



名师解读高考
专家透析命题

3+X 总复习系列

(双色版)

与人教版全日制普通高级中学教科书(试验修订本)配套

考点精析精练

数 学

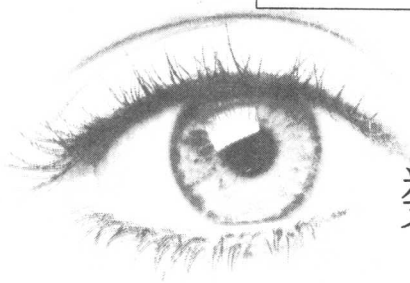


人民教育出版社 审订 延边教育出版社 出版

3+X 总复习系列

与人教版全日制普通高级中学教科书(试验修订本)配套

考点精析精练



数 学

13A070/11

学校_____

班级_____

姓名_____

人民教育出版社 审定 延边教育出版社 出版

- ☐ 顾 问：顾振彪 蔡上鹤 龚亚夫
☐ 策 划：崔炳贤 申敬爱
☐ 丛书主编：周益新
☐ 本册主编：王 华
☐ 编 著：王在良 李金田 魏家粹 李 林
 胡香玲 董广庆 高建刚 白永胜
 许世芳 李映霞 常疏喜 薛盛保
☐ 责任编辑：黄俊葵 岑 巍
☐ 编辑统筹：宁德伟
☐ 封面设计：王 睢 于文燕
☐ 版式设计：李 超

与人教版全日制普通高级中学教科书（试验修订本）配套
《考点精析精练》数 学

审 定：人民教育出版社
出版发行：延边教育出版社
地 址：北京市海淀区紫竹院路 88 号紫竹花园 D 座 702
邮 编：100087
网 址：<http://www.ybep.com>
电 话：010-88552311 88552651
传 真：010-88552651-11
排 版：北京民译印刷厂
印 刷：北京联华印刷厂印刷
开 本：787×1092 16 开本
印 张：17
字 数：465 千字
版 次：2002 年 6 月第 1 版
印 次：2002 年 6 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 7-5437-4756-1/G·4285
定 价：（双色版）19.80 元

如印装质量有问题，本社负责调换



前言

为了配合人民教育出版社全日制普通高级中学教科书(试验修订本)的推广使用,以适应新教材课程改革、研究性学习、“3+X”高考模式改革和培养学生健全的聚合思维及发散思维能力,人民教育出版社、延边教育出版社组织约请了参与人教版新教材试验并对新教材及“3+X”高考改革和思维能力培养有深入研究的湖北黄冈市、北京海淀区、山西省、江苏省、广东省、浙江省等国内知名教师共同编写这套丛书。

目前市场上教辅书多而杂,大多数是教材的翻版,且从内容上讲,与新教材课程改革、研究性学习、“3+X”高考模式改革之间缺乏必要的联系。针对这种状况,我们策划了本套丛书,目的在于培养学生理性的、逻辑性的思维方式和研究、解决问题的方法,使学生在高中课程的学习中将各学科基础的、核心的、可再生的知识内容系统化,构建起学科知识体系,并掌握科学的方法和技巧,来解决学习中的思维障碍。同时,通过适当的练习,使学生了解、适应新大纲、新教材对知识范围和能力的要求。促使学生转换固有的、陈旧的思维方式,使他们拥有全面、健康、严谨、灵活的思维品质,让他们学会将社会热点、焦点问题和新科学发现、新技术的发明等问题同日常学习联系起来,使他们拥有综合的发散思维能力。

这套丛书主要有以下特点:

权威性——以国家教育部颁布的新教学大纲为纲,以人民教育出版社最新教材(试验修订本)为依据,人民教育出版社各学科编辑室指导全书编写工作并审定丛书书稿。

新颖性——丛书根据国家教育部颁布的高中各年级课时标准编写,体现了课程改革新方案、“3+X”高考模式改革和研究性学习新思路,突出新教材、新大纲中知识、能力、素质“三元合一”的教学模式和方法、实践、创新“三位一体”的教学内容,侧重学法指导。减少陈题,不选偏题,精编活题,首创新题,启迪思维方法。将国际上流行的开发学生智力的“活性动态”版式与我国教辅版式相结合,既保护了学生视力、激活了思维,又符合中学生心理年龄层次。



