

气体动压轴承的 原理及计算

周 恒 刘延柱 编著

3.35

国防工业出版社

内 容 简 介

气体动压轴承是近二十年来发展起来的一项新技术，特别在陀螺仪中得到了广泛应用。全书共分八章，前四章讲述气体动压轴承原理及几种常用轴承的近似计算公式，后四章讲述气体动压轴承的稳定性及数值计算方法。可供从事陀螺仪或其它精密机械研制的工程技术人员以及高等院校的工程力学、机械原理及零件、陀螺仪、精密机械及精密仪器等专业师生参考。

气体动压轴承的原理及计算

周 恒 刘延柱 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张 6 151 千字

1981年11月第一版 1981年11月第一次印刷 印数：0,001—2,500册

统一书号：15034·2228 定价：0.79元

A

前 言

这本书是以简单明确的方式，介绍气体动压轴承的原理，并给出一些近似估算公式，使从事这项技术工作的同志有可能较快地掌握其原理，并利用这些近似公式进行初步设计。

另一方面，为了较准确地掌握气体动压轴承的性能，仅有近似公式还不够。更精确的计算和分析，则要借助于电子计算机进行数值计算，而国外一般气体轴承的书中，往往缺少这方面的具体内容。因此本书还介绍了便于实际应用的数值计算方法，根据数值计算结果，对轴承进行稳定性分析的方法。

阅读这本书，不需要很多力学、数学基础知识。学了一般工科院校的高等数学，如能再有少量常微分方程、矩阵的代数运算知识和变分概念，就能更容易地看懂本书的内容。书中一至四章刘延柱编著，五至八章周恒编著。内容如有不当或错误之处，请读者批评指正。

目 录

第一章 平板的动压效应

§ 1.1	流体的粘性	1
§ 1.2	一元流动的雷诺方程	4
§ 1.3	平板间的动压效应	9
§ 1.4	可压缩性影响	14
§ 1.5	二元流动的雷诺方程	18
§ 1.6	有限宽平板	19

第二章 圆柱形动压轴承的近似理论

§ 2.1	无限长轴承	21
§ 2.2	可压缩性影响	26
§ 2.3	有限长轴承	30
§ 2.4	非定常流动	33

第三章 球形动压轴承的近似理论

§ 3.1	力和力矩公式	38
§ 3.2	雷诺方程的极坐标和球坐标形式	41
§ 3.3	压力和切力计算	44
§ 3.4	支承力和力矩	51
§ 3.5	可压缩性影响	53

第四章 螺旋槽的近似理论

§ 4.1	阶形板的动压效应	58
§ 4.2	平面平行槽的惠普尔理论	63
§ 4.3	带槽的圆柱轴承	75
§ 4.4	平面螺旋槽	77
§ 4.5	球面螺旋槽	87
§ 4.6	统一的计算公式	98

第五章 气体动压轴承的稳定性问题

§ 5.1	基本概念	100
-------	------	-----

§ 5.2	轴向涡动失稳问题	101
§ 5.3	圆周平行涡动失稳问题	104
§ 5.4	二自由度液浮陀螺仪的锥型涡动失稳问题	106
附录	$\overline{F}$ 、 $\overline{M}$ 是 s 的解析函数的证明	112
第六章 带螺旋槽气体动压轴承的准不可压缩理论		
§ 6.1	基本方程的推导	115
§ 6.2	各种涡动情况下的方程	122
§ 6.3	方程解法及边界条件	126
§ 6.4	支承力及刚度的计算	135
§ 6.5	槽开在转子上的情况	137
§ 6.6	本理论的适用范围	138
第七章 有限多槽气体动压轴承的有限差分法		
§ 7.1	有限差分法的方程	139
§ 7.2	方程的解法	147
§ 7.3	边界条件问题	155
§ 7.4	支承力及力矩计算公式	158
第八章 有限单元法		
§ 8.1	变分方程	164
§ 8.2	有限单元法概念	169
§ 8.3	有限单元法的计算问题	171
§ 8.4	其它形式的单元	176
§ 8.5	边界条件的处理	180
§ 8.6	程序编制问题	182
参考文献		186

