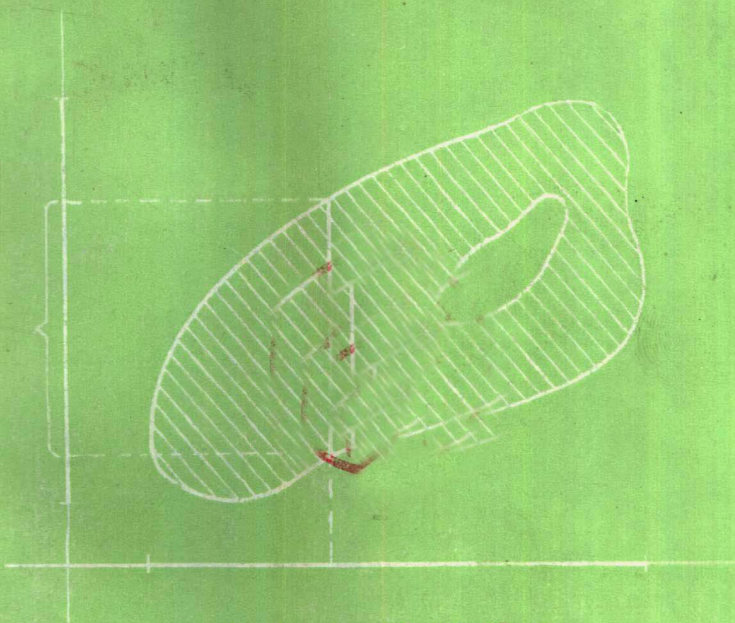


单纯不动点算法基础

王则柯 著



中山大学出版社

单纯不动点算法基础

王则柯 著



中山大学出版社

内容简介

单纯不动点算法是最近十几年里发展起来的非线性问题数值解的有效方法。本书系统论述算法的基础理论和若干重要发展,使读者能迅速进入这一领域并接近当前研究的前沿。

该书起点低,论述完整,具有微积分和线性代数基础的读者都可阅读。

本书可作为科技工作者和实际应用工作者学习单纯不动点算法的导引,可作为理工科大学数学、计算数学、应用数学等专业高年级学生和研究生的教材,亦可供有志于研究经济理论和系统工程理论的数学工作者参考。

单纯不动点算法基础

王则柯 著

中山大学出版社出版
广东省新华书店发行
韶关新华印刷厂印装

850×1168毫米 32开本 8.625印张190千字

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数1-3000册

统一书号: 13339·13 定价: 3.00元

前 言

单纯不动点算法是最近十几年里发展起来的高度非线性问题数值解的有效方法。本书以最少的预备知识要求，系统论述单纯不动点算法的主要发展和基础理论，使读者能够迅速掌握有关的内容并接近这一领域当前研究的前沿。

自1912年Brouwer不动点定理出现以来，各种不动点定理成为应用数学领域许多问题解的存在性讨论的有力工具。不动点定理的条件一般都比较弱，而结论却很强，从而得到人们的赞赏。许多应用问题都可以方便地表述为等价的不动点问题，更使不动点定理在应用领域大受欢迎。然而，从计算的角度来看，除了收缩映射的不动点定理以外，各种不动点定理的用处还是有限的，因为它们并不告诉人们怎样把肯定存在的不动点找出来，不动点的数值求解还是要借助一定的迭代过程，但各种迭代方法通常要对问题提出比较苛刻的条件才能保证计算收敛。

六十年代末期，情况发生了很大的变化。1967年，美国耶鲁大学经济系教授H.E.Scarf发表论文，提出计算单纯形连续自映射不动点的一种有限算法。Scarf采用整数标号，把单纯形分割为有限个称为本原集的子集，然后借助单纯形之间的互补转轴运算格式，形成系统的、在有限步内必定成功的寻找表征不动点位置的本原集的算法。这是著名的Brouwer不动点定理的第一个构造性的证明，它引起了人们广泛的兴趣。在随后短短的几年时间里，H.Kuhn把单纯剖分引入算法，B.C.Eaves, R.Saigal和O.Merrill使算法成为从人为始点到不动点的同伦形变过程，并且采用向量标号成功地解决了上半连续集值映射不动点的计算问