前瞻性——丛书突出素质教育的要求,强调培养学生创新精神和实践能力,设计了学生自己构思答案的研究性学习案例和充分挖掘学生思维潜力的潜能测试,以培养和提高学生的发散思维能力。

实用性——内容与教材紧密配套,既有教师的精辟分析和指导学生自主学习知识归纳和学法建议,又有剖析“活题”思维障碍的解题思维技巧。课后有精选精编针对性很强的知能达标训练和综合能力训练;每单元进行一次小结和能力测试;期中、期末进行阶段性测试,方便学生与人教版教材同步配套使用,可操作性极强。

科学性——丛书按学习规律和思维能力培养的规律循序渐进,突出能力升级的五步递进——知识归纳、学法建议、潜能开发、知能达标训练、综合能力训练,科学地对学生进行显能测试和潜能测试,培养学生思维的敏捷性、科学性、深刻性和发散性。

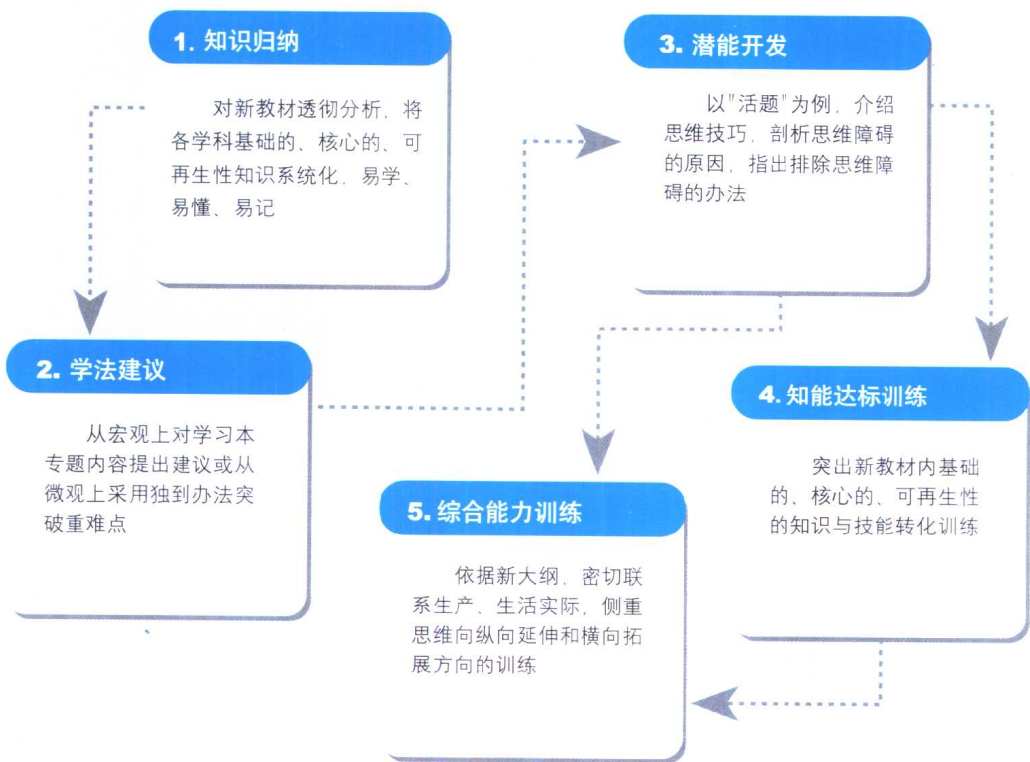
这套丛书在策划、组稿、编写、审读整个过程中,得到了人民教育出版社和延边教育出版社的支持和指导,在此一并致谢。