第一章 平板的动压效应

§ 1.1 流体的粘性

流体和固体是物质的两种不同物理形态，它们具有一些共性但也有显著的区别。

它们的共同点首先是：从宏观的角度观察，都是由连续物质组成的连续介质。对固体或液体是如此，对气体也是如此。即使气体是由不连续的运动着的分子组成，但由于我们讨论的对象中包含着大量的运动着的分子，因此从宏观角度仍认为它们是连续介质。其次，它们都服从质量守恒原理，在流体力学中称为连续性原理。就是说，一定质量的流体流入确定的空间，减去同一时刻从这个空间流出去的流体质量应该等于此空间内净增加的流体质量。或者说，流体的质量不能凭空增加或减少。流体和固体都服从静力学平衡条件。如果一个流体团处于平衡状态，则作用于这个流体团的所有外力都必须满足静力学平衡条件。对于流动着的流体团，作用力必须与惯性力相平衡。

流体与固体的不同点首先是：流体是可以流动的，没有固定的形状，在很小的外力作用下能无限地改变形状。流体的形状是由容器确定的。气体完全充满容器而液体存在自由液面，从这点来看，气体和液体也有明显的区别。其次，固体可以承受法向力也可以承受切向力，但经验证明，流体虽然也能承受很大的法向压力却不能承受法向拉力，在静止状态下也不能承受切向力。因此静力学平衡条件只是流体平衡的必要条件而不是充分条件，这与固体完全不同。

流体可以区分为气体和液体。除了上面所说有无自由液面的差别以外，液体的密度变化很小，可以认为密度不变，称为不可

压缩流体，而气体的密度随着温度和压力的不同可发生明显的变化，称为可压缩流体。

流体和固体既有明显的不同性质，研究方法也就很不一样。在固体力学中是把组成固体的那些确定的物质作为研究对象，这种方法对不停流动着的流体难以使用。在流体力学中，把流体流动的空间称为流场，把流场中各个不同位置在不同时刻的速度、压力、密度等参数的变化规律作为研究对象。在一般情况下速度、压力、密度等参数是流场中各点的位置和时间的函数。如果它们只取决于流场中各点的位置而不随时间变化，则称为定常流动，反之称为非定常流动。

在流动着的流体质点之间通常可以传递微小的切向力，流体的这种特性称为粘性。在许多实际问题中，流体的粘性往往起重要作用而不允许忽略。不同的流体有不同程度的粘性，气体的粘性远远小于液体的粘性。完全忽略粘性的流体称为理想流体，凡不能忽略粘性的流体概称为粘性流体。本书所讨论的气体动压效应就是粘性流体特有的一种力学现象。

为了研究流体的粘性，作以下试验：

在两块互相平行且靠得很近的平板之间充满流体，上板固定，下板沿 x 轴方向以速度 U 滑动，平板间的距离为 h （见图 1-1）。在板的边界处由于粘性流体的质点附着在固体界壁上，因此流动速度与板的速度相等。在下板处流体速度 u 等于板的滑动速度 U ，而向上沿法线方向逐渐减小，到上板处减小为零。当间隙 h 很小时，近似认为流速的变化是均匀的，则速度变化梯度等于 U/h 。在运动过程中测出流体层对上板或下板的切向摩擦阻力 F 。实验表明，与