题。他们的工作，不但使算法的效率大大提高，而且使算法的应用(特别是在经济学方面的应用)大为拓广。

单纯不动点算法有若干突出的优点。例如非线性方程数值解，如果采用别的算法，初始值的选取是一个足以影响计算是否收敛的大问题，但当我们采用单纯不动点算法来处理某些问题时，不论计算从哪里开始，都会收敛到原问题的解。单纯不动点算法的这种经常大范围收敛的性质，以及只要求连续不要求可微、只做函数计值避免导数运算的特点，可以同时求出问题的一批解并且实施为并行算法的特点，都是引人注目的。

作者从事单纯不动点算法的研究和教学多年，感到单纯不动点算法的另一显著特点是思想新颖，所需要的预备知识很少。只要有一本好的著作，掌握线性代数、微积分和掌握一点拓扑向量空间基本概念的读者，都可以进入这一领域，不会遇到原则的困难。这也是本书写作的最初的动机。M. Todd在1976年出版过一本不动点算法的专著：《*The Computation of Fixed Points and Applications*》。本人从这本专著中得到许多教益。这本急就的专著是发展到当时水平的单纯不动点算法的出色的总结，许多概括和处理至今看来仍然是相当好的。M. Todd的著作使我们感受到单纯不动点算法创始者们工作的背景和思考的踪迹，然而，这个优点的另一方面，就是使阅历较浅的读者读起来感觉困难。今天，当基础理论比较成熟的时候，我们可以采用更好的形式把基本的内容组织起来，呈现在读者面前。按照这个想法，本书从需要预备知识最少的欧氏空间连续自映射不动点的算法讲起，尽量作到循序渐进使每一章的难度不会悬殊太远，帮助读者比较顺利地掌握单纯不动点算法直到八十年代的主要发展。我们把集值映射向量标号算法安排在较后的位置，使前面的训练和积累能够成为这些内容的坚实的铺垫。这些做法是否成功，还有待各位专家和读者指正。书后的两个简短附录，有助于读者了解该方法

的历史背景和它与连续方法的深刻联系。

作为一本入门著作，本书只列出最基本的参考文献，但是许多未被列入的文献无疑也使作者受益。为便于阅读，书末有主要符号和主要名词索引。由于作者水平有限，书中难免会有缺点和错误，诚恳地欢迎各方的批评和指教。

本书是在李岳生教授的关心和支持下写成的。复旦大学李元熹同志的讨论和通信，使作者得到许多有益的启发。陈泽鹏、吴相辉、王振堂、高堂安、马建瓴、田明忠同志仔细阅读了本书的初稿，作者向他们表示由衷的感谢。

作者

1985年7月于中山大学高等学术研究中心

目 录

前言

第一章 欧氏空间自映射不动点的一种算法	1
§ 1 欧氏空间自映射的不动点	1
§ 2 单纯剖分的一般概念	7
§ 3 K_1 剖分和 J_1 剖分	16
§ 4 $\mathbf{R}^n$ 连续自映射不动点的算法	26
§ 5 收敛性讨论	32
第二章 单纯形自映射不动点的算法	38
§ 1 标准单纯形的连续自映射	38
§ 2 $K_2(m)$ 剖分和 $J_2(m)$ 剖分	42
§ 3 Kuhn 人为始点算法	47
§ 4 Kuhn 变维数算法	58
§ 5 Brouwer定理的构造性证明	64
第三章 重复开始算法	67
§ 1 不动点算法的发展	67
§ 2 Merrill重复开始算法	72
§ 3 三明治算法	76
第四章 单纯同伦算法	88
§ 1 同伦	88
§ 2 渐细单纯剖分	92
§ 3 单纯同伦算法	104
§ 4 关于零点的算法	110
第五章 变维数重复开始算法	113
§ 1 单纯形自映射问题	113
§ 2 欧氏空间自映射问题	123