思维是智力的核心,思维更是能力的体现。思维的表现特征是素质教育和创新教育重要的研究课题。在我国,对中学生进行科学的思维技巧训练、显能测试和潜能测试是一种新的教学尝试。尽管书中许多内容是作者长期教学实践和潜心研究的心得和成果,但仍需要不断完善,不当之处,恳请专家、读者指正。

丛书主编:周益新

2002年4月

内容结构与能力培养过程示意图（3+X总复习）



单元小结





顾振彪 1965年毕业于华东师范大学中文系，人民教育出版社中学语文室编审，课程教材研究所研究员。从事中学语文教材编写、研究工作三十多年，参与或主持编写初、高中语文教材多套。与人合著《语文教材编制与使用》、《文学创作技巧七十题》、《新中国中学语文教育大典》等，并撰写论文《义务教育初中语文教材的编写与实验》、《国外文学教材管窥》等数十篇。

蔡上鹤 1964年毕业于华东师范大学数学系，人民教育出版社编审。主要从事中学数学课程、教材的理论研究和实践活动。曾编写过中学数学通用教材、中学数学教学指导书，著有《数学纵横谈》、《初中数学学习问答》等书；发表过50余篇学术论文，其中《民族素质和数学素养》一文被原国家教委评为一等奖。1983、1984年参加高考数学试卷的命题工作。曾出席国际数学教育大会和国际数学教育心理学会议。1995年10月被国务院授予有突出贡献专家称号。现兼任中国数学会《数学通报》编委、人教社《中小学教材教学（中学理科版）》副主编、北京师范大学兼职教授。



龚亚夫 全国政协第九届委员会委员，课程教材研究所研究员，人民教育出版社英语室主任，编审，现行高中英语教学大纲及新基础教育英语课程核心小组成员。加拿大约克大学教育系研究生毕业，获教育硕士学位。长期从事基础英语教育研究工作，曾在北京海淀区教师进修学校、美国威斯康辛州私立学校任教。1991—1993年在教育部基础教育司工作，主编、改编过多套大型电视英语教学片，其中较有影响的有《走遍美国》、《澳洲之旅》、《TPR儿童英语》等，参与编著英语教材、英语学习方法等各类图书，并发表文章数十篇。

周益新 中国科协国家教育专家委员会学术委员，全国优秀地理教师，《中国教育报》高考研究专家。在湖北省黄冈中学工作二十多年，潜心研究素质教育、创新教育与学生潜能开发的方法和途径。在《光明日报》、《中国教育报》等国家级报刊发表教育研究论文数十篇。指导学生撰写的研究性学习小论文获湖北省科协、湖北省教研室一等奖。策划并主编教育教研丛书多部。





◆ 第1章 集合与简易逻辑	1
第1节 集合的有关概念	1
第2节 集合的运算	4
第3节 含有绝对值的不等式及一元二次不等式的解法	8
第4节 简易逻辑	13
◆ 第2章 函数	18
第1节 函数的有关概念	18
第2节 函数的定义域与值域	22
第3节 函数的单调性与奇偶性	26
第4节 指数函数与对数函数	30
第5节 函数的应用	34
◆ 第3章 数列	39
第1节 数列的概念	39
第2节 等差数列和等比数列	43
第3节 数列的综合应用	48
◆ 第4章 三角函数	53
第1节 三角函数有关概念和基本公式	53
第2节 两角和与差的三角函数	58
第3节 三角函数的图象和性质	63
第4节 三角函数的综合应用	68
◆ 第5章 平面向量	74
第1节 向量的概念及其运算	74
第2节 线段的定比分点与平移	78
第3节 解斜三角形	82
◆ 第6章 不等式	86
第1节 不等式的基本性质	86
第2节 不等式的证明	91

