电磁场方程组或麦克斯韦方程组；另一个方程是说明给定的场如何作用于电荷的洛仑兹(Lorentz)力的方程。

5） 本书讨论的电磁场是宏观场。当我们讨论到在包含有实物的区域内的场时，通常我们对于原子范围内的电磁场变化不感兴趣，那是属于场的微观研究问题（本书第四篇中，我们将稍有涉及）。我们感兴趣的是对无穷小的体积和时间间隔内场量的时间和空间的统计平均值。麦克斯韦理论所根据的一些实验定律，忽略了物质构造的不均匀性，是把一些有关的物理量进行了统计平均而得到的。宏观理论中的无穷小量，是指这样的量：一方面它是小到不影响场中物理量连续变化的充分小，另一方面它与分子、原子、晶胞等相比又是充分大。

实际上，根据最简单的原子模型，原子核的半径在 $10^{-15}\sim3\times10^{-14}$ 米之间，带有负电绕核而转动的电子半径约为 10^{-15} 米，轨道半径的平均值约为 10^{-10} 米，两个相邻原子中心之间的距离，对固体约为 10^{-10} 米，而对于气体，在正常温度和压力下，约为 10^{-8} 米，如果在宏观研究中，设想元体积等于 10^{-18} 米^3，即使这样小的体积比起原子的体积来要大 10^{12} 倍，它可以容纳成百万个原子。因此宏观研究是与大量原子效应的平均表现相关的。对于场源和场量随时间变化的平均过程也相仿。如取 dt 为 10^{-12} 秒的数量级，在这样短的时间间隔内，一个电子可完成成千次轨道运动，在这个意义上，宏观场是场的相当快速变动的时间平均值。

第二节　麦克斯韦方程组

1） 电荷是建立经典电磁场理论的基础。在电磁场理论中，我们有下列基本假设：

(1) 牛顿力学中长度、质量、时间和力等基本概念都是适用的。但是对于电磁问题，除了要应用力学概念外，还需要有附加的基本概念，这就是电荷和电流，并且电流就是由电荷的运动形成的。

(2) 电荷的量值与运动无关。

如果我们确定了一个完全绝缘的粒子在与其它粒子无相对运动情况下的电荷量，则不论这粒子运动得多快，它的电量将维持不变。例如，电子的电荷量是

$$|q_e|=1.6008\times10^{-19}(\mathrm{C})$$

这是一个独立于运动状态的不变量。

(3) 电荷是守恒的，它既不能产生也不能消灭。这一原理的表达式是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1-1}$$

式中的 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度，ρ 是电荷的体积密度。

(4) 在任何媒质中，电磁扰动以速度

$$c=(\varepsilon\mu)^{-1/2}=(\varepsilon_r\mu_r)^{-1/2}(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}=(\varepsilon_r\mu_r)^{-1/2}c_0$$

相对于接收者传播。式中 ε_r 和 μ_r 分别为该媒质的相对电容率和相对磁导率，c_0 是自由空间中的光速。

(5) 在电磁场中，作用于单位电荷的力为

$$\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

相应地，如在电荷的体密度为 ρ 处，则每单位体积所受的力为

$$\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{1-2}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为表示电磁场特性的电场强度和磁感应强度，$\boldsymbol{v}$ 为电荷相对于给定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的坐标系的速度。

2) 在自由空间中，用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的麦克斯韦方程组是：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

它们分别是真空中高斯(Gauss)通量定理、电磁感应定律、磁通连续性原理和安培(Ampere)环路定律的微分形式表达式。相应的积分形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_s\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_v\rho dV/\varepsilon_0\\
&\oint_l\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_s\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\\
&\oint_s\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0\\
&\oint_l\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\int_s\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

3) 电荷和电流是引起场的主要场源。

电荷可分自由电荷和束缚电荷两大类。

自由电荷又有内、外之分。内自由电荷就是它们在其中运动的物质的一部分，例如导体中的自由电荷即属此类。外自由电荷是外加于媒质中的自由电荷，例如真空中的电子束或离子束，电子显微镜中的电子束等都是外自由电荷的例子。我们分别用 ρ_f、ρ_{fi} 和 ρ_{fe} 表示自由电荷、内自由电荷和外自由电荷的体密度。

