无穷远的意义方法和应用

李林　应益荣　党新益　著

WU QIONG YUAN DE
YI YI FANG FA
HE YING YONG

西北大学出版社

无穷远的意义方法和应用

李　林　应益荣　党新益　著

西北大学出版社

无穷远的意义方法和应用

李 林 应益荣 党新益 著

责任编辑 王进成 责任校对 杨志华

封面设计 郭学工

西北大学出版社出版发行

（西北大学校内 邮编 710069 电话 8302589）

新华书店经销 西北农业大学印刷厂印刷

850×1168 毫米 1/32 开本 12.5 印张 348 千字

1996 年 9 月第 1 版 1996 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN 7-5604-1112-6/O·75

定价：12.80 元

内容提要

无穷远性态的研究已是百余年来学者们注意的课题.由于它在探索“极限环”中的特殊重要地位及其在全局结构中的不可缺性，于本世纪 70 年代末之后，在我国引起更多学者的兴趣.本书用通俗的语言列举出一些有重要意义的问题，从而可以看出研究无穷远的重要性；接着我们叙述了处理无穷远性态的方法，特别叙述了我们在这方面的扩展和推进，包括一些便于非数学工作者使用的简捷方法 为了使读者掌握无穷远的实质，能够在处理[illegible]自[illegible]用，最后举出了无穷远性态在平面定性理论、空间定性理论、[illegible]定性理论和社会科学中的部分应用 本书可供高等院校数学系、物理系高年级学生和研究生作专门读物，更适合从[illegible]性方程各领域的科技工作者和社会工作者阅读和参

序　　言

目前研究的事实表明，“自组织”的生成必须在一个开放系统的远离平衡态的非线性区域之中．这就是说，要寻求有序的运动规律，在极其复杂的客观物质系统中，仅凭线性系统来刻画显然是不够的．非线性问题已经成为科学研究和科学技术的重要问题，这就是我国自然科学基金申请指南中特别突出非线性科学及有关高校、科研院所组织多学科各方面的专家构成新的科研单位——非线性科学研究中心等的历史背景。

研究结果又证实了，若系统能用常微分方程描述，那么该系统的“自组织”就对应着该常微分方程中的“极限环”．常微分方程定性理论的发展史，证明了理论与实际的结合是促进其发展的最重要源泉．众所周知，*1926* 年，Van der Pol 发表了关于“张驰振荡”的工作，指出在无线电技术中需要产生稳定的自激等幅振荡，这种振荡不可能产生于线性系统．三年之后，*Анзронов* 院士发表了：Poincaré 所导出的极限环，正是 Van der Pol 方程所需要的孤立的稳定的等幅振荡，这样便开始了常微分方程定性理论的一个重要应用领域——非线性振动，从而推动了常微分方程定性理论的研究和发展．由此不难发现，一个纯数学理论、概念和一个客观物质系统运动规律联系起来之后，前者就具有了超常的活力．因此，我们有理由断言，随着“自组织”理论在自然科学和社会科学中的广泛应用，常微分方程定性理论，特别是“极限环”理论将会有一个大的发展．

"极限环"与无穷远性态的研究又有密切关系. 本书集中收录了有关无穷远性态的各方面工作. 在第一章中用已经获得的结果显示了无穷远性态研究的重要意义. 由于引进了无穷远，推翻了统治世界长达近 1/4 世纪的结论；由于用研究无穷远为手段，便容易得到了有关系统有界性的较完整的结论；由于研究了无穷远，使极限环的有关重要性质便可快速、简捷地获得；由于引进了无穷远，使极限环在复域中与奇点产生了对应关系……在第二章中，首先，我们叙述至今人们研究无穷远仍然最常用的 Bendixson 倒径变换和 Poincaré 中心射影变换；因实施倒径变换后，无穷远常属高次奇点，紧接着叙述了高次奇点的处理方法. 其次，我们将上述两种方法在多项式微分系统和非多项式微分系统中进行了操作，并且将两种方法进行了对比，获得了它们之间的联系. 最后，我们还给出了倒径变换的新方法和直接由多项式系数判断系统的有关重要性质的结果. 在第三章中我们给出了无穷远性态的研究在平面定性理论、空间定性理论、复域定性理论及社会科学中的应用. 本书不求其理论的完整性，而重于应用的方便性. 它是在我们十几年来处理无穷远性态时遇到的一些"拦路虎"及我们"打虎"所使用过的且感到行之有效的"武器"（有的是人们早已有的定理法则，我们挑其重要者加以归并，有的是我们自己创造的方法）将其集中归拢以便于有兴趣者的应用. 由于"极限环"与"自组织"有十分密切的关系，为了使科技工作者、社会科学工作者能将"极限环"这个纯数学理论与科学技术、社会科学联系起来，我们作了一点"搭桥"工作，将其结果也叙述在第二章的有关章节中，希望能使人们不必对常微分方程的纯数学理论有太多了解，就可以对某些类型的常微分方程所描述的系统，判断其有关"自组织"的结论. 我们认为这是一件有意义的事，正像计算计的广泛应用是靠不断涌现出好的"软件程序"，才能使非计算机工作者虽对计算机结构不太了解（甚至没有必要了解）也

能简捷自如地使用它.