第 3 节 不等式的解法和应用	96
◆ 第 7 章 直线和圆的方程	101
第 1 节 直线的方程	101
第 2 节 直线与直线的位置关系	105
第 3 节 圆的方程	109
第 4 节 直线和圆	114
◆ 第 8 章 圆锥曲线	119
第 1 节 椭圆	119
第 2 节 双曲线	124
第 3 节 抛物线	130
第 4 节 直线与圆锥曲线	135
◆ 第 9 章 直线、平面、简单几何体	141
第 1 节 直线与平面	141
第 2 节 角和距离	146
第 3 节 简单几何体	150
第 4 节 空间向量	155
◆ 第 10 章 排列、组合和概率	160
第 1 节 排列与组合	160
第 2 节 二项式定理	164
第 3 节 概 率	168
◆ 第 11 章 概率与统计	173
第 1 节 随机变量	173
第 2 节 统 计	177
◆ 第 12 章 极限	182
第 1 节 数列的极限及其四则运算	182
第 2 节 函数的极限、运算及函数的连续	186



◆ 第 13 章 导数与微分	192
第 1 节 导数、微分的概念与运算	192
第 2 节 导数的应用	196
◆ 第 14 章 积分	201
第 1 节 不定积分	201
第 2 节 定 积 分	205
◆ 第 15 章 复数	209
第 1 节 复数的概念、代数形式及运算	209
第 2 节 复数的三角形式及其运算	213
第 3 节 复数的几何意义及复数集内的方程	217
◆ 参 考 答 案	221

第 1 章

集合与简易逻辑

第 1 节 集合的有关概念

知识归纳

1. 集合是“某些指定对象的全体”，集合的元素必须满足确定性、无序性和互异性。
2. 集合的表示法，常用的有列举法和描述法。
3. 常用数集的表示符号： $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}^*$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 。
4. 集合中表示关系的概念分两类：一类表示元素和集合之间的关系，有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种情形；另一类表示集合和集合之间的关系，有包含($\subseteq$)、真包含($\subsetneq$)不包含($\not\subset$)三种情形。

学法建议

1. 集合及元素是数学中的原始概念，没有严格的定义。同点、直线、平面一样，只能作描述性的说明：“某些指定对象的全体”就成为一个集合。构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外，还可以是其他对象。

2. 集合的概念及表示是进一步学习数学的基础。准确掌握并理解集合的描述性表示法，如：“集合 $A = \{x | y = \sqrt{15 - 2x - x^2}\}$ 表示的是使函数 $y = \sqrt{15 - 2x - x^2}$ 有意义的实数，即： $A = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$ 。集合 $B = \{y | y = a - 2x - x^2\}$ 表示的是二次函数的值域，即 $B = \{y | y \leq a + 1\}$ 。

3. 为了直观表示集合之间的关系，常用韦恩图，如 U 是全集， A 、 B 是它的两个子集：

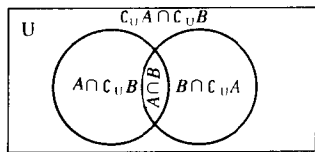


图 1-1

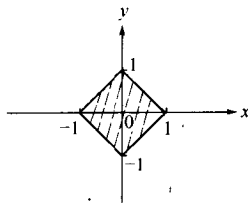


图 1-2

把它们间的关系表示的很清楚，也用平面内的曲线(直线)或区域表示平面内的点集，如集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ 表示的点为图中的阴影部分。

4. 空集 $\emptyset$ 是一个特殊的集合，它不含任何元素，它是任何一个集合的子集，是任何一个非空集合的真子集。集合 $\{\emptyset\}$ 不是空集，是“单元素”集合。要理解 $\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$ 的关系，既可以表示为 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ，也可

· 高中数学 考点解析精练

以表示为 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,当然还可以表示为 $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$.

5. 关于有限集的子集个数有如下结论:若有限集 A 中有 n 个元素,则 A 的子集个数共有 2^n 个,即 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$,非空子集有 $2^n - 1$ 个,非空真子集有 $2^n - 2$ 个.



潜能开发

[例1] 已知 $A = \{x, xy, \lg xy\}$, $B = \{0, |x|, y\}$ 若 $A = B$,求 x, y 的值.

思路分析

选好突破口 $0 \in A$,根据元素的互异性,逐步进行讨论,最终达到目的.