第六章 不动点定理的推广及应用	132
§ 1 集值映射及其半连续性	132
§ 2 Kakutani不动点定理	138
§ 3 凸函数的次微分	144
§ 4 非线性规划问题	150
§ 5 非线性互补问题	154
§ 6 经济平衡问题	158
第七章 向量标号算法	164
§ 1 向量标号法与全标单纯形	164
§ 2 基础可行解与完备单纯形	170
§ 3 Eaves算法	175
§ 4 Merrill 重复开始算法	188
§ 5 Eaves-Saigal 单纯同伦算法	199
第八章 多项式全部零点的 Kuhn 算法	204
§ 1 Kuhn 算法	204
§ 2 收敛性的证明	214
§ 3 复杂性讨论	226
§ 4 超越函数零点计算	232
附录 1 不动点算法的组合基础	243
附录 2 同伦算法的几何理论	248
参考文献	254
主要符号	261
名词索引	263

第一章

欧氏空间自映射不动点的一种算法

这一章将首先提出欧氏空间非负象限连续自映射不动点的一种算法。假定读者熟悉欧氏空间的下述概念：开集、闭集、子集的内点和内部、子集的聚点和闭包、子集的边界。此外，要使用集合的并、交、差符号。设 A_σ , $\sigma \in A$ 是一族集合，它们的并记作 $\bigcup_{\sigma \in A} A_\sigma$ ，它们的交记作 $\bigcap_{\sigma \in A} A_\sigma$ 。特别，两个集合 A 和 B 的并集记作 $A \cup B$ ，交集记作 $A \cap B$ 。集合 A 对集合 B 的差集记作 $A \sim B$ （而不是 $A - B$ ），也就是： $x \in A \sim B$ 当且仅当 $x \in A$ 但 $x \notin B$ 。

§1 欧氏空间连续自映射及其不动点

应用数学和纯粹数学的许多问题都可以表示为寻求不动点的问题。

读者已经熟悉欧氏空间的基本概念。 $x \in \mathbb{R}^n$ 或 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 既表示 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中各坐标分量为 $x_1, \dots, x_n$ 的点，也表示从原点到这个点的向量。这里上标 T 表示矩阵的转置，也就是说， $\mathbb{R}^n$ 中的向量一般指的是列向量。在不致混淆时，我们也可以把表示转置的上标 T 省去，但一般仍理解为列向量。值得注意的是，本书采用现代数学文献中常用的方式，不从字母字体上区分向量和标量，也不采用字母上加箭头的向量表示。一个量是向量还是标量，按其出现方式或按上下文是明显的。

设 X 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集。如果对于 X 的每一点 x ，都确定了 X 的一点 $f(x)$ 与之对应，就说 f 是从 X 到自身的一个映射，或者说 f 是 X 的一个自映射，记作 $f: X \rightarrow X$ 。这时，如果 X 的一点 x 使得 $f(x) = x$ ，即点 x 在自映射 f 的作用之下保持不动，就称 $x \in X$ 是自映射 $f: X \rightarrow X$ 的一个不动点。

读者容易利用连续函数的介值定理证明，实数轴上 $[0, 1]$ 区间的连续自映射必有不动点。

设 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个自映射，对于 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ，其映射值向量 $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 可以表示为

$$g(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)).$$

称 $x \in \mathbf{R}^n$ 为 g 的一个零点，如果 x 被映射 g 送到 $\mathbf{R}^n$ 的原点，即 $g(x) = 0$ 。由此可知， x 是映射 g 的零点，也就是说 x 使映射 g 取值为零。

我们经常遇到的解方程组

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

的问题，就是求 $\mathbf{R}^n$ 的自映射 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的零点的问题。这时，按照 $f(x) = x + g(x)$ 即

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + g_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n + g_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

定义 $\mathbf{R}^n$ 的自映射 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ，就将求 g 的零点的问题化成了等价的求 f 的不动点的问题。事实上，如果 x 是 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的不动点，就有 $x = f(x) = x + g(x)$ ，所以 $g(x) = 0$ ，即 x 是 $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的零点。反之，如果 x 是 g 的零点，就有 $g(x) = 0$ ，所以 $f(x) = x + g(x) = x$ ，即 x 是 f 的不动点。