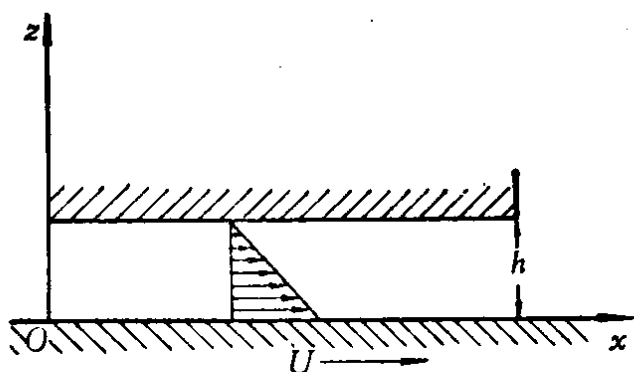


图1-1 平行平板间的流动

固体之间的干摩擦规律完全不同， F 与接触处的正压力无关，它与板的面积 S 以及速度梯度 U/h 成正比。

$$F \propto \frac{S U}{h}$$

以 τ 表示不同的流体层之间或流体与界壁之间所传递的单位面积上的切向力，称为切应力或简称为切力。

$$\tau \propto \frac{U}{h}$$

可叙述为：流体的切力与流体沿板的法线方向的速度梯度成正比，或切力与板的法线上流体质点变形的角速度成正比。

令坐标轴 z 沿板的法线方向向上，将速度变化梯度以导数 du/dz 表示，令 μ 为比例系数，规定作用在下板上的切力 τ 以 x 轴方向为正方向，可写出

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} \quad (1-1)$$

称为流体粘性的牛顿公式。导数 du/dz 为负值，表示切力 τ 逆着板的运动方向。

比例系数 μ 称为流体的粘度，它是一种表示物质的物理属性的参数，其值与温度密切相关。 μ 的量纲是

$$[\mu] = \frac{[\text{力}][\text{时}]}{[\text{长}]^2}$$

在物理单位制中， μ 的单位以泊（ p ）表示：

$$1 \text{ 泊} = 1 \frac{\text{达因} \cdot \text{秒}}{\text{厘米}^2}$$

泊的单位太大，实际使用的单位为厘泊（ cp ）或微泊（ μp ）：

$$1 \text{ 厘泊} = 10^{-2} \text{ 泊}$$

$$1 \text{ 微泊} = 10^{-6} \text{ 泊}$$

泊与工程单位制的关系为

$$1 \frac{\text{克} \cdot \text{秒}}{\text{厘米}^2} = 980 \text{ 泊}$$

表 1-1 给出几种常用流体的粘度。

表1-1 几种常用流体的粘度 (温度22°C时)

流 体	μ (物理单位)	μ (工程单位)(克·秒/厘米 ²)
氢气	90微泊	0.92×10^{-7}
氮气	176微泊	1.80×10^{-7}
空气	180微泊	1.84×10^{-7}
氦气	196微泊	2.00×10^{-7}
水	1厘泊	1.02×10^{-5}
氟油	约200厘泊	约 2×10^{-3}
硅油	约 10^5 厘泊	约 1

与粘度有关的一个重要的无量纲参数称为雷诺数 (Reynolds number), 它的定义是

$$Re = \frac{Uh}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

ν 为粘度 μ 与流体密度 ρ 之比, 称为运动粘度。试验证明, 当 Re 比较小时, 流体层内全部质点都在次序分明的平行层中运动, 各层之间不互相混杂, 这种运动称为层流。当 Re 增大到某个临界值时, 各层之间发生混扰现象, 称为湍流。本书的讨论范围仅限于层流。

§ 1.2 一元流动的雷诺方程

为了说明粘性流体的动压效应, 先讨论最简单的情况, 即倾斜平板间的一元流动。设两块平板互相靠近并倾斜一微小角度, 上板固定, 长度无限的下板以速度 U 相对上板滑动, 平板之间充满气体。建立固定坐标系 (xyz), 原点 O 为上板边缘在下板上的投影位置, x 和 y 轴沿下板平面但不随下板运动, 其中 x 轴沿下板运动方向, z 轴向上沿下板的法线方向 (见图 1-2)。为了简化流体运动方程的建立过程, 作以下基本假定:

1. 平板的间隙 h 极小, 但仍远远大于气体分子的自由程, 间隙内的气体仍可视作连续介质。

2. 由于间隙 h 极小, 雷诺数小, 不仅保证气体的流动为层流, 而且由于流速沿气膜法向 (z 方向) 的梯度极大, 所产生的粘性力在数量级上远远超过气体的体积力 (指重力与惯性力), 以致在计算中可将体积力完全忽略掉, 只考虑气体的粘性力

