经济应用数学基础

（微积分）

冷志魁 张雪琴

东 南 大 学 出 版 社

序　　言

近来，江苏省财经类成人教育发展迅速，但却由于缺少适合的经济数学教材，给众多夜大、函大学员带来诸多不便。江苏财经高等专科学校冷志魁副教授和张雪琴讲师共同编写了《经济应用数学基础》一书，对解决我省财经类成人教育中缺乏专用数学教材的矛盾，提高教学水平，发展成教事业，将产生积极的作用。

马克思认为，一种科学，只有成功地运用数学时才达到了真正完善的地步。我们只有将数学这一精确有效的工具，成功地运用于经济管理领域，才能真正提高经济效益，实现经济管理的科学化、现代化。这就要求我们新一代经济科学工作者、经济管理工作者，更多更好地掌握经济领域中常用的数学知识和数学方法。这对实现我省经济管理科学化和现代化，促进我省经济深入持久地发展，将起一定的作用，这也正是该经济数学教材出版的真正目的。

统观全书，在内容上由浅入深，在写法上通俗易懂，既保持了数学理论的系统性，又重点突出了数学方法在经济领域中的各方面应用，在严格性、通俗性和应用性方面全面兼顾，恰到好处。

本书十分注重与经济学科的实际相联系，与后继专业课程的需要相联系，广泛涉及到生产成本、经济利润、商品需求、价格弹性及边际分析等常用的经济概念，并从数学角度给以定量描述与分析计算，便于经济工作者随时参考查阅。写出了一定的水平和特色，是一本较好的成人教育用书。对广大经济财会干部充实数学基础知识也不无裨益。

对本书的出版发行，顺致热诚的祝贺。

花学道

一九九八年十月

编 者 说 明

《经济应用数学基础》一书，是编者为适应我省成教事业的发展需要而编写的一本财经类成人大专通用数学教材。

本书从函数、极限等基本内容出发，既保持了与中学数学的衔接和连续，又逐步加深，引入了微分、积分等基本概念。本书重点是一元函数微积分学及其经济应用，但为方便广大读者结合自身需要作进一步的自学，又对无穷级数、多元函数微积分、微分方程和差分方程作了简单介绍。本书在编写时力求深入浅出，通俗易懂。既考虑高等数学内容上的系统性，又注意到成人教学的特点与重点，同时力求适应经济工作实际的需要。

本书不仅可作为各种财经类成人大专的教学用书，还可供广大经济干部及财会人员自学及参考时使用，欢迎更多的读者踊跃选用。

本书受江苏财经高等专科学校成人教育处委托编写。全书共分十章：第一、二、三、七、九章由张雪琴编写，其余各章由冷志魁编写。

本书的出版发行，得到了江苏省财政厅领导的热情关怀和大力支持，在此，作者谨致以最诚挚的谢意。

由于编者水平有限，成书仓促，错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

1998 年 10 月

目　录

第一章　函数

微积分学是微分学与积分学的统称，这门研究变量的数学是在十七世纪末期发展起来的，在自然科学及社会科学的许多领域中有着广泛的应用．函数是微积分研究的主要对象，在初等数学里，已经接触过函数的概念，但那时对函数并不是作为主要研究对象提出来的．在学习微积分内容之前，我们先在本章中扼要地介绍函数，以及必要的准备知识．

§1.1　集合

一、集合的概念

集合简称集，是一个难于精确定义的基本的数学概念．通常可把所考察的各个确定的对象汇总称为一个集合，而每个考察对象都称为这个集合的元素．例如，全体自然数汇总起来就是一个集合，其中每个自然数就是这一集合的元素．又如，直线上的所有点汇总起来就是一个集合，其中每个点就是这个集合的元素．

集合一般用大写的拉丁字母表示，即 $A,B,C,\cdots$．元素用小写的拉丁字母表示，即 $a,b,c,\cdots$．

集合常用的表示法有列举法和描述法两种．

用列举法表示集合，是将组成集合的所有元素一一列举在一个大括号内，且列举时不计较元素的排列顺序．例如，集合

$$A=\{3,8\},\ B=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$C=\{-1,0,1\},\quad D=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots\right\}$$

分别是由有限个元素或无限个元素组成的集合．

用描述法表示集合，是把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内．一般的描述方法是：

$$\{x \mid x\text{ 具有的性质}\}$$

例如：

$$A=\{(x,y)\mid y-x=0\}$$

表示 $y=x$ 上的所有点构成的集合．

$$B=\{x\mid x\leqslant 1\}$$

表示所有 x 小于等于 1 的数．

设 a 是集合 A 的元素，就称集合 A 含有元素 a，或称 a 属于 A，记为 $a\in A$，其中记号“$\in$”

读作“属于”. 符号 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不属于 A，其中记号“$\overline{\in}$”读作“不属于”.