这是不动点问题普遍意义的一个简单说明。

n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所有坐标分量均非负的点组成的子集称为

$\mathbb{R}^n$ 的非负象限^{*}, 记作 $\mathbb{R}_+^n$. 也就是

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

这一章将专门讨论 $\mathbb{R}_+^n$ 的连续自映射 $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ 的不动点的计算问题, 其中关于 f 的连续性的概念是读者在多元微积分学中所熟悉的.

问题已经明确, 要找 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 使得 $f(x) = x$. 但这在数值计算中一般是难以做到的, 道理和数字电子计算机不能给出简单方程 $t^2 - 2 = 0$ 的精确解一样. 为此, 我们引进 ε -不动点的概念. 设 $\varepsilon > 0$, 称 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 是 $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ 的一个 ε -不动点, 如果 $|x - f(x)| < \varepsilon$. 这里, $|x - f(x)|$ 表示 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $x - f(x)$ 的模, 即

$$|x - f(x)| = ((x_1 - f_1(x))^2 + \dots + (x_n - f_n(x))^2)^{1/2}.$$

映射的 ε -不动点亦常称为映射的近似不动点, 与此相对应, 使得 $x = f(x)$ 的不动点则可以特别称为映射 f 的精确不动点. 注意按照定义, x 是 f 的 ε -不动点指的是 x 与它的映射象 $f(x)$ 的距离小于 ε , 而不是说 x 与 f 的某个精确不动点的距离小于 ε .

这样, 我们从数值计算的角度重新提出寻找 $\mathbb{R}_+^n$ 的连续自映射 $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ 的不动点的问题: 任意给定 $\varepsilon > 0$, 要找 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 使得 $|x - f(x)| < \varepsilon$. 为此, 本章将提出一种算法, 证明算法的可行性, 并且证明只要 f 符合一定条件, 上述要求即可在有限步内达到.

^{*}我们不采用卦限的说法.

为避免一开始就陷入技术细节，这一节先就 $n=2$ 的简单情形阐述算法。

现在， $\mathbf{R}_+^2$ 就是欧氏平面的非负象限。算法的思想是：对欧氏平面（的非负象限）进行细致的三角剖分，寻求这样一种三角形，在映射 f 作用下，它的一个顶点的第一个坐标分量下降，另一个顶点的第二个坐标分量下降，第三个顶点的两个坐标分量都保持不变。由于 f 的连续性，如果这种三角形的直径足够小，可望三角形三个顶点在映射 f 作用之下的变化情况不会相差太远。这时，两个顶点各有一个坐标分量下降，但第三顶点两个坐标分量都保持不变的性质使得三顶点各坐标分量的变动都不会大，所以每个顶点都是某种程度的近似不动点。

下面就着手去做。

取定 $h>0$ 。用三族直线

$$\begin{aligned} &\{x_1 = mh, m \text{ 为整数}\}, \\ &\{x_2 = mh, m \text{ 为整数}\}, \\ &\{x_2 = x_1 + mh, m \text{ 为整数}\} \end{aligned}$$

将 $\mathbf{R}_+^2$ 分割成一个个三角形，得到 $\mathbf{R}_+^2$ 的一个三角剖分。显然，相邻的两个三角形有一条公共棱（公共边）。另外，位于 x_1 轴和 x_2 轴即位于 $\mathbf{R}_+^2$ 边界的棱都只是一个三角形的棱，而其余每条棱都正好是两个相邻三角形的公共棱。

设 x 是剖分中的一个顶点，即设 x 是剖分中的某个三角形的一个顶点，确定 x 的整数标号如下：

$$l(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } f_1(x) - x_1 \geq 0, f_2(x) - x_2 \geq 0, \\ 1, & \text{若 } f_1(x) - x_1 < 0, f_2(x) - x_2 \geq 0, \\ 2, & \text{若 } f_2(x) - x_2 < 0. \end{cases}$$