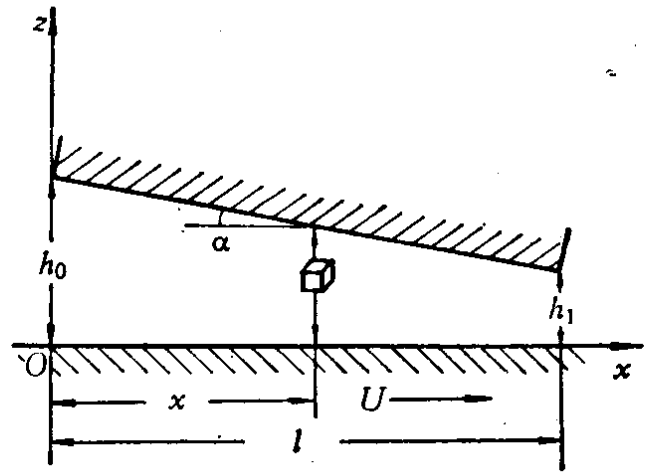


图1-2 倾斜平板间的流动

与正压力互相平衡。在粘性力中也只考虑流速沿 z 方向梯度所引起的粘性力, 而忽略流速沿 x 或 y 方向梯度所引起的粘性力。

3. 由于间隙 h 极小, 忽略气体质点沿气膜法向的流动, 并认为气体的压力 p 、密度 ρ 和粘度 μ 沿 z 方向无变化。

4. 二平板沿 y 方向为无限宽。在垂直 y 轴的任意断面上, 气体作相同的平面流动, 不存在沿 y 方向的侧向流动。气体的压力 p 、密度 ρ 和粘度 μ 沿 y 方向无变化, 它们只是坐标 x 和时间 t 的函数, 定常流动时是坐标 x 的一元函数。

从气膜中任意位置处取出一边长为 dx 、 dy 和 dz 的小平行六面体。考虑以上基本假定, 列出此微元体沿 x 轴方向的静力学平衡条件 (见图 1-3):

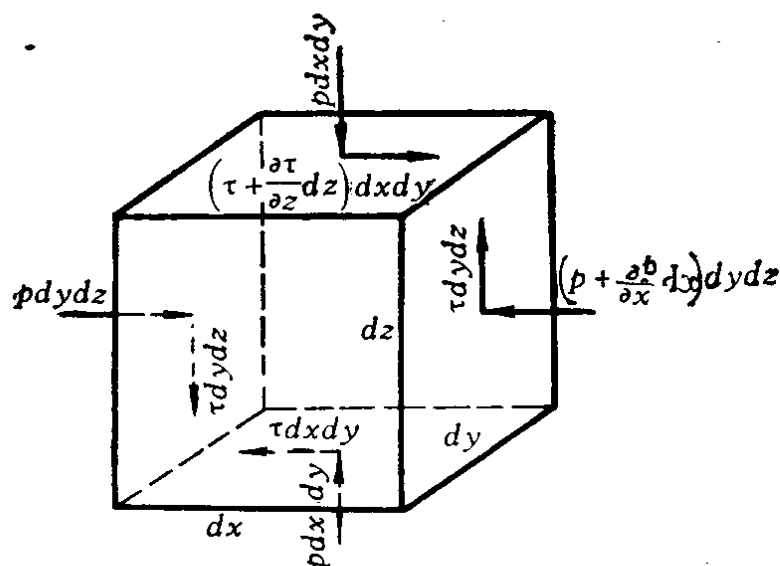


图1-3 微元体的平衡

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz - \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}dz\right)dx dy = 0$$

消去 $dx dy dz$ 后为

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \quad (1-2)$$

由于压力 p 沿 z 轴方向无变化, 因此切力 τ 沿 x 轴方向必须保持不变, 才能同时满足沿 z 轴的力平衡条件。沿 y 轴的力平衡条件和绕各坐标轴的力矩平衡条件都自然满足。

将式 (1-1) 中的常微分符号改为偏微分符号, 则

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-3)$$

代入式 (1-2), 得到平板间流动的气体运动方程

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1-4)$$

按假定 3, μ 和 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 都沿高度无变化, 与 z 无关。将式 (1-4) 两边对 z 积分二次后得到

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) z^2 + C_1 z + C_2$$

代入上下板界壁处的边界条件

$$\begin{aligned} z = 0 : u &= U \\ z = h : u &= 0 \end{aligned} \quad (1-5)$$

解出积分常数为

$$C_1 = - \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h + \frac{U}{h} \right], \quad C_2 = U$$

最终得到流速 u 沿气膜高度的分布规律为

$$u = U \left(1 - \frac{z}{h} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{z(h-z)}{2\mu} \quad (1-6)$$

第一项是平板的相对运动所引起的流动, 流速按直线分布, 流动方向与平板运动方向一致 (见图 1-4)。第二项是压力沿 x 轴的变化梯度所引起的, 流速按抛物线分布, 从压力较高处流向压力