相对于电荷的分类，电流的情况更为复杂。它们有自由电流、磁化电流和极化电流之分。

由自由电荷的运动形成的电流称为自由电流。相应地，通常称之为传导电流的就是由内自由电荷的运动形成的电流，其密度等于 $\gamma\boldsymbol{E}$，这里的 γ 是相应的导体的电导率。由外自由电荷的迁移运动形成的电流就是我们通常所称的运流电流（或称徙动电流），其密度等于 $\rho\boldsymbol{v}$。

与宏观的电流回路产生磁矩相仿，电子的轨道运动和电子自旋都要引起磁矩。因此对于电子自旋及其轨道运动，可以用等效的电流回路考虑其效应，这种等效电流就是人们熟知的安培电流。与自由电流不同，安培电流不发生电荷迁移现象。在正常情况下，物质中的安培电流

所引起的磁效应相互抵消，对外不显磁性。施加外磁场后，对外呈现磁性，考虑这种影响的等效电流我们称为磁化电流。

如把物质置于一外加时变电磁场中，则物质每一原子形成的电偶极子的电矩 $\boldsymbol{p}(=q\boldsymbol{d})$ 以及正负电荷作用中心的距离 $\boldsymbol{d}$，都将随时间而变，相应的速度为 $\boldsymbol{v}(=\partial\boldsymbol{d}/\partial t)$。这种原子中的正负电荷运动也形成电流，称为极化电流。

4) 现在简单地介绍媒质的极化和磁化概念（在第四篇中，将有较详细的叙述）。

一种电介质，其中电荷的分布不同于正常状态而发生畸变，称为电极化。介质的极化，可用电偶极子（电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$）模型描述。极化的程度可用极化强度表示。定义极化强度为

$$\boldsymbol{P}=\lim_{V\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i}{V} \tag{1-5}$$

即每单位体积的电偶极矩。极化后，在介质内部要引起作体分布的束缚电荷，在介质表面要出现面分布的束缚电荷。我们把这种由极化引起的束缚电荷称为极化电荷。如分别以 ρ_p 和 σ_p 表示极化电荷的体密度和面密度，可以导得它们与极化强度的关系分别为

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{1-6}$$

$$\sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{1-7}$$

媒质的磁化，可用磁偶极子（磁矩为 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$）模型描述。媒质的磁化程度用磁化强度

$$\boldsymbol{M}=\lim_{V\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_i}{V} \tag{1-8}$$

表示，$\boldsymbol{M}$ 即单位体积内的磁矩。磁化强度与磁化电流的体密度和面密度的关系* 分别为

$$\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{K}_m=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n} \tag{1-10}$$

顺便指出，宏观地看，极化电流密度与极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}_p=\frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\sum_i p_i}{dV}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{1-11}$$

5) 对于有媒质存在的电磁场，麦克斯韦方程组可以写成：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}\\
&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)
\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

各类电荷和相应的电流之间，存在着连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

必须指出，在式(1-12)的最后一个关系式中，如果右边的电流密度仅包含自由电流、极化电流和磁化电流三部分，则不能使下列三个方程

* 可参阅冯慈璋主编的《电磁场》第二版，高等教育出版社 1984 年出版。

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}\\&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)\\&\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{1-13}$$

同时成立。这一结论可从以下的推证看出。

应用矢量恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\equiv0$，把 $\nabla\times\bar{B}=\mu_0(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)$这一关系代入，得

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)$$

即应有
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)=0$$

前曾指出
$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m=0$$

这就导致
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p)=0\tag{1-14}$$

另一方面，由连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

和
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$$

应有
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p)&=-\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f+\rho_p)=-\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E})\\&=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\neq0\end{aligned}\tag{1-15}$$

把(1-14)和(1-15)两式进行对比，二者显然矛盾。这表明

$$\nabla\times\boldsymbol{B}\neq\mu_0(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)$$

因为 $\nabla\times(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)\neq0$。

但是由
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m)=-\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

可得
$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\equiv0\tag{1-16}$$

说明总电流密度如果包括四部分，即

$$\boldsymbol{J}_t=\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{1-17}$$

则上述矛盾就可以得到解决。式(1-17)等号右边最后一项，为真空中的位移电流密度。

因此，在有媒质存在的电磁场中，以$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$为场量的麦克斯韦方程组应为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\&\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{J}_f+\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_m+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-18}$$