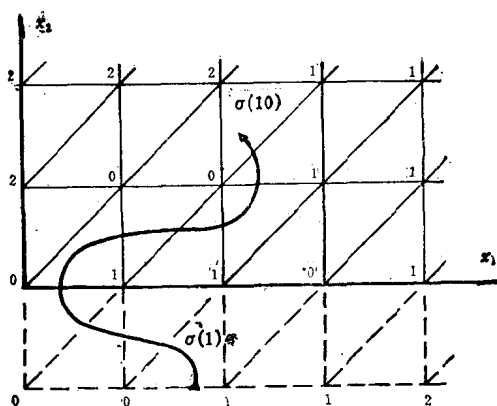


图1-1

由于 f 是 $\mathbb{R}_+^2$ 的自映时, 所以 x_1 轴上的顶点因 $x_2 = 0$ 其标号都不是 2, x_2 轴上的顶点因 $x_1 = 0$ 其标号都不是 1. 特别是, 原点的标号必定是 0. 现在叙述算法.

首先, 将 $\mathbb{R}_+^2$ 的三角剖分扩张到 $\widetilde{\mathbb{R}}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq -h\}$. 对于新出现的顶点, 采用不依赖于映射 f 的人为标号如下: 选定一个新顶点, 令该顶点及它左面的新顶点都取标号 0, 其余新顶点都取标号 1. 这时, $\widetilde{\mathbb{R}}_+^2$ 的边界的 $x_1 = 0$ 处没有标号 1 的顶点, $x_2 = -h$ 处没有标号 2 的顶点, 顶点 $(0, -h)$ 的标号为 0.

剖分中的三个顶点的标号都不相同的三角形, 称为全标三角形, 或完全标号三角形, 因为它的三个顶点正好分别取得 0, 1, 2 全部三种标号. 三个顶点取到 0, 1 两种标号的三角形, 称为几乎全标三角形. 按照定义, 全标三角形当然是几乎全标三角形. 反之不然, 因为几乎全标三角形可能因缺少标号为 2 的顶点

而不成为全标三角形。两个顶点正好分别取 0, 1 两种标号的棱, 称为几乎全标棱。根据上面讲的 $\widetilde{R}_+^2$ 的标号法, 易知 $\widetilde{R}_+^2$ 的边界上有且只有一个几乎全标棱。计算就从 $\widetilde{R}_+^2$ 边界上唯一的几乎全标棱开始, 通过不损失标号的同标号顶点顶替, 希望找到一个全标三角形。

算 法

步0 记 $\widetilde{R}_+^2$ 边界上唯一的几乎全标棱为 $\tau(0)$, 剖分中以 $\tau(0)$ 为一条棱的唯一的三角形为 $\sigma(1)$, $\sigma(1)$ 的不在 $\tau(0)$ 的顶点为 $x^+(1)$ 。置 $k := 1$ 。

步1 计算 $l = l(x^+(k))$ 。如果 $l = 2$, $\sigma(k)$ 就是要找的全标三角形, 于是取 $x^+(k)$ 为 f 的一个近似不动点, 停机。否则, 记 $\sigma(k)$ 的另一个标号也是 l 的顶点为 $x^-(k)$, $\sigma(k)$ 的与 $x^-(k)$ 相对的棱为 $\tau(k)$ 。这时, 记剖分中与 $\sigma(k)$ 共有几乎全标棱 $\tau(k)$ 的唯一的三角形为 $\sigma(k+1)$, 其不在 $\tau(k)$ 的顶点为 $x^+(k+1)$ 。置 $k := k+1$, 回到步1。