由于作者水平所限，现加之大胆地发表了一些不成熟的看法，定有不妥之处，敬请批评指正.

作者

1996.3.28

目 录

第一章 无穷远的意义 …………………………………… (1)

第一节 突破性的例子…………………………………… (1)
第二节 一般性的例子…………………………………… (5)
第三节 无穷远的认识 ………………………………… (15)
第四节 无穷远的意义 ………………………………… (20)

第二章 无穷远的方法 ………………………………… (31)

第一节 *Bendixson* 倒径变换 ……………………… (32)
第二节 高次奇点的处理方法 ……………………… (40)
第三节 Poincaré 变换 ……………………………… (56)
第四节 多项式微分系统 …………………………… (65)
第五节 两种处理无穷远性态方法的联系 ………… (79)
第六节 多项式系统的系数判定法 ………………… (84)
第七节 非多项式微分动力系统…………………… (104)

第三章 无穷远的应用………………………………… (129)

第一节 全局分析………………………………………… (129)
第二节 极限环存在性的研究………………………… (141)

第三节　有界二次系统……………………………………………… (151)
第四节　有界三次系统……………………………………………… (166)
第五节　多项式微分系统的有界性………………………………… (189)
第六节　极限环的渐近解 ………………………………………… (207)
第七节　特殊系统的研究 ………………………………………… (221)
第八节　Bendixson 倒径变换空间的应用 ……………………… (237)
第九节　Poincaré 中心射影变换在空间的应用 ………………… (240)
第十节　具有周期强迫项的多项式系统的周期解……………… (246)
第十一节　常微分方程系统的有限逸时解 ……………………… (264)
第十二节　空间多项式微分系统的有界性 ……………………… (277)
第十三节　无穷远 Hopf 分支 …………………………………… (288)
第十四节　复多项式系统的无穷远奇点 ………………………… (296)
第十五节　有根定理与强有根定理………………………………… (299)
第十六节　复解析系统的有根性 ………………………………… (309)
第十七节　复解析系统的强有根定理……………………………… (315)
第十八节　高维情形………………………………………………… (325)
第十九节　高维非自治系统的周期解……………………………… (333)
第二十节　均衡理的应用 ………………………………………… (344)
第二十一节　稳定、改革与发展的协同效应 …………………… (352)

第一章　无穷远的意义

第一节　突破性的例子

1900 年，在巴黎举行的国际数学会议上，德国数学家 D.Hilbert 作了题为“数学问题”的著名报告. 在这篇著名报告中，他除了一般地论述数学问题在推动数学科学发展的作用外，还具体地提出了 23 个数学问题. 这些问题吸引了数学界的广泛兴趣，并给数学的各个分支以极大的推动作用. 一个世纪即将过去了，大部分问题得到了解决，甚至进行了推广，唯有第 16 个问题至今进展甚微. 即使其特殊情形，即系统（E_2）极限环个数的问题，迄今尚未解决. 研究（E_2）极限环的个数问题，目前常用两类方法. 第一类方法是，首先，在奇点邻域，用微小扰动系数来改变焦点的稳定性，使得从细焦点“跳出”极限环；其次，在大范围，研究无穷远奇点的稳定性，然后用环域定理判断有奇数个（至少一个）或偶数个（可能没有）极限环. 第二类方法是，把（E_2)系统经适当变换化为 Lienard 方程，再用有关 Lienard 方程的定理来判断极限环的有无及个数. 采用第一类方法，可以做出具有尽可能多的极限环的二次系统（E_2)，但是得不出极限环个数的上界[1]. 用第二类方法，可对某些特殊的（E_2）系统得出极限环个数的上界，但是，现有的 Lienard 方程的理论，适用于二次系统的主要是极限环唯一性和不存在性的定理. 如果一个奇点外围出现两个以上极限环时，尚不能判别其个数，看来，最终解决（E_2）系统极限环的个数问题，还必须对上述两种方法

进行改进，或者寻求新的理论.