较低处 (见图 1-5)。

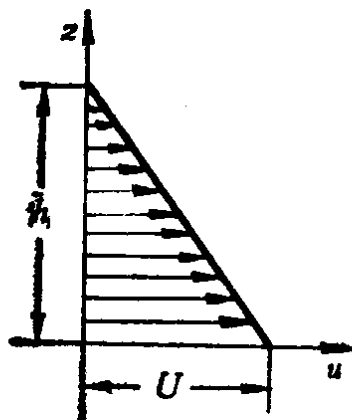


图1-4 平板运动引起的流速分布

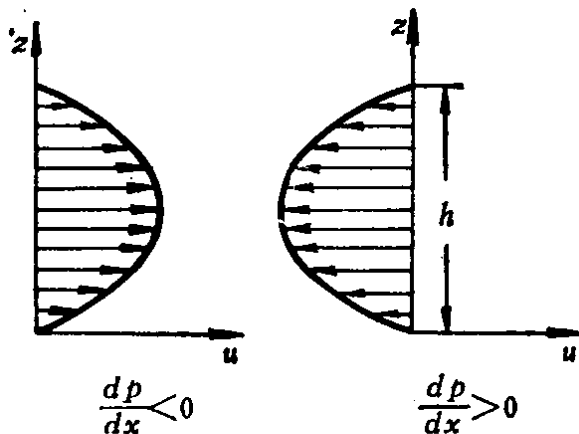


图1-5 压力梯度引起的流速分布

单位时间内流体通过单位宽度截面的质量流量为以下积分：

$$\int_0^h \rho u dz = \rho \int_0^h u dz = \rho q$$

q 为单位时间内流体通过单位宽度气膜截面的体积流量

$$q = \int_0^h u dz$$

将式 (1-6) 代入上式，积分后得

$$q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-7)$$

在气膜内截取宽度为 1、高度为 h 、厚度为 dx 的薄层作为控制体。连续性原理要求单位时间内流进控制体的流体质量减去流出的质量等于此控制体内净增加的流体质量。借助图 1-6 写出此连续性条件

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} dx = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho h dx)$$

消去 dx ，并将式 (1-7) 代入后，推出

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6U \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (1-8)$$

称为一元流动的流体润滑方程，或雷诺方程 (Reynolds equation)。

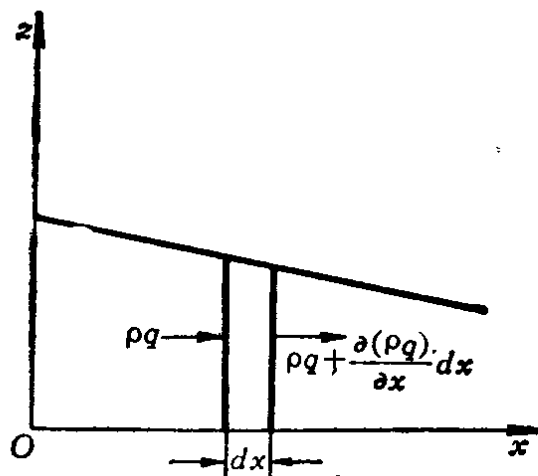


图1-6 一元流动的连续性

如果是定常流动, h 、 p 、 ρ 都不随时间变化, 式 (1-8) 简化为

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 6U \frac{d(\rho h)}{dx} \quad (1-9)$$

积分后得

$$\frac{\rho U h}{2} - \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} = \text{const} \quad (1-10)$$

即

$$\rho q = \text{const}$$

这个首次积分的物理意义是十分明显的。它说明在定常流动时, 单位时间内流体通过任一气膜截面的质量流量守恒。

如流体为不可压缩, 令式 (1-8) 中的 ρ 为常数, 得到不可压缩流体非定常流动的雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1-11)$$

对于不可压缩的定常流动, 令式 (1-10) 中的 ρ 为常数, 此首次积分简化为

$$q = \text{const}$$

或

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu \left(\frac{U}{h^2} - \frac{2q}{h^3} \right) \quad (1-12)$$

于是质量流量守恒转化为体积流量守恒。 q 可看作是首次积分的积分常数, 取决于上下板界壁处流动的边界条件。

§ 1.3 平板间的动压效应

设平板间的流动是不可压缩的定常流动, p_a 为环境气压, l 为上板对 x 轴的投影长度, h_0 为 $x = 0$ 处的平板间隙, 引入以下无量纲量

$$P = \frac{p}{p_a}, \quad X = \frac{x}{l}, \quad H = \frac{h}{h_0},$$

$$Q = \frac{2q}{Uh_0}, \quad \Lambda = \frac{6\mu Ul}{p_a h_0^3} \quad (1-13)$$

将式 (1-12) 写作无量纲形式

$$\frac{dP}{dX} = \Lambda \left(\frac{1}{H^2} - \frac{Q}{H^3} \right) \quad (1-14)$$