很容易说明, 按照这个算法, 只要未找到全标三角形, 计算就可以一直进行下去。事实上, 计算走到的三角形, 都是几乎全标三角形。因为只要 $\sigma(k)$ 是几乎全标三角形而不是全标三角形, 它的三个顶点就有且只有 0 和 1 两种标号, 所以一定有一对顶点标号相同, 所以它正好有一对几乎全标棱, 其中之一当 $k = 1$ 时是 $\tau(0)$, 当 $k > 1$ 时是 $\sigma(k)$ 与 $\sigma(k-1)$ 的公共棱 $\tau(k-1)$, 而另一个是 $\tau(k)$, 且 $\tau(k)$ 必不在 $\widetilde{R}_+^2$ 的边界上。所以, 根据 $\widetilde{R}_+^2$ 的上述三

角剖分的性质，剖分中必有唯一的三角形 $\sigma(k+1)$ 与 $\sigma(k)$ 共有公共棱 $\tau(k)$ ，当然 $\sigma(k+1)$ 是几乎全标三角形。上述讨论对所有正整数 k 都成立，这就给出了本节 $\mathbf{R}_+^2$ 连续自映射不动点算法的可行性的证明。以后将会看到，这个证明与§4的一般情形的严格论证是一致的。

请读者在图1·1上按照上述算法把计算所走过的几乎全标三角形 $\sigma(1), \sigma(2), \dots$ 一个个标出来，这可以帮助掌握算法。如果将图1·1中 $x_2 = -h$ 处顶点的人为标号改为左边三个顶点标号为0而其余顶点标号为1，计算又将如何进行？读者不妨多做几种情形的练习。

对于 $\mathbf{R}_+^2$ 的连续自映射 f 来说，上述不动点算法计算的收敛性，即能否在有限步内找到全标三角形，主要是取决于 f 本身的，例如设 $\mathbf{R}_+^2$ 的连续自映射 $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+^2$ 由 $f(x) = x + 1$ 给出， f 就没有不动点，也谈不上近似不动点。我们在§5将对 f 提出保证计算收敛的一个充分条件。

§2 单纯剖分的一般概念

首先引入单纯形及其重心坐标的概念。下面是一系列定义，它们都比较初等。

定义2.1 设 $x^0, \dots, x^p \in \mathbf{R}^m$ 。当诸 λ_i 均为实数时，称 $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x^i$ 为诸 x^i 的一个线性组合。如果进一步诸 λ_i 满足 $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ 时，称 $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x^i$ 为诸 x^i 的一个仿射组合。如果诸 λ_i 均非负并且满足 $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ 时，称 $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x^i$ 为诸 x^i 的一个凸组合。

定义2.2 $\mathbf{R}^m$ 的子集 C 称为是凸集, 如果 C 中任意有限个点的所有凸组合仍在 C 中. $\mathbf{R}^m$ 的子集 C 称为是 $\mathbf{R}^m$ 的一个仿射子空间, 如果 C 中任意有限个点的所有仿射组合仍在 C 中.

例2.1 设 x^0 和 x^1 是欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上由两个以原点为起点的不共线向量确定的点, 那末, x^0 与 x^1 的所有线性组合填满全平面, 它们的所有仿射组合构成经过 x^0 与 x^1 的直线, 它们的所有凸组合构成以 x^0 和 x^1 为端点的线段.

定义2.3 设 A 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个子集. 称 A 的所有有限凸组合的集合为 A 的凸包, 记作 $\text{conv}(A)$. 这时, A 的所有有限仿射组合的集合是 $\mathbf{R}^m$ 的一个仿射子空间, 称为 A 的仿射包, 记作 $\text{aff}(A)$.

定义2.4 设 $C \subset \mathbf{R}^m$ 是一个凸集, 点 $c \in C$. 易知, 将 $\text{aff}(C)$ 按向量 $-c$ 平移所得的仿射子空间 $\text{aff}(C) - \{c\} = \{x - c | x \in \text{aff}(C)\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个线性子空间, 并且只要 $c' \in C$, 就有 $\text{aff}(C) - \{c\} = \text{aff}(C) - \{c'\}$. 定义凸集 C 的维数 $\dim C$ 为 $\mathbf{R}^m$ 的线性子空间 $\text{aff}(C) - \{c\}$ 的维数, 只要 $c \in C$. 为方便起见, 约定空集的维数为 -1 , 即规定 $\dim \emptyset = -1$.