我们把不含有任何元素的集合称为空集，记为 ϕ. 例如 $\{x \mid x^2 < 0 \text{且} x \text{为实数}\} = \phi$.

二、集合之间的关系

定义 1.1 如果集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A \subset B$，读作“集合 A 包含于集合 B 中”或“集合 B 包含集合 A”.

定义 1.2 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A = B$.

例如：
$$N = \{x \mid x \text{为自然数}\}$$
$$R = \{x \mid x \text{为实数}\}$$
由于每个自然数也是实数，所以 $R \supset N$.

再如：
$$A = \{x \mid x(x-1) < 0\}$$
$$B = \{x \mid 0 < x < 1\}$$
因为集合 A 与集合 B 都是由一切小于 1 的正数组成的集合，所以 $A = B$.

关于子集有下列结论：

1. $A \subset A$，即集合 A 是自己的子集.
2. 对于任意集合 A，$A \supset \phi$，即空集是任何集合的子集.
3. 如果 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$，集合包含关系满足传递性.

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U.

应注意全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集.

例如对学生进行体检，则全体学生构成的集合为全集，如果只对女生进行体检，则此时全体女生组成的集合就是全集.

三、集合的运算

定义 1.3 由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A \cup B$.
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$
例如：
$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B = \{7,8,9,10\}$$
则
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

定义 1.4 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

两个集合的并与交可借助称之为文氏(Venn)图的图形表示. 在图 1.1 中分别用两个由封闭曲线围成的平面点集表示集合 A 与集合 B，则图 1.1(a) 和图 1.1(b) 中阴影部分依次表示 A 与 B 的并集和交集.

举例来说，若记 $A = \{x \mid x \text{为正整数}\}$，$B = \{x \mid x \text{为正奇数}\}$，$C = \{x \mid x \text{为正偶数}\}$，则
$$A \cup B = A,\ A \cap B = B,\ B \cap C = \phi.$$
一般地，集合的并及交满足下列运算规则：

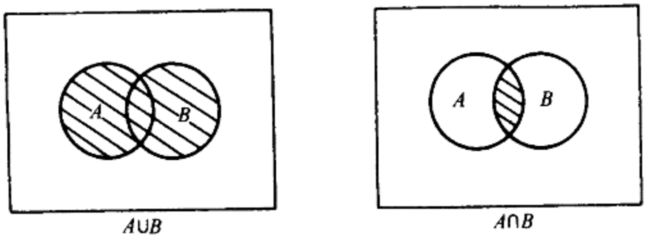

图 1.1

1. 交换律　$A \cup B = B \cup A$

　　　　　$A \cap B = B \cap A$

2. 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

　　　　　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

　　　　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

定义 1.5　设有集合 A 和 B,属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记为 $A - B$.如图 1.2 的阴影部分.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

例如:

$$A = \{\text{红,白,黑}\}$$

$$B = \{\text{红,黄,兰}\}$$

则

$$A - B = \{\text{白,黑}\}$$

定义 1.6　全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记为 $\bar{A}$,如图1.3.即

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

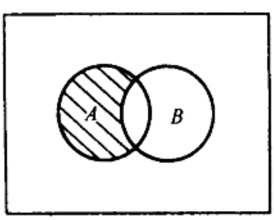

图 1.2

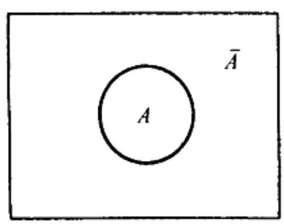

图 1.3

A 与 $\bar{A}$ 具有下列性质:

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

例如:设

$$U = \{x \mid x \text{ 为产品}\}$$

$$A = \{x \mid x \text{ 为合格品}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ 为不合格品}\}$$

显然

$$A \cup B = U, \quad A \cap B = \phi$$

所以 $B = \bar{A}$.

