全国高等院校硕士研究生入学试题解答

数学分析

1983—1984

天津科学技术出版社

全国高等院校硕士研究生入学试题解答

数学分析

（1983—1984）

林安浩　张国杰　王智青　编演

天津科学技术出版社

责任编辑：王定一

全国高等院校硕士研究生入学试题解答

数学分析

(1983—1984)

林安浩　张国杰　王智青　编演

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本 787×1092毫米 1/16 印张 18 字数 437,000

一九八五年十二月第一版

一九八五年十二月第一次印刷

印数：1—8,800

书号：13212·117　　定价：3.55元

前　言

《数学分析》的内容较多，其试题又多具综合的特点，因此往往成为硕士研究生入学考试准备的一个难点。我们搜集并解答了全国部分高等院校数学系各专业硕士研究生入学试题的《数学分析》部分，除了想为报考硕士研究生者提供一份有价值的参考材料外，也想对《数学分析》的教学有所帮助。

本题解选入1983年和1984年40所院、校、所的56份试卷约400多道试题，并依笔序编排。我们谨向提供试题的兄弟院校，向大力支持本书编演工作的天津科技出版社、天津师大校、系领导及数学系资料室和田国铭教授表示感谢。

限于时间和水平，所给解法不一定最佳，疏漏和错误也在所难免，敬请广大读者予以批评指正。

编　者

1985年3月于天津师大

目　录

山东师范大学

1984年运筹学专业

一、（10分）设$t_1, t_2 \cdots$是整数，且$0 < t_1 < t_2 < \cdots$，称级数$a_{t_1} + a_{t_2} + \cdots$为级数$a_1 + a_2 + \cdots$的子级数．试证：若级数的所有子级数都收敛，则此级数绝对收敛．

证明：令

$$u_n = \begin{cases} a_n, & (a_n > 0) \\ 0, & (a_n \leqslant 0) \end{cases} \qquad w_n = \begin{cases} 0, & (a_n > 0) \\ -a_n, & (a_n \leqslant 0) \end{cases}$$

当然$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-w_n)$是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的子级数，故收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$也收敛，另一方面有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛．

二、（15分）设S_1，S_2，$\cdots$，S_n，$\cdots$是收敛序列，试证从该序列中可以挑选出一个子列，它的项是某个绝对收敛级数相续的部分和．

证明：设$S_n \to A$，则必有子列$\{S_{n_k}\}$满足

$$S_{n_1} < S_{n_2} < \cdots < S_{n_k} < \cdots,\quad S_{n_k} \to A,\quad (k \to \infty)$$

或者

$$S_{n_1} > S_{n_2} > \cdots > S_{n_k} > \cdots,\quad S_{n_k} \to A.\ (k \to \infty)\ .$$

不妨假设前者成立．现令$a_1 = S_{n_1}$，$a_2 = S_{n_2} - S_{n_1}$，$\cdots a_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \cdots$，则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_i &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k \\ &= S_{n_1} + (S_{n_2} - S_{n_1}) + \cdots + S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \\ &= S_{n_k}. \end{aligned}$$

故$\{S_{n_k}\}$是级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$的部分和序列．

下证$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛．由上面的构造过程知当$n \geqslant 2$时$a_n > 0$，而

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = S_{n_k} \longrightarrow A,\quad (k \to +\infty)$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，从而绝对收敛．

三、（20分）试证：

1. $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$,

2. $\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

证明：1.因为

$$x^{-x}=e^{-x\ln x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!},$$

以及$|x\ln x|$的最大值（$0<x\leqslant 1$）为e^{-1}，所以

$$\left|(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}\right|\leqslant\frac{e^{-n}}{n!}.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n!}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}$一致收敛，从而

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x+\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x}{n!}\mathrm{d}x$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x.$$

用分部积分法得：

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{n}{n+1}x^n\ln^{n-1}x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{n+1}\int_0^1\ln^{n-1}x\cdot x^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\int_0^1\ln^{n-2}x\cdot x^n\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=(-1)^n\frac{n}{n+1}\cdots\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

由此推得：

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}.$$

2.因为

$$\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^n(-\ln x)^n\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(-1)^n x^n\ln^n x\mathrm{d}x.$$

由第1题知$\int_0^1 x^n \ln^n \mathrm{d}x = (-1)^n \dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$，所以

$$\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n \mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\cdot(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