[解答] 由 $A = B$ 知 $0 \in A$,根据集合中元素的互异性及对数函数的定义域知 $x \neq 0, xy \neq 0$ 故 $\lg xy = 0$ 所以 $xy = 1$.此时集合 A, B 可确定为 $A = \{x, 1, 0\}$ $B = \{0, |x|, y\}$ 又因为 $x \neq xy$ 即 $x(1 - y) \neq 0$.

$\therefore x \neq 0$ 且 $y \neq 1 \therefore |x| = 1$.

所以 $x = -1, y = -1$.

[例2] 已知集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{15 - 2x - x^2}\}$ 与 $B = \{y \mid y = a - 2x - x^2\}$,若 $A \subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

思路分析

集合 A 是使函数 $y = \sqrt{15 - 2x - x^2}$ 有意义的实数,集合 B 是以二次函数的值域确定的实数.

[解答] 集合 A 化简为 $A = \{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$

集合 B 化简为 $B = \{y \mid y \leq a + 1\}$ 因为 $A \subseteq B$,所以 $a + 1 \geq 3$ 即 $a \geq 2$.

[例3] 设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$ 若 $B \subsetneq A$,求实数 a 组成的集合的子集有多少个?

思路分析

集合 B 是含有参数的方程,须对参数 a 进行讨论,根据题意确定实数 a 组成的集合,从而解决它有多少个子集.

[解答] 化简集合 $A = \{3, 5\}$.

当 $a = 0$ 时 $B = \emptyset$, $B \subsetneq A$, $\therefore a = 0$ 满足题意.

当 $a \neq 0$ 时 $B \neq \emptyset$, $x = \frac{1}{a} \therefore B \subsetneq A \therefore \frac{1}{a} = 3$,或 $\frac{1}{a} = 5$.

思维诊断

两个集合相等,则两个集合的元素相同,突破口为 $0 \in A$,这是思维的障碍点,推导过程中要注意集合中元素的互异性与确定性,及对数函数的定义域.

思维诊断

对于此题有不少同学把集合 A, B 构成了两个函数的值域,从而产生了错误.究其原因有二:一是没有认真审题,二是没有理解集合描述法的实质,事实上集合 A 的元素是使得函数有意义的实数 x .

思维诊断

$B \subsetneq A$ 的意义有两种类型:一是 $B = \emptyset$ 且 $B \subsetneq A$,二是 $B \neq \emptyset$ 且 $B \subsetneq A$,做题时容易忘掉第一种类型,这样就使得参数的取值范围变小,为避免出现上述错误,就需正确理解 $B \subsetneq A$ 的概念,另外,非空集合子集的个数取决于这个非空集合元素的个数.

$\therefore a = \frac{1}{3}$ 或 $a = \frac{1}{5}$. $\therefore$ 实数 a 组成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$

它们子集共有 8 个.

[例 4] 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合: (1) S 内不含 1; (2) 若 $a \in S$ 则 $\frac{1}{1-a} \in S$, 解答下列问题.

(1) 若 $2 \in S$, 则 S 中必有其他两个数, 求出这两个数.

(2) 求证: 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$.

(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个? 请说明理由.

思路分析

(1) $\because 2 \in S \therefore \frac{1}{1-2} \in S$, 即 $-1 \in S \therefore \frac{1}{1-(-1)} \in S$, 即 $\frac{1}{2} \in S$.

证明 (2) $\because a \in S \therefore \frac{1}{1-a} \in S \therefore \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = 1 - \frac{1}{a} \in S$.

(3) (用反证法证明) 假设 S 中只有一个元素, 则有 $a = \frac{1}{1-a}$.

即 $a^2 - a + 1 = 0$ 方程无实数解, $\therefore$ 集合 S 中不能只有一个元素.