6) 在式(1-18)中，如果把式(1-6)和(1-9)即 $\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$ 等关系代入，并令电位移

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\tag{1-19}$$

位移电流密度 $$J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}+J_p \tag{1-20}$$

磁场强度 $$H=B/\mu_0-M \tag{1-21}$$

就可得到以 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 四个场矢量表示的麦克斯韦方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot D=\rho_f\\&\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}\\&\nabla\cdot B=0\\&\nabla\times H=J_f+\frac{\partial D}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

连同构成关系

$$D=\varepsilon_0E+P \qquad B=\mu_0(H+M) \tag{1-23}$$

当媒质为各向同性、且线性时，又可简化为

$$D=\varepsilon E \qquad B=\mu H \qquad J_f=\gamma E \tag{1-24}$$

这些方程构成了媒质实体中电磁现象严格的宏观描述的基础。

不难理解，与式(1-22)对应的积分形式方程组为

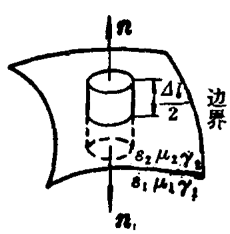
$$\left.\begin{aligned}&\oint_S D\cdot dS=q_f\\&\oint_l E\cdot dl=-\frac{d}{dt}\int_S B\cdot dS\\&\oint_S B\cdot dS=0\\&\oint_l H\cdot dl=\int_S\left(J_f+\frac{\partial D}{\partial t}\right)\cdot dS\end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

它们分别为高斯通量定理，电磁感应定律，磁通连续性原理和全电流定律的积分形式。

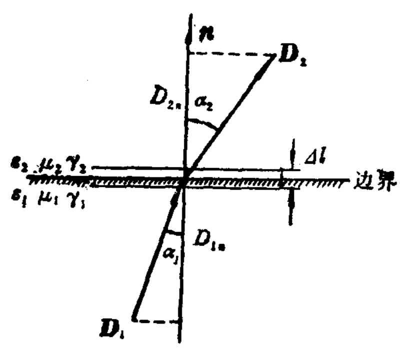
第三节　不同媒质分界面上的边界条件

1）上节中用 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 四个场矢量表示的麦克斯韦方程组(1-22)，对于空间中的正常点（即媒质的物理特性在其邻域中无变化或作连续变化的点）才适用。在穿过两种媒质的分界面时，参数 ε、μ 和 γ 要发生突变，因而使场矢量出现相应的不连续。这一节就要分析这方面的问题。

2）设想用一很薄的过渡层代替媒质 1 和媒质 2 的分界面，参数 ε、μ 和 γ 很快地但是连续地从媒质 1 中(靠紧 S 面)的值变到媒质 2 中的值。在过渡层内，场矢量及其一阶导数是连续、有界的、空间和时间的函数。穿过这个过渡层作一小的正圆柱，如图 1-1 所示。柱体表面与 S 垂直，两个端面位于过渡层的两边，端面之间



(a)



(b)

图 1-1

的距离正好等于过渡层的厚度 Δl。要求矢量 $\boldsymbol{D}$ 沿该柱体的侧壁和端面的面积分（即求 $\boldsymbol{D}$ 的闭合面积分）时，根据高斯通量定理

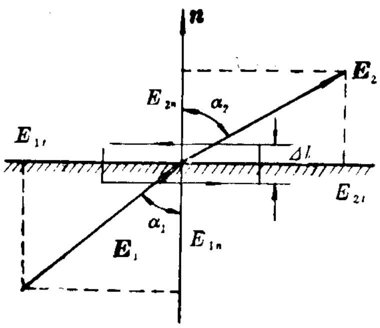


图 1-2

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q \tag{1-26}$$

若端面积 ΔS 非常小，可以认为其上的 $\boldsymbol{D}$ 值不变。忽略高阶微分后，式(1-26)可近似地写成

$$(\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n})\Delta S+\text{柱壁的贡献}=q \tag{1-27}$$

令过渡层向 S 面收缩，在 $\Delta l\to 0$ 的极限条件下，将使柱壁的贡献为无限小。设电荷 q 以体密度 ρ 分布在过渡层内，则有

$$q=\rho\Delta l\Delta S$$

在 $\Delta l\to 0$ 的极限条件下，$\rho\to\infty$，这时用面电荷密度 σ 代替 $\rho\Delta l$ 是方便的。于是

$$(\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n})\Delta S=\sigma\Delta S$$