设上板相对下板绕 y 轴的倾角为 α , 间隙 h 是 x 的线性函数

$$h = h_0 - (\operatorname{tg} \alpha) x$$

$$\text{或} \quad H = 1 - \epsilon X \quad (1-15)$$

无量纲参数 ϵ 定义为

$$\epsilon = \frac{l \operatorname{tg} \alpha}{h_0} \quad \text{或} \quad \epsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}$$

h_1 为 $x = l$ 边缘处的间隙, ϵ 为平板的倾斜率。将式 (1-15) 代入式 (1-14), 设 ϵ 很小, 只保留其一阶微量, 得到

$$\frac{dP}{dX} = \Lambda [1 - Q + \epsilon(2 - 3Q)X] \quad (1-16)$$

压力 p 在板的边缘处等于环境气压 p_a , 对应于以下边界条件

$$X = 0 : P(0) = 1$$

$$X = 1 : P(1) = 1 \quad (1-17)$$

将式 (1-16) 对 X 积分, 并利用边界条件 (1-17) 式确定积分常数, 包括常数 Q 的值, 得到

$$Q = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

积分后得压力分布规律为

$$P = 1 + \frac{\epsilon}{2} \Lambda X(1 - X) \quad (1-18)$$

恢复为有量纲形式

$$p = p_a \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \Lambda \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] \quad (1-19)$$

图 1-7 为平板内压力分布曲线，其特点是板的中部出现超过环境气压 p_a 的高压，这种现象就称为粘性流体的动压效应。式 (1-18)、(1-19) 是只适合于倾斜率 ϵ 很小时的近似解，如考虑 ϵ 二阶以上微量推出精确解，则压力分布变得不对称，高压中心朝运动方向偏移， ϵ 愈大不对称性愈显著。

动压效应的物理概念可用流量守恒原理说明：如果平板倾斜时气膜内的压力仍与 p_a 相同，没有压力梯度，则流速按图 1-4 所示为直线分布。流速曲线所围的面积代表体积流量 q ，平板倾斜时三角形的底不变（都是 U ）而高 h 逐渐减小，三角形面积也逐渐变小，显然与流量守恒原理发生矛盾。由此可见，板中压力必不是常数，但在两端边缘处压力都等于 p_a ，因此在板中必有 $dp/dx = 0$ 的截面存在，在该处流速分布正好是三角形分布。在其它位置必存在压力梯度，流速曲线应为图 1-4 与图 1-5 的叠加。

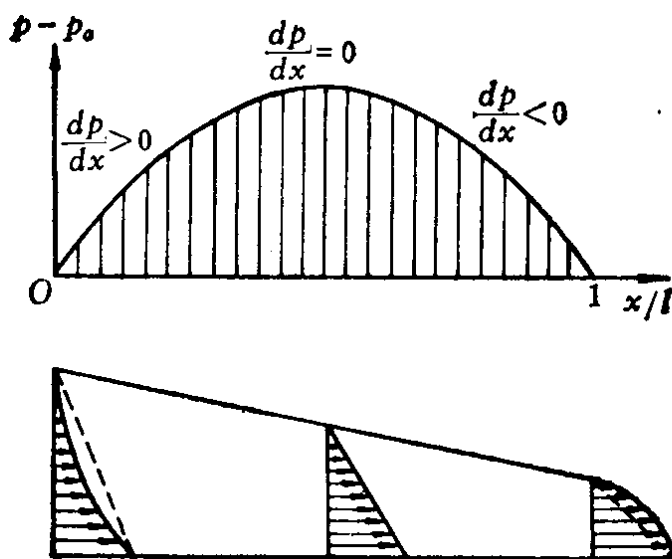


图1-7 压力分布曲线

在板的前半部应有 $dp/dx > 0$ ，三角形面积减去一部分抛物线面积，在板的后半部则应有 $dp/dx < 0$ ，三角形面积加上一部分抛物线面积。这样才有可能保证各个截面流速曲线所围的面积相等，从而满足流量守恒原理。因此推出：板的中部必然有高压存在。