平面系统的极限环的个数问题的确定比较艰难的问题. 长期以来，数学工作者们进行了不懈的探索. 已有的工作大体分四个方面，第一方面，证明某些系统极限环个数的最小上界[2,3,4,5]. 第二方面，构造例子，使某类系统至少有 n 个极限环[6,7,8]. 第三方面，对某些系统给出至少存在 n 个极限环的充分条件[9,10,11]. 第四方面，对某类系统给出恰好存在 n 个极限环的充分条件[12].

1979 年，我国数学工作者史松龄和陈兰荪、王明淑分别独立地举出至少具有四个极限环的 (E_2)系统的实例，其中一个极其重要的步骤是籍助了无穷远的分析. 这两个突破性的例子推翻了统治世界长达四分之一世纪的传统猜测.

例 1.1[13]　二次系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - \delta_2 x - 3x^2 + (1-\delta_1)xy + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1 + \dfrac{2}{9}x - 3y). \end{cases} \tag{1.1}$$

当$0 < \delta_2 \ll \delta_1 \ll 1$时出现(1,3)分布.

证明　第一步，奇点 O (0, 0) 邻域，用微小扰动系数来改变焦点 O 的稳定性，使在奇点 O 附近"跳出"3 个极限环.

为此考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - 3x^2 + xy + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1 + \dfrac{2}{9}x - 3y). \end{cases} \tag{1.2}$$

容易看出，(1.2) 只有两个有限远奇点 O (0, 0) 与 N (0, 1)，按照文献〔14〕的公式可算出 O (0, 0) 是 (1.2) 的稳定二阶细焦点，N (0, 1) 是不稳定粗焦点.

第二步，研究无穷远奇点的性态.

(1.2) 的无限远奇点 $(1, \eta, 0)$ 由方程

$$\eta^3 + \eta^2 - \frac{2}{9} = 0$$

确定，它只有一个正实根，易证对应的无限远奇点是鞍点. 注意到在直线 $1-3y=0$ 上有 $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{9}x^2 \geqslant 0$，这表示 (1.2) 的轨线都自下而上地穿过此直线，故由环域定理知方程 (1.2) 在 O 与 N 外围同时存在极限环，即存在 (1，1) 分布. 容易判断最靠近 N 的极限环 Γ_1 必为内稳定环，最靠近 O 的极限环 Γ_2 必为内不稳定环.

应用文献〔14〕的方法，变动 (1.2) 右方，使成为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - 3x^2 + (1-\delta_1)xy + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x(1 + \frac{2}{9}x - xy). \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $0<\delta_1 \ll 1$，对于 (1.3)，由于 $\overline{v_3} = 2\delta_1 > 0$，O (0，0) 已变为稳定的一阶细焦点，因此，在它的邻近将再出现一个稳定极限环 Γ_3 ($\subset \Gamma_2$) . 由于 δ_1 足够小时，Γ_1 与 Γ_2 都不消失，故方程 (1.3) 有 (1，2) 分布.

再给 (1.3) 第一个方程的右边添加一项 $-\delta_2 x$，使之成为 (1.1)，其中 $0<\delta_2 \ll \delta_1 \ll 1$. 于是 O 又从不稳定细焦点变为稳定粗焦点，故在其更小的邻域中又出现一个不稳定极限环 Γ_4，且这时 Γ_1，Γ_2，Γ_3 仍然存在. 因此，方程 (1.1) 在 O 点外围至少存在三个极限环，在 N 点外围至少有一个极限环. 证毕.

例 1.2 [15]　二次系统

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+x^2+(-25+8\varepsilon-9\delta)xy. \tag{1.4}$$

当 $0<-\lambda\ll-\varepsilon\ll\delta\ll1$ 时，出现（1，3）分布.

证明　第一步，考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y-10x^2+5xy+y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+x^2-25xy.\end{cases} \tag{1.5}$$

在奇点 O（0，0）邻域，用微小扰动系数来改变焦点 O 的稳定性，使系统（1.4）在 O 点外围"跳出"至少 3 个极限环.

第二步，研究无穷远奇点的性态. 利用环域原理知系统（1.4）在 O 与 N 外围同时存在极限环. 故系统（1.4）出现（1，3）分布. 证毕.

注：例 1.2 还纠正了 Bаутин 关于焦点量 $\overline{v_7}$ 公式中的一个符号错误.

文献〔16〕将（1，3）分布的二次系统的范围拓广，使其出发方程的系数不全是确定的数字，得出如下结果:

定理 1.1 [16]　设方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+lx^2+\left(\dfrac{2l+b}{l+n}a\right)xy+ny^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ax^2+bxy\end{cases} \tag{1.6}$$

满足条件:

(1) $a\neq0$;

(2) $3n\ (l+2n)<n\ (n+b)\ <0$;

(3) 无限远奇点唯一.