最后可得穿过分界面时 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量的变化为

$$(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\sigma \tag{1-28}$$

再讨论矢量 $\boldsymbol{B}$ 应满足的条件，可根据

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

按同样方式处理，有

$$(\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{n})\Delta S+\text{柱壁的贡献}=0$$

当 $\Delta l\to 0$，$\Delta S\to 0$ 时，得

$$(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{1-29}$$

3） 现在来分析矢量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量特性。

作一如图 1-2 所示的矩形回路 l_0，长度为 Δm 的两条边位于过渡层的两侧，使穿过该层的侧边长度等于层的厚度 Δl。沿此回路求 $\boldsymbol{E}$ 的线积分，由电磁感应定律，可得

$$\oint_{l_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{S_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{1-30}$$

式中的 S_0 为矩形的面积。$\boldsymbol{S}_0$ 的正法线方向 $\boldsymbol{n}_0$ 与回路的绕行方向成右螺旋关系。忽略高阶微分，式(1-30)可近似地写成

$$[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)]\Delta m+\text{两条侧边 }\Delta l\text{ 的贡献}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta m\Delta l \tag{1-31}$$

两侧边的贡献与 Δl 成正比，故当过渡层收缩成 S 面(即 $\Delta l\to 0$)时，它成为无限小。取法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向由媒质 1 到媒质 2，则在 $\Delta l\to 0$ 和 $\Delta m\to 0$ 的极限情况下，我们有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=-\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta l$$

一般场矢量及其导数为有界值，故上式右边为零，即得

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \tag{1-32}$$

对于 $\boldsymbol{H}$ 在分界面上的不连续问题，可根据

$$\oint_{l_0}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}-\int_{S_0}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S_0}\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}$$

按同样的讨论，得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\Delta m=\lim_{\Delta l\to 0}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}\right)\Delta l\Delta m \tag{1-33}$$

因矢量 $\boldsymbol{D}$ 及其导数有界，当 $\Delta l\to 0$ 时，上式右边第一项趋于零。若电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为有限值，则第二项亦为零。但当回路的两个侧边收缩时，原先通过矩形的电流 $I=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta l\Delta m$，被挤到 S 面上的无限薄层里，为方便起见，可用面电流密度 $\boldsymbol{K}$来代替乘积 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta l$，且有

$$\lim_{\substack{\Delta l\to 0\\ J\to\infty}} J\Delta m\Delta l=K\Delta m \tag{1-34}$$

从而得边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{K} \tag{1-35}$$

以上所得式(1-28)，(1-29)，(1-32)和(1-35)就是在不同媒质分界面上的边界条件。它们确定了在两种不连续媒质分界面上电磁场场量的变化规律。

第四节　电磁场在均匀媒质内的条件

1)　在由静止电荷引起的静电场中，如果存在导体，则场量应满足以下条件：

(1) 由于静电场中不能有电荷运动，因此各种电流都为零，即 $\boldsymbol{J}_f=0$。从而传导电流密度$\boldsymbol{J}_{fi}=\gamma\boldsymbol{E}=0$，可见必有电场强度 $\boldsymbol{E}=0$，这说明导体中不能有电场存在。

(2) 根据麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_t/\varepsilon_0$$

既然导体中 $\boldsymbol{E}=0$，可以导得 $\rho_t=0$。这里的 ρ_t 是总的电荷体密度（即 $\rho_t=\rho_f+\rho_p$）。可见在导体内部不存在净电荷。

(3) 如使导体带电，这些电荷最终将分布在导体表面。

(4) 均匀导体如带电，导体内部自由电荷将很快地衰减为零。我们通过以下的分析来说明。

由连续性方程(1-1)即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

把它应用于传导电流，并考虑到式(1-24)中的关系，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_f=\nabla\cdot\gamma\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\boldsymbol{D}\right)=\frac{\gamma}{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\cdot\nabla\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

将上式代回连续性方程，重新排列，得

$$\frac{d\rho_f}{dt}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho_f=-\boldsymbol{D}\cdot\nabla\frac{\gamma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} \tag{1-36}$$