对于补集有下列性质：

摩根律 $$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B};$$
$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

四、区间与邻域

在微积分中，我们常常会涉及实数的种种区间，现在利用集合的符号定义如下：

设 a, b 是两个实数，且 $a < b$，

开区间：$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

闭区间：$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

半开区间：$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$

$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$

以上三类为有限区间，a, b 分别称为区间的左端点和右端点，$b - a$ 为区间长.

下面几类为无限区间：

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

在微积分中经常要用到邻域的概念，我们称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 或实数集

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域或简称 x_0 的邻域，如图 1.4 所示. x_0 是邻域的中心，δ 是邻域的半径.

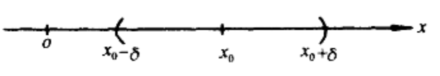

图 1.4

称 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，为“去心”邻域，就是从 x_0 的 δ 邻域内去掉 x_0 所得集合，如图 1.5 所示.

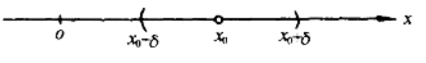

图 1.5

例如：

$$\{x \mid |x - 1| < 2\} = (-1, 3)$$

即为以 1 为中心，以 2 为半径的邻域.

$$\{x \mid 0 < |x - 2| < 2\} = (0,2) \cup (2,4)$$

即以 2 为中心，以 2 为半径的去心邻域.

§1.2 函数的概念

一、函数的概念

客观世界中的各种事物，不仅在运动、变化和发展着，而且它们的运动变化是有一定规律的，它们之间也是相互联系、相互依赖和相互制约的.这种依赖关系是产生数学中函数概念的实际背景.

函数是数学中，特别是微积分中极为重要的概念，微积分就是研究函数的数学科学.为了熟悉和加深对这一概念的理解，这里举几个关于两个变量之间依赖关系的例子.

例1 设物体在离地面 h 的高处下落，经过 t 秒后下落的距离为 S 米，根据物理学中已证实 S 与 t 之间有如下关系：

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g = 9.8\ \text{米}/\text{秒}^2)$$

利用这个算式就可以算出自由落体在已知时间内下落的距离.

例2 设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录，如图1.6所示.当已知时间 t_0 后，就可以在图上找出这个时间的温度 T.

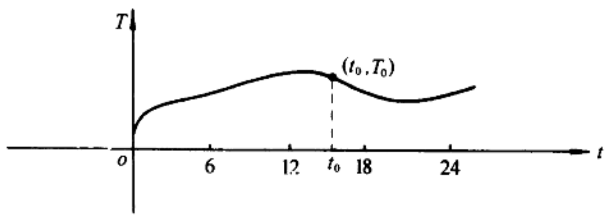

图 1.6

以上是两个不同的实例，但从纯量关系分析，却有相同的特征.它们都有一个确定的对应关系，使一个数集按着这个对应关系对应着另一个数集.对这个共同的特征进行数学抽象，便可得函数概念.

定义1.7 若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数.记为 $y = f(x), x \in D$，x 称为自变量，y 称为因变量.

自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，与 x 值对应的 y 值称为函数值，全体函数值的集合称为函数的值域.当自变量 x 在定义域内取某一值 x_0，函数 y 对应值记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.定义域和值域往往用区间表示.

函数概念反映着自变量和因变量之间的依从关系，它涉及到定义域，对应规则和值域.显然，只要定义域和对应规则确定了，值域也就随之确定了.因此，定义域和对应规则是确定函数关系的两个要素，两个函数只要定义域和对应规则都相同，那么这两个函数就相同，否

则,这两个函数就不相同.

例如:$y=1$与$y=\sin^2x+\cos^2x$是同一个函数,因为对应规则与定义域是相同的.而$y=\sin x$与$y=\frac{x\sin x}{x}$却不是同一个函数,因为它们的定义域显然不同.

通常我们往往只给出了函数表达式$y=f(x)$,而没有指明其定义域,这时函数的定义域就是使这一"式子"有意义的自变量x所取值的全体.这时定义域可理解为存在域.

例如:$y=\sqrt{x-1}$,定义域应是使式子$\sqrt{x-1}$有意义的实数x的全体,即$x\geqslant 1$.在实际问题中函数的定义域还要受问题的实际意义的制约.

注意:(1) 函数的定义域不能是空集.