四、（15分）$\varphi(t)$在〔m,M,〕上严格凸是指对〔m，M〕中每一对t_1，t_2，$t_1 \neq t_2$，均有

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2},$$

试证：若$\varphi(t)$在〔m，M〕上有定义，在〔m，M〕上$\varphi''(t)$存在且$\varphi''(t)>0$，则$\varphi(t)$为严格凸。

证明：由泰勒展开式有

$$\varphi(t_2)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)+\frac{\varphi''(\xi_1)}{2}\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)^2,$$

$$\varphi(t_1)=\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\varphi'\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)+\frac{\varphi''(\xi_2)}{2}\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \varphi(t_1)+\varphi(t_2)=2\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)^2\left(\varphi''(\xi_1)+\varphi''(\xi_2)\right).$$

由$\varphi''(x)>0$知：

$$\varphi(t_1)+\varphi(t_2)>2\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

也即

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)<\frac{\varphi(t_1)+\varphi(t_2)}{2}.$$

五、（15分）试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在点（0，0）的邻域中连续，且有有界的偏导函数$f_x'(x,y)$与$f_y'(x,y)$，但此函数在(0,0)不可微。

证明：由于

$$|f(x,y)-f(0,0)|$$

$$=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{|x\cdot y|}{|x|}=|y|,$$

所以当(x,y)充分接近于(0,0)时，$|y|$可任意小，从而$|f(x,y)-f(0,0)|$可任意小，故$f(x,y)$在(0,0)点连续。

显然当$x^2+y^2\neq 0$时，

$$f_x'(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\cdot y\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot 2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

而当$x^2+y^2=0$，即$(x,y)=(0,0)$时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\ .$$

并且，

$$|f_x'(x,y)|=\left|\frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right|\leqslant\frac{|y^3|}{|y^3|}=1\ .$$

从而$f_x'(x,y)$存在且有界.同理可证，$f'_y(x,y)$存在且有界.

下证$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

假设$f(x,y)$在$(0,0)$可微，则

$$\Delta f=f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(p),$$

其中$p=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.由于$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，所以，

$$\Delta f=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

另一方面，

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

$$\frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

而当(x,y)沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，

$$\frac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2}=\frac{1}{2}.$$

前后矛盾，所以$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.

六、（10分）试证：若S为封闭的简单曲面，$\vec{l}$为任何固定方向，则

$$\iint_S\cos(\vec{n},\vec{l})\,\mathrm{d}S=0,$$

式中的$\vec{n}$为曲面S的外法线.

证明：设$\vec{l}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，则

$$\begin{aligned}\cos(\vec{n},\vec{l})&=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\\&=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\frac{1}{|\vec{l}|}(x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k})\\&=\frac{x}{|\vec{l}|}\ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\vec{i}+\frac{y}{|\vec{l}|}\ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\vec{j}+\frac{z}{|\vec{l}|}\ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\vec{k}\\&=\frac{x}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},x)+\frac{y}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},y)+\frac{z}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},z).\end{aligned}$$

其中$\cos(\vec{n},x)$，$\cos(\vec{n},y)$，$\cos(\vec{n},z)$分别为$\vec{n}$与x,y,z轴夹角的余弦．x,y,z，$|l|$为常数，所以

$$\begin{aligned}&\iint_S\cos(\vec{n},\vec{l})\,\mathrm{d}S\\&=\oiint_{S外}\Big[\frac{x}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},x)+\frac{y}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},y)\\&\quad+\frac{z}{|\vec{l}|}\cos(\vec{n},z)\Big]\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

由奥-高公式得：

$$\iint_S \cos(\vec{n},\vec{j})\,dS = \iiint_V 0\,dudvdw = 0 .$$

七、（15分）设$f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$满足

i）$f(x+T)=f(x)$，

ii）$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，

iii）$\int_0^T f(x)\,dx = 0$，

求 证：$T\geqslant \frac{2}{L}\max\limits_{x\in[0,T]}|f(x)|$。

证明：由于$f(x)$连续，故可取$y(0\leqslant y\leqslant T)$，使$f(y)=\max\limits_{x\in[0,T]}|f(x)|$。对任意的$x\in[0,T]$，若$x>y$，则由条件ii）得：

$$\begin{aligned}T &= x+y+T-x-y = |x-y|+|y+T-x|\\ &\geqslant \frac{1}{L}\{|f(x)-f(y)|+|f(y+T)-f(x)|\}\\ &= \frac{1}{L}\{|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(x)|\}\\ &= \frac{2}{L}|f(x)-f(y)|.\end{aligned}$$