如 γ 和 ε 与空间坐标无关，即媒质均匀，或 γ 与 ε 虽然与空间坐标有关，但它们的商是一常数（即与 $\boldsymbol{r}$ 无关），则除开在两种媒质分界面上，其余各处均有 $\nabla\frac{\gamma}{\varepsilon}=0$。这样，式(1－36)可以写成

$$\frac{d\rho_f}{dt}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho_f=0$$

其解为
$$\rho_f=\rho_{f0}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t} \tag{1-37}$$
式中 ε/γ 为时间常数，ρ_{f0} 是 $t=0$时刻的电荷密度。这里举几个时间常数的例子：铜为 10^{-19}秒，蒸馏水为 10^{-6} 秒，熔化的石英为 10^{+6} 秒。

在完纯导体内，不可能存在电场，这是由于完纯导体的电导率 $\gamma\to\infty$，且其中的电流密度 $\boldsymbol{J}(=\gamma\boldsymbol{E})$必须为有限值，可见电场强度 $\boldsymbol{E}$ 必须为零。还需指出，根据方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，即然 $\boldsymbol{E}$ 为零，$\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$也为零，即完纯导体内也不能存在时变磁场。

2） 再讨论电磁场在均匀介质内部的条件。

设在线性、均匀、各向同性介质内，则电容率 ε 为一常数，故有$\nabla\varepsilon=0$，因此
$$\rho_f=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\varepsilon\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$$
由上式可解得
$$\rho_p=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\rho_f \tag{1-38}$$
上式表明，在满足上述条件的介质内，如自由电荷体密度为零，则极化电荷体密度也为零。除了在介质的表面，那里出现电容率由 ε 到 ε_0（或由 ε_1 到 ε_2）的突变，在这样的表面上$|\nabla\varepsilon|\to\infty$，而 $\nabla\varepsilon$的方向垂直于表面。如果电场有表面的法线方向分量，则在表面有
$$\rho_f-\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_f-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\rho_p+\rho_f)=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon\to\infty$$
导致突变面上有无限大的电荷体密度。在介质($\rho_f=0$)表面，这样的无限大电荷体密度，可以用有限值的极化电荷面密度 σ_p 表示，使在介质的突变面上
$$\rho_p dv\to\sigma_p dS \tag{1-39}$$
这样，在极化介质外的空间中，介质的效应与具有面电荷密度 σ_p 的电荷所引起的相同。

我们再来回顾式(1-38)。根据关于电介质的定义，介质中不存在自由电荷，即 $\rho_f=0$。式(1-38)表明在均匀介质内部，$\rho_f=\rho_p=0$。电荷只能以面密度形式(σ_f 和 σ_p)存在于均匀介质表面。以后将看到，用边界面上的面电荷分布来代替均匀媒质的效应是方便的。

还需注意，虽然在均匀导体内部 $\rho_f=0$，但不能由此得出结论认为 $\boldsymbol{J}_f$ 也为零。因为 $\boldsymbol{J}_f=\rho_f^-\boldsymbol{v}^-+\rho_f^+\boldsymbol{v}^+$，尽管 $\rho_f^-+\rho_f^+=\rho_f=0$，但 $\boldsymbol{J}_f$ 不一定为零。

3） 如果媒质的磁特性是各向同性、线性、均匀的，则在其内部，磁化电流的体密度
$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_m&=\nabla\times\boldsymbol{M}=\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{H}\right)=\nabla\times\left(\frac{\mu}{\mu_0}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\right)=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\times\nabla\frac{\mu}{\mu_0}\\&=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\left(\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)-\boldsymbol{H}\times\nabla\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\left(\boldsymbol{J}_f+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{1-40}$$
因系均匀媒质，在其内部有$\nabla\dfrac{\mu}{\mu_0}=0$。而在媒质表面，由于磁导率$\mu$有突变，$\nabla\dfrac{\mu}{\mu_0}\to\infty$，且其方向垂直于表面。因此如果 $\boldsymbol{H}$ 有切向分量，则 $\boldsymbol{H}\times\nabla\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)\to\infty$，就是说贡献于 $\boldsymbol{J}_m$ 的是无限大电流密度(对单位面积来说)。但是如果用表面电流的概念，则面电流的密度是有限值。如以 $\boldsymbol{K}_m$ 表示面磁化电流的密度（单位是安/米），则在媒质的突变表面上，有