则存在 ε、δ、λ，只要 $0<-\lambda\ll-\delta\ll-\varepsilon\ll1$，系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x - y + lx^2 + \left(\dfrac{b+2l}{l+n}a + \varepsilon\right)xy + ny^2, \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + ax^2 + \left(b + \dfrac{\varepsilon(l+n)+\delta}{a}\right)xy.
\end{cases} \tag{1.7}
$$

具有极限环的（1，3）分布.

注：这里的条件（3）等价于下列不等式：

$$
4\left(\frac{2l+b}{l+n}\right)^3 a^4 + \left[\left(\frac{2l+b}{l+n}\right)^2 (b-l)^2 + 18n(b-l)\frac{2l+b}{l+n} - 27n^2\right] a^2 + 4n(b-l)^3 < 0.
$$

条件（1）和（2）说明系数微扰前的系统（1.6）以原点为二阶或三阶细焦点.

第二节　一般性的例子

借助于无穷远奇点性态的研究，可以有效地获得多项式系统有界性的完整结论. 我们应用这种方法处理一般平面三次系统，详细讨论了该系统有 1 到 4 个无穷远奇点的各种情形，用该三次系统系数给出了该系统有界的一组充分条件，从而完成了用三次系统的系数判定该三次系统有界性的全部工作[17,18,19].

考虑三次微分系统

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax + by + \sum_{2\leqslant i+j\leqslant 3} a_{ij}x^i y^j = P(x,y) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= cx + \mathrm{d}y + \sum_{2\leqslant i+j\leqslant 3} b_{ij}x^i y^j = Q(x,y)
\end{aligned} \tag{E_3}
$$

作 Poincaré 变换

$$
x = \frac{1}{z},\quad y = \frac{u}{z},\quad \mathrm{d}t = z^2\mathrm{d}t
$$

得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi_1(u)z^2 + \varphi_2(u)z + \varphi_3(u), \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = -\psi_1(u)z^3 - \psi_2(u)z^2 - \psi_3(u). \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$\begin{aligned} &\varphi_1(u) = c + (d-a)u - bu^2, \\ &\varphi_2(u) = b_{20} + (b_{11} - a_{20})u + (b_{02} - a_{11})u^2 - a_{02}u^3, \\ &\varphi_3(u) = b_{30} + (b_{21} - a_{30})u + (b_{12} - a_{21})u^2 + (b_{03} - a_{12})u^3 \\ &\quad - a_{03}u^4, \\ &\psi_1(u) = a + bu \\ &\psi_2(u) = a_{20} + a_{11}u + a_{02}u^2, \\ &\psi_3(u) = a_{30} + a_{21}u + a_{12}u^2 + a_{03}u^3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

再对（2.1）作变换

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}, \quad \mathrm{d}t = z^2 d\tau$$

(E_3)变成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \bar{\varphi}_1(v)z^2 + \bar{\varphi}_2(v)z + \bar{\varphi}_3(v) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = -\bar{\psi}_1(v)z^3 - \bar{\psi}_2(v)z^2 - \bar{\psi}_3(v)z \end{cases} \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_1(v) = b + (a-d)v - cv^2 \\ &\bar{\varphi}_2(v) = a_{02} + (a_{11} - b_{02})v + (a_{20} - b_{11})v^2 - b_{20}v^3 \\ &\bar{\varphi}_3(v) = a_{03} + (a_{12} - b_{03})v + (a_{21} - b_{12})v^2 + (a_{30} - b_{21})v^3 \\ &\quad - b_{30}v^4 \\ &\bar{\psi}_1(v) = cv + d \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\psi_2(v)=b_{20}v^2+b_{11}v+b_{02}u^2$$

$$\psi_3(v)=b_{30}v+b_{21}v^2+b_{12}v+b_{03}$$

由（2.1）知（E_3）的无穷远奇点的个数及性态由 φ_3（u）=0 决定. 我们得到以下结果:

定理 2.1　如果 $b_{30}=a_{03}=0$，$b_{21}=a_{30}=\alpha$，$b_{12}=a_{21}=\beta$，$b_{03}=a_{12}=\gamma$，且 $\alpha+\beta u+\gamma u^2=0$ 无实根，则若下列条件之一成立，（E_3）是有界的.