(2) 由函数定义,规定对于x的每一个值,y都有唯一确定的数值与之对应,我们称这种函数为单值函数.本书只讨论单值函数.

二、函数的表示法

函数的表示法是多种多样的,它反映了各种变量与变量之间关系的不同体现法.函数常用的表示方法有如下三种:

1. 公式法:用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系,叫做公式法.

公式法的优点是简单准确,便于理论分析.例如:$y=\sin x$, $y=\sqrt{x^2+1}$等等.

2. 表格法:在实际应用中,常将一系列自变量与对应的函数值列成表.它的优点是可以直接从自变量查对应的函数值.统计数据、经济分析等各种因素之间的关系,就是常用表格形式反映的,以便从中找出规律.

3. 图示法:函数$y=f(x)$在其定义域内取一个数x时,相应地就得到一个y值,在平面直角坐标系xoy中就以x,y为坐标确定一个点$M(x,y)$,当x在定义域内变化时,$M(x,y)$就在平面上运动并描出一条曲线,这条曲线叫做函数$y=f(x)$的图像.因此,函数也可以由平面上的曲线表示,这种表示函数的方法叫做图示法.它的优点是直观.它将抽象的数量关系,用能够看得见的图形表示出来,更清楚地表示自变量与其函数之间的依赖关系.

以上三种方法是最常用的表示法,根据三者的特点,通常可以结合使用.

三、分段函数

一个函数在其定义域内不同部分用不同的公式表示,这种函数称为分段函数.

例如:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$$

是定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数.

对分段函数求函数值时要注意自变量的取值范围,当x属于哪个集合时,就用该集合对应的式子计算.

如上例

$$f(1)=(x^2+1)\big|_{x=1}=2$$

$$f(-1)=(x-1)\big|_{x=-1}=-2$$

应当注意,分段表示的函数是用几个公式合起来表示一个函数,不能理解为几个函数.

经济分析当中函数常用分段函数表示.

§1.3 建立函数关系

这里主要介绍一些经济上常用的函数.

例1 某产品年产量为 x 台,每台售价200元,当年产量不超过500台时,可以全部售出;当年产量超过500台时,每台削价20元,可以再多出售200台;生产再多时,本年就售不出去了.试将本年销售总收入 R 表示为产量 x 的函数.

解 设总收入函数为 $R(x)$(单位:元),则

$$R(x)=\begin{cases}200x & 0\leqslant x\leqslant 500\\ 200\times 500+180(x-500) & 500<x\leqslant 700\\ 100000+180\times 200 & x>700\end{cases}$$

可见年产量为 x 台时,销售总收入 $R(x)$ 是以分段函数的形式表示的.

例2 已知生产某商品 x 单位时,总收入 $R(x)=200x-\dfrac{x^2}{100}$(元),试写出生产 x 单位时的平均单位收入?如果这种商品的单位成本是100元,求总利润 $L(x)$?

解 平均单位收入应是

$$\frac{R(x)}{x}=200-\frac{x}{100}\quad(\text{元/单位})$$

设成本函数为 $C(x)$,由题意得 $C(x)=100x$(元),利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=100x-\frac{x^2}{100}(\text{元})\quad(x\geqslant 0)$$

例3 设每只手表的价格为70元时,销售量为10 000只;若手表价格每只提高3元,需求量就减少3 000只.假设为线性需求,求需求函数.

解 设 Q 表示手表的需求量,P 表示手表的价格,则

$$Q=10\,000-\frac{P-70}{3}\times 3\,000=1\,000(80-P)$$

从这个关系式可看出,手表的价格不能等于或超过80元,否则没有销路.

例4 某工厂生产某种产品,年产量为 a 台,分若干批生产,每批生产准备费为 b 元.设产品均匀投入市场,即平均库存量为批量的一半.每年每台产品库存费为 c 元.显然,生产批量大,则库存费增高,生产批量小则批数增多,因而生产准备费增多.为了选择最优批量,试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数的关系.

解 设批量为 x 台,生产准备费与库存费的和为 $P(x)$,则由题意可得

$$P(x)=\frac{a}{x}\cdot b+\frac{x}{2}\cdot c\qquad x\in(0,a]$$

因为 x 为批量数,所以 x 只应取$(0,a]$中的整数.