平板间的动压效应只有在平板倾斜，气膜为不等厚度的楔形时才能产生。厚度沿运动方向减小时，板中有超过环境气压的正压产生。厚度沿运动方向增大时则相反，板中产生负压。倾斜率 ϵ 愈大或 Λ 愈大，动压效应就愈强烈。

为了使以上无限宽平板条件下推出的结论能近似用于有限宽平板，计算气膜内的平均压强 $\tilde{p}$ ，定义为

$$\tilde{p} = \frac{1}{l} \int_0^l p dx \quad (1-20)$$

利用平均压强计算面积为 S 的有限宽平板的气膜总支承力

$$F = (\tilde{p} - p_a) S \quad (1-21)$$

将式 (1-19) 代入式 (1-20)，积出

$$\tilde{p} = p_a \left(1 + \frac{1}{12} \epsilon \Lambda \right)$$

再代入式 (1-21)，推出

$$F = K \epsilon \quad (1-22)$$

总支承力 F 与 ϵ 成正比。

式中
$$K = \frac{1}{6} \Lambda F_0; \quad F_0 = \frac{1}{2} p_a S \quad (1-23)$$

常数 F_0 定义为环境气压 p_a 与润滑面积 S 乘积的一半。式 (1-23) 说明在不可压缩条件下，气膜支承力随 Λ 成比例增大。平板的运动速度 U 愈大，气体的粘度 μ 愈大或间隙 h_0 愈小，则 Λ 愈大，动压效应愈强烈。

将式 (1-6) 代入式 (1-3) 计算流体的切力，得到

$$\tau = -\frac{\mu U}{h} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{h - 2z}{2} \quad (1-24)$$

对气膜内不同高度的流体层，切力有不同的值，而且由于 $\partial p / \partial x$ 是 x 的函数，不同的气膜截面对应的切力也不同。但是前面列写小平行六面体沿 z 轴的静力学平衡条件时，要求 τ 沿 x 轴的梯度为零，于是产生由于简化条件本身所引起的矛盾，说明雷诺方程只能近似地描述实际流体运动。

严格说来，以上推出的压力 p 和切力 τ 的计算公式都只限于计算下板上的作用力，而不能直接用于计算上板上的作用力，因为上板是倾斜着的。将图 1-3 所取的小平行六面体向上作柱面延伸到上板界面，取出以边长为 dx 和 dy 的底面和倾斜的界面组成的小三棱柱体如图 1-8。设 p' 和 τ' 为斜面上作用的压力和切力，列出此微元体沿 x 轴和 z 轴的静力学平衡条件，消去 $dx dy$ 后得到 p' 和 τ' 的代数方程组

$$\begin{cases} p' \operatorname{tg} \alpha - \tau' = p \operatorname{tg} \alpha - \tau \\ p' + \tau' \operatorname{tg} \alpha = p - \tau \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} p' = p - \tau \left(\frac{2h_0\epsilon}{l} \right) \left[1 + \left(\frac{h_0\epsilon}{l} \right)^2 \right]^{-1} \\ \tau' = \tau \left[1 - \left(\frac{h_0\epsilon}{l} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{h_0\epsilon}{l} \right)^2 \right]^{-1} \end{cases} \quad (1-24 a)$$

此结果说明上板上的压力和切力公式与下板不同。其中 τ' 与 τ 的差别是 ϵ 的二阶以上微量，只保留 ϵ 的一阶微量时 τ' 与 τ 相等。上板的正压力公式可近似写作

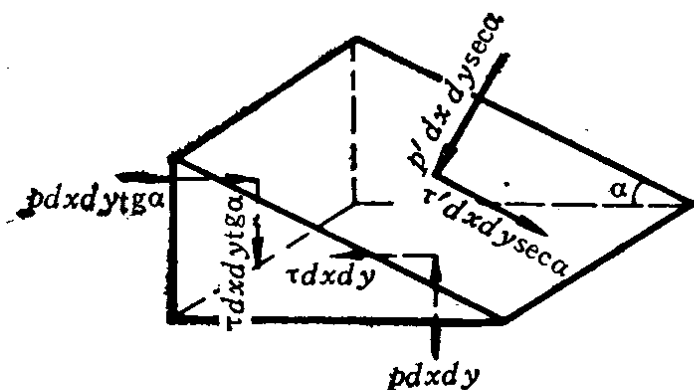


图1-8 界壁处微元体的平衡