知能达标训练

一、选择题

- 由实数 $x, -x, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合 S 中元素最多为 ()
A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 不能确定
- 集合 $M = \{x | x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ 则 ()
A. $M = N$ B. $M \supseteq N$ C. $M \subseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$
- 满足 $\{a, b\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 M 的个数是 ()
A. 2 B. 4 C. 6 D. 7
- 设全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x > 2\sqrt{3}\}$, $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 则 ()
A. $a \subseteq A$ B. $\{a\} \in A$ C. $a \notin A$ D. $a \in A$
- 设集合 $M = \{y | y = 3 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y | y = 2x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ()
A. $\{y | -3 \leq y \leq 13\}$ B. $\{y | -1 \leq y \leq 3\}$ C. $\{\frac{5}{3}\}$ D. $\{\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$
- 已知集合 $A = \{x | x^2 = x, x \in \mathbb{R}\}$ 则满足条件 $B \subseteq A$ 的所有集合 B 的个数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

思维诊断

理解集合中元素的属性是解决问题的突破口. 由 (1)(2) 知 S 中不能只有一个元素. 对问题的思考, 若从正面考虑有困难, 就应逆向. 问题 (3) 解决不了就是忽略了反证法的运用.

二、填空题

7. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x | x < a\}$
若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
8. 下列集合 $\{x | x = 0\} \cup \{(x, y), x = 0, y \in \mathbf{R}\}$ 表示几个不同的集合_____.
9. 设集合 $A = \{x | xa^2 - 4a - 5, a \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y | y = 4b^2 + 4b + 2, b \in \mathbf{R}\}$ 则 A 与 B 的关系是_____.

三、解答题

10. 设 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$.
 $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$ 求使 $C \subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

11. 已知 $A = \{x | x < 5\}$, $B = \{x | x < a\}$.
(1) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围;
(2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围;
(3) 若 $\complement_{\mathbf{R}} A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$, 求实数 a 的取值范围.

综合能力训练



△1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + a + 2 \leq 0\}$ 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

△2. 在一次国际学术会议上, k 个科学家共使用 P 种不同的语言, 如果任何两个科学家都至少使用一种共同的语言, 但没有任何两个科学家使用的语言完全相同, 求证: $k \leq 2^{P-1}$.

第2节 集合的运算

知识归纳



1. 有关概念

(1) 交集: $A \cap B = \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 如图 1-3 中的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集 $A \cap B$.

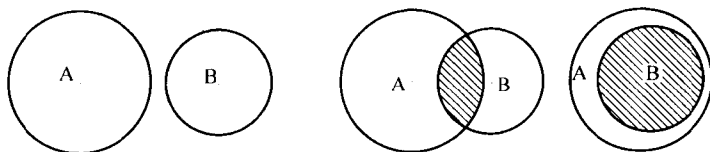


图 1-3

(2) 并集: $A \cup B = \{x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 如图 1-4 中的阴影部分表示集合 A 与 B 的并集, $A \cup B$

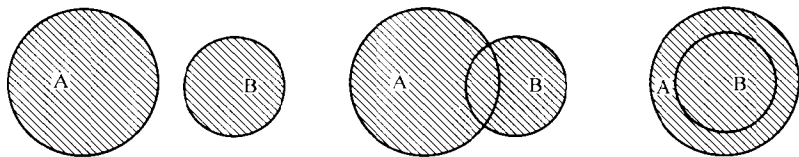


图 1-4

(3) 补集: 如果已知全集 U , 集合 $A \subseteq U$, 则 $\complement_U A = \{x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$,

如图 1-5 中的阴影部分表示集合 A 在点集 U 中的补集 $\complement_U A$.

2. 常用的运算性质及一些重要结论

$$(1) A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap B = B \cap A$$

$$(2) A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(3) A \cap \complement_U A = \emptyset \quad A \cup \complement_U A = U$$

$$(4) (C \cup A) \cap (C \cup B) = C \cup (A \cap B) \quad (C \cap A) \cup (C \cap B) = C \cap (A \cup B)$$

$$(5) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \quad A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$$

$$(6) \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

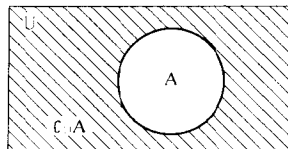


图 1-5



学法建议

1. 集合的运算涉及的知识面很广, 有数的问题, 有点的问题, 有方程的问题, 有不等式的问题等. 所以, 首先要理清题意, 然后利用等价转化和数形结合的思想, 将满足条件的集合用韦恩图或数轴表示出来, 从而求解.