(1)　$\beta^2-4\alpha\gamma<0$，$\gamma<0$;

(2)　$\gamma=\beta=0$，$a_{02}\neq0$，$\gamma<0$;

(3)　$\gamma=\beta=0$，$a_{02}=0=b_{02}$，$a_{11}\neq0$，且

$$\begin{cases} b=0, \quad d<0, \quad \alpha<0, \quad \text{或} \\ b\neq0, \quad \alpha<0, \quad d+\alpha\dfrac{b^2}{a_{11}^2}-\dfrac{b_{11}b}{a_{11}}<0. \end{cases}$$

(4)　$\gamma=\beta=0$　$a_{02}=a_{11}=0=b_{02}$，且

$$\begin{cases} b\neq0, \quad \alpha<0, \quad \text{或} \\ b=0, \quad d<0, \quad \alpha<0, \ a_{20}^2-4a\alpha<0, \quad \text{或} \\ b=0, \quad \alpha<0, \quad a_{20}=a=0, \quad d<0. \end{cases}$$

定理 2.2　若定理 2.1 的条件成立，但 $\alpha+\beta u+\gamma u^2=0$ 无实根换为 $\gamma\neq0$，$\beta^2-4\alpha\gamma=0$，则下列条件之一成立时（E_3）为有界的.

(1)　$\gamma<0$，$\varphi_2(u_0)\neq0$;

(2)　$\varphi_2(u_0)=0=\psi_2(u_0)$　$\varphi_2'(u_0)\neq0$，$\gamma<0$，

$$\psi_1(u_0)+\psi_2'(u_0)\frac{\varphi_1(u_0)}{\varphi_2'(u_0)}+2\gamma\left[\frac{\varphi_1(u_0)}{\varphi_2'(u_0)}\right]^2<0;$$

(3)　$\varphi_2(u_0)=0=\psi_2(u_0)$，$\varphi_2'(u_0)\neq0$，$\varphi_1(u_0)\neq0$，$\gamma<0$.

这里 $u_0 = -\frac{\beta}{2\gamma}$，“′” 表示导数，即 $\varphi_2'(u_0) = \frac{d\varphi_2(u)}{\mathrm{d}u}\Big|_{u=u_0}$.

定理 2.3　在定理 2.1 条件下，但 $\alpha + \beta u + \gamma u^2 = 0$ 无实根换为 $\gamma = 0$，$\beta \neq 0$ 或 $\gamma \neq 0$，$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$，则（$E_3$）无界.

定理 2.4　如果 $a_{03} = b_{03} - a_{12} = 0$，且 $(b_{21} - a_{30})^2 + 4b_{30}(a_{21} - b_{12}) < 0$ 成立，若下列条件之一被满足时，则（E_3）为有界系统.

(1)　$b_{03} < 0$;

(2)　$b_{03} = 0$，$a_{02} \neq 0$，$(b_{12} - a_{21})a_{12} < 0$，$b_{02} \neq 0$;

(3)　$b_{03} = 0$，$a_{02} \neq 0$，$b_{12} = 0$，$a_{21}a_{02} > 0$，$b_{02} \neq 0$ 且 $a_{02}b_{21} + b_{11}(a_{11} - b_{02}) - b_{02}a_{21} < 0$;

(4)　$b_{03} = 0 = a_{02}$　且 $\begin{cases} a_{11}^2 - 4ba_{21} < 0, & 或 \\ a_{11} = a_{21} = 0. \end{cases}$

定理 2.5　若 $b_{30} = 0 = b_{21} - a_{30}$，$(b_{03} - a_{12})^2 + 4a_{03}(b_{12} - a_{21}) < 0$(即 $u = 0$ 是 $\varphi_3(u) = 0$ 的唯一一个根，它是二重的)，若下列条件之一成立，则（E_3）为有界的.

(1)　$a_{30} < 0$;

(2)　$a_{30} = 0$，$b_{20} \neq 0$，$a_{20} \neq 0$，$a_{21}(b_{12} - a_{21}) > 0$;

(3)　$a_{30} = 0$，$b_{20}a_{20} \neq 0$，$a_{21} = 0$，$b_{12}b_{20} > 0$，且 $b_{20}a_{12} + a_{11}(b_{11} - a_{20}) - a_{20}b_{12} < 0$;

(4)　$a_{30} = 0 = b_{20}$　且 $\begin{cases} b_{11}^2 - 4b_{12}c < 0 & 或 \\ b_{11} = b_{12} = 0. \end{cases}$

定理 2.6　若 u_0 为 $\varphi_3(u) = 0$ 的二重根、若下列条件之一成立时，则（E_3）是有界的.

(1)　$\psi_3(u_0) < 0$;

(2)　$\psi_3(u_0) = 0$，$\varphi_2(u_0) \neq 0$，$\psi_3'(u_0)\psi_3''(u_0) < 0$，$\psi_2(u_0) \neq 0$;