因为欧氏空间的仿射子空间都是凸集, 上面也就给出了欧氏空间任意子集 A 的仿射包 $\text{aff}(A)$ 的维数的定义.

定义2.5 $\mathbf{R}^m$ 中 $p+1$ 个点 $x^0, \dots, x^p$ 称为是仿射无关的, 如果当 $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$ 和 $\sum_{i=0}^p \lambda_i x^i = 0$ 时必有 $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$. 这时也说 $x^0, \dots, x^p$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中占有最广位置的 $p+1$ 个点.

例如, 不共线的三个点仿射无关, 不共面的四个点仿射无关, 等等. 容易证明, $p+1$ 个点 $x^0, \dots, x^p$ 仿射无关的充要条件是 p 个向量 $x^1 - x^0, \dots, x^p - x^0$ 线性无关, 又等价于 p 个向量 $x^p - x^{p-1}, x^{p-1} - x^{p-2}, \dots, x^1 - x^0$ 线性无关. 此外很明显, $\mathbf{R}^m$ 中 $p+1$ 个点仿射无关的一个必要条件是 $p \leq m$.

在欧氏空间的上述概念的基础上, 现在建立单纯形及其重心

坐标的概念.

定义2.6 $\mathbb{R}^m$ 中 $p+1$ 个仿射无关的点 $x^0, \dots, x^p$ 的凸包是一个 p 维闭单纯形, 记作 $[x^0, \dots, x^p]$, 以 $x^0, \dots, x^p$ 为它的 $p+1$ 个顶点.

这样, 我们有表达式 $[x^0, \dots, x^p] = \{x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x^i \mid \lambda_i \geq 0, i=0, \dots, p; \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1\}$.

定义2.7 设 $x^0, \dots, x^p$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中 $p+1$ 个仿射无关的点. 称 p 维闭单纯形 $[x^0, \dots, x^p]$ 在其仿射包 $\text{aff}([x^0, \dots, x^p])$ 中的相对内部为一个 p 维单纯形, 记作 $\langle x^0, \dots, x^p \rangle$. 这时, 仍称 $x^0, \dots, x^p$ 是单纯形 $\langle x^0, \dots, x^p \rangle$ 的 $p+1$ 个顶点, 虽然除 $p=0$ 的情形外, 单纯形的顶点已不在单纯形上了.

欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的子集 P 在其仿射包 $\text{aff}(P)$ 中的相对内部, 指的是集合 $\{x \in P \mid \text{存在 } \varepsilon > 0 \text{ 使得 } B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(P) \subset P\}$, 其中 $B(x, \varepsilon)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中以 x 为中心的半径 ε 的闭球. 这样, 我们有表达式

$$\langle x^0, \dots, x^p \rangle = \{x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x^i \mid \lambda_i > 0, i=0, \dots, p; \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1\}.$$

注意, 如无特别声明, 本书中所说的单纯形都指上述定义中相对开的单纯形, 这是与一些著作中的说法不同的. 例如, 0 维单纯形 $\langle x^0 \rangle$ 就是一个点的集合, 这是与 $[x^0]$ 一样的. 但 1 维单纯形 $\langle x^0, x^1 \rangle$ 是以 x^0 和 x^1 为端点的开线段, 2 维单纯形 $\langle x^0, x^1, x^2 \rangle$ 是以 x^0, x^1, x^2 为顶点的三角形的相对内部, 3 维单纯形 $\langle x^0, x^1, x^2, x^3 \rangle$ 是以 x^0, x^1, x^2, x^3 为顶点的四面体的相对内部, 即剥去“外皮”, 这都是与相应的闭单纯形不同的. 在本书中, 单纯形常用希腊字母 σ, τ 等表示, 而相应的闭单纯形就可用 $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ 等表示, 因为单纯形的闭包就是相应的闭单纯形.

容易验证, 定义2.6和2.7中关于单纯形的维数的说法, 与单纯形作为凸集按定义2.4所确定的维数一致. 所以我们也用 $\dim \sigma$