2. 对于含参数的问题, 应分类讨论, 注意数形结合, 问题就会迎刃而解.



潜能开发

[例 1] 设 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

思路分析

$$A = \{0, -4\} \quad \because A \cap B = B \quad \therefore B \subseteq A$$

$$(1) \text{当 } B = \emptyset \text{ 时, } \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0 \text{ 解得 } a < -1.$$

$$(2) \text{当 } B = \{0\} \text{ 或 } B = \{-4\} \text{ 时, } \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0, \text{ 解得 } a = -1 \text{ 所以 } B = \{0\} \text{ 满足条件.}$$

$$(3) \text{当 } B = \{0, -4\} \text{ 时, } \begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) > 0 \\ -2(a+1) = -4 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } a = 1.$$

综上所述实数 a 的取值范围是 $a = 1$ 或 $a \leq -1$.

思维诊断

这是一个以方程的解为元素的两个数集之间的的问题, 因为 $A \cap B = B$, 说明 $B \subseteq A$, 即 $B \subsetneq A$ 或 $B = A$.

根据 $B \subsetneq A$ 或 $B = A$ 展开讨论, 求实数 a 的取值范围, 讨论时, 要注意 $B \subsetneq A$ 是两种情况: B 是空集是 A 的真子集, B 不是空集是 A 的真子集.

分类不全是解此题的主要问题.

[例2] 已知 $A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-3} < 0 \right\}$, $B = \{ x \mid ax^2 - x + b \geq 0 \}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$, 求实数 a 与 b 的值.

思路分析

对于以不等式的解出现的两个无限数集, 借助于数轴形象直观的反映它们间的关系, 从而理解集合 A 与 B 是两个互补的集合.

[解答] 由 $\frac{x+1}{x-3} < 0$ 得 $-1 < x < 3$. $\therefore A = \{ x \mid -1 < x < 3 \}$

又因为 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$, 所以集合 A 与 B 是两个互补的集合, 所以 $B = C_R A = \{ x \mid x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1 \}$.

由已知有 $ax^2 - x + b = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$

比较系数得 $\begin{cases} -1 = -2a \\ b = -3a \end{cases} \therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}.$

[例3] 设集合 $A = \{ (x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0 \}$, $B = \{ (x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y - 5 = 0 \}$, $C = \{ (x, y) \mid y = kx + b \}$ 是否存在 $k, b (k \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N})$ 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 证明你的结论.

思路分析

由于直线 $y = kx + b$ 中有两个要确定的字母 k 与 b , 根据图形及其几何意义一个一个地求之.

[证明] 由集合 A 得抛物线 $y^2 - x - 1 = 0$ 在 y 轴上的截距为 1 和 -1.

由集合 B 得抛物线 $4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$ 在 y 轴上的截距为 $\frac{5}{2}$, 若存在 b , 则 $1 < b < \frac{5}{2}$, (如图 1-6)

又因为 $b \in \mathbf{N}$, 所以 $b = 2$,
因为 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$,

所以只要考虑是否存在 k , 使 $A \cap C = \emptyset$ 且 $B \cap C = \emptyset$.

将直线方程 $y = kx + 2$ 代入抛物线 $y^2 - x - 1 = 0$ 中得: $(kx + 2)^2 - x - 1 = 0$, 即 $k^2 x^2 + (4k - 1)x + 3 = 0$.

令 $\Delta = (4k - 1)^2 - 12k^2 < 0$, 化简为 $4k^2 - 8k + 1 < 0$.

解得 $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} < k < \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ 又因为 $k \in \mathbf{N} \therefore k = 1$.