§ 1.4　函数的几种简单性质

一、函数的有界性

定义 1.8　设函数 $y = f(x)$ 定义在数集 D 上,如果存在数 $M > 0$,对任意 $x \in D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界;如果不存在这样的 M,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

特别地,若存在数 p(或 q),对任意的 $x \in D$,有 $f(x) \leqslant p$(或 $f(x) \geqslant q$),则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有上界(或有下界).

显然,函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界是指既有上界又有下界.

例 1　$y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,因为对于任意实数 x,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$.

例 2　$y = \frac{1}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有下界,因为对任意 $x \in (1, +\infty)$,都有 $\frac{1}{x-1} > 0$.

二、函数的单调性

定义 1.9　设函数 $y = f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果对 D 中任意两点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加(或单调减少),也称函数在 D 上是单调的.如果 D 为区间,则称 D 是关于 $y = f(x)$ 的单调区间.

单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图 1.7.单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1.8.

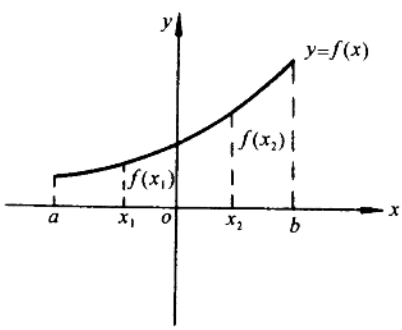

图 1.7

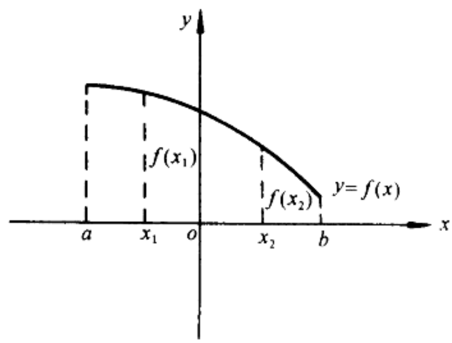

图 1.8

例 3　证明 $y = x^3$ 在实数域 R 上是单调增加的.

证:对任意 $x_1, x_2 \in R$, 设 $x_1 < x_2$,有 $x_1^3 < x_2^3$,因此有 $f(x_1) < f(x_2)$,所以 $y = x^3$ 在 R 上是单调增加的.

有些函数在定义域上并不是单调的,但在部分区间上是单调的.例如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少,在 $(0, +\infty)$ 内单调增加,在实数域 R 上不是单调的.

三、函数的奇、偶性

定义 1.10 设 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,如果对于所有 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是偶函数(或奇函数).

例如 $y=\sin x$ 在 R 上是奇函数,因为 $\sin(-x)=-\sin x$.

$y=\cos x$ 在 R 上是偶函数,因为 $\cos(-x)=\cos x$.

对于偶函数 $y=f(x)$,因为 $f(-x)=f(x)$,所以点 $P(x,f(x))$ 如果在图形上,则与之对称于 y 轴的点 $P'(-x,f(x))$ 也在图形上,因此偶函数的图形关于 y 轴对称.同理,可知奇函数的图形关于原点对称.

四、函数的周期性

定义 1.11 设函数 $y=f(x)$ 定义在数集 D 上,如果存在正数 T,对于任意 $x\in D$,使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 在 D 上是周期函数.

满足 $f(x)=f(x+T)$ 的最小正数 T 称为函数的一个周期.如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期,则 $2T$ 也是 $f(x)$ 的周期,且 nT 也是 $f(x)$ 的周期.

例如:$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

§1.5 反函数、复合函数、隐函数

一、反函数

定义 1.12 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,其值域为 Z,若对任意 $y\in Z$,有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应,其对应规则记作 f^{-1},这个定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数,或称它们互为反函数.

函数 $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域,其值域是反函数的定义域.

习惯上,x 为自变量,y 为因变量,所以 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$,仍以 x 表示自变量,y 表示因变量,故记作 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Z$.

求 $y=f(x)$ 的反函数,只是把 x 解出来,成为关于 y 的函数 $x=f^{-1}(y)$,然后把 x 与 y 互换即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.9.这在中学数学教材中已给出必要的证明.

例 1 求 $y=2x+1$ 的反函数.

解 因为

$$x=\frac{1}{2}(y-1)$$

所以 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$

一般来讲函数如果存在反函数,它必定是一一对应的函数关系,这是因为根据函数的定义,在定义域内有可能多个自变量同时对应一个函数值,它的反函数就为多值函数了,并非