将直线 $y = kx + 2$ 代入抛物线 $4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$ 中得:

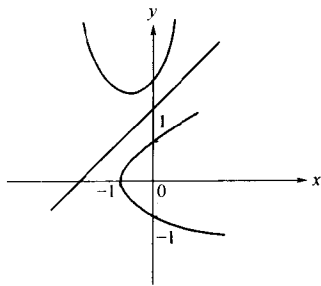


图 1-6

思维诊断

这是一个以不等式的解为元素的两个无限数集间的问题, 要深刻挖掘全集, 补集的概念, 有的同学看到 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$ 两个条件, 想不到集合 A 与 B 间的关系, 说明知识呆板, 僵化. 这时可借助于数轴帮助你理解题设条件, 从而解决问题.

思维诊断

本题给了两条确定的抛物线, 问是否存在直线 $y = kx + b, k, b \in \mathbf{N}$ 与两条抛物线都不相交.

如何看出两个集合所表示的图形; 如何将 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ 转化成三种图形间的关系是同学们遇到的两大障碍, 问题的解决靠我们熟练基础知识, 掌握基本技能.

$$4x^2 + (2-2k)x + 1 = 0$$

令 $\Delta = (2-2k)^2 - 16 < 0$ 解得: $-1 < k < 3$ 因为 $k \in \mathbf{N}$, 所以 $k=1$ 或

2, 所以使 $A \cap C = \emptyset$ 且 $B \cap C = \emptyset$ 的 k 为 1.

综上所述, 满足条件的 k, b 是存在的, 即当 $k=1, b=2$ 时,

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset.$$



知能达标训练

一、选择题

1. $A = \{n | \frac{n}{2} \in \mathbf{Z}\}, B = \{m | \frac{m+1}{2} \in \mathbf{Z}\}$ 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\emptyset$ B. A C. $\emptyset$ D. $\mathbf{Z}$
2. 已知 I 为全集, 集合 M, N 分别是 I 的子集, 若 $M \cap N = N$ 则 ()
A. $\complement_I M \supseteq \complement_I N$ B. $M \subseteq \complement_I N$ C. $\complement_I M \subseteq \complement_I N$ D. $M \supseteq \complement_I N$
3. 若 $A = \{1, 3, x\}, B = \{x^2, 1\}$ 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 则这样的 x 的不同值有 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
4. 已知集合 $M = \{3, a\}, N = \{x | x^2 - 3x < 0, x \in \mathbf{Z}\}, M \cap N = \{1\}, P = M \cup N$, 那么集合 P 的子集共有 ()
A. 3 个 B. 7 个 C. 8 个 D. 16 个
5. 已知集合 P 满足 $P \cap \{4, 6\} = \{4\}, P \cap \{8, 10\} = \{10\}, P \cap \{2, 12\} = \{2\}, P \subseteq \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, 则 P 等于 ()
A. $\{2, 4\}$ B. $\{2, 4, 10\}$ C. $\{6, 8, 12\}$ D. $\{2, 4, 6, 8, 12\}$
6. 已知集合 A, B, C 满足条件 $A \cup B = A \cup C$, 那么下列各式中一定成立的是 ()
A. $A \cap B = A \cap C$ B. $B = C$
C. $A \cap (C \cup B) = A \cap (C \cup C)$ D. $C \cup (A \cap B) = (A \cap C) \cup B$
7. 已知集合 $P = \{(x, y) | y = \sqrt{9-x^2}\}, Q = \{(x, y) | y = x+b\}$ 且 $P \cap Q \neq \emptyset$, 则 b 的取值范围是 ()
A. $-3 < b < 3$ B. $-3\sqrt{2} \leq b \leq 3\sqrt{2}$ C. $-3 < b < 3\sqrt{2}$ D. $-3 \leq b \leq 3\sqrt{2}$

二、填空题

8. 设 S, T 是两个非空集合, $T \subsetneq S$ 且 $S \not\subset T$, 设 $z = S \cap T$ 那么 $S \cup z$ 等于_____.
9. 已知集合 $A = \{x | x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 且 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____.
10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax \leq x - a\}, B = \{x | 1 \leq \log_2(x+1) \leq 2\}$ 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

11. 已知 $A = \{x | a \leq x \leq a+3\}, B = \{x | x > 5 \text{ 或 } x < -1\}$.
(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.
12. 集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}, B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}, C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求当 a 取什么实数时, $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$ 成立.