若$x<y$，则有

$$\begin{aligned}T &= x+y+T-x-y = |x+T-y|+|y-x|\\ &\geqslant \frac{1}{L}\{|f(x+T)-f(y)|+|f(y)-f(x)|\}\\ &= \frac{1}{L}\{|f(x)-f(y)|+|f(y)-f(x)|\}\\ &= \frac{2}{L}|f(x)-f(y)|.\end{aligned}$$

所以总有 $T\geqslant\frac{2}{L}|f(x)-f(y)|$成立。

对上式两边积分得：

$$\begin{aligned}\int_0^T T\,dx &\geqslant \frac{2}{L}\int_0^T|f(x)-f(y)|\,dx\\ &\geqslant \frac{2}{L}\left|\int_0^T[f(x)-f(y)]\,dx\right|\\ &= \frac{2}{L}\int_0^T f(y)\,dx\\ &= \frac{2}{L}\max_{x\in[0,T]}|f(x)|\cdot T.\end{aligned}$$

而$\int_0^T T\,dx = T^2$，从而得到

$$T\geqslant\frac{2}{L}\max_{x\in[0,T]}|f(x)|.$$

广 西 大 学

1983年基础数学专业

一、（13分）给定函数列$f_n(x)=\dfrac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^{x}}$（$n=2,3,4,\cdots$），试问当$\alpha$取何值时，

（a）$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上收敛，

（b）$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

解：（a）当$x=0$时，$f_n(0)=0$，$\therefore f_n(0)\to 0(n\to\infty)$．

当$x>0$时，对$\forall\alpha\in R$，$\dfrac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^{x}}\to 0(n\to\infty)$.

从而α取任何实数时，$\{f_n(x)\}$都在$[0,+\infty)$上收敛.

（b）$\because f'_n(x)=\dfrac{(\ln n)^{\alpha}(n^{x}-xn^{x}\ln n)}{n^{2x}}$

$$=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}\left(\dfrac{1}{\ln n}-x\right)}{n^{x}},$$

$\therefore$当$x=\dfrac{1}{\ln n}$时，$f'_n(x)=0$.

容易看出，当$x<\dfrac{1}{\ln n}$时，$f'_n(x)>0$；

当$x>\dfrac{1}{\ln n}$时，$f'_n(x)<0$．

$\therefore f_n(x)$在$x=\dfrac{1}{\ln n}$时达到极大值.

又$\because f_n(0)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$　$\therefore$当$x\in[0,+\infty)$时$f_n(x)$在$\dfrac{1}{\ln n}$点达到最大值.

但$f_n\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)=\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{n^{\frac{1}{\ln n}}}=\dfrac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}$，

可见当$\alpha\leqslant 1$时$f_n\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$收敛，而当$\alpha>1$时$f_n\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$发散到正无穷.

$\therefore$当$\alpha\leqslant 1$时$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛，当$\alpha>1$时$\{f_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

二、（22分）下述各论断哪些是正确的，请给出证明，哪些是错误的，请给出反例.

（a）若$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$．

（b）设$f(x)$在有界区间（a,b）内有定义，若对于（a,b）中的任一基本列$\{x_n\}$，

$\{f(x_n)\}$亦为基本列，则$f(x)$在(a,b)内一致连续.

(c) 若$f(x)$在$[a,b]$上有原函数，则$f(x)$在$[a,b]$上Reimann可积.

解：论断(a)是错误的.

取定自然数$N>a$，令

$$f(x)=\begin{cases} n^2(x-n)+1, & x\in\left(n-\dfrac{1}{n^2},\ n\right), \\ -n^2(x-n)+1, & x\in\left(n,\ n+\dfrac{1}{n^2}\right), \quad (n>N) \\ 0, & \text{其它点}. \end{cases}$$

容易验证$f(x)$连续.而且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n}(n^2(x-n)+1)\mathrm{d}x+\int_n^{n+\frac{1}{n^2}}(-n^2(x-n)+1)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+n^2\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n}(x-n)\mathrm{d}x-n^2\int_n^{n+\frac{1}{n^2}}(x-n)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

但对每个自然数$n>N$有$f(n)=1$，

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$.

论断(b)是正确的，证明如下：

先证$f(x)$在(a,b)连续.

$\forall\ x_0\in(a,b)$，对任意的点列$\{x_n\}$，若满足$x_n\to x_0$，则点列$x_0,x_1,x_0,x_2,x_0,x_3,\cdots$显然为基本列，从而依题设$f(x_0)$，$f(x_1)$，$f(x_0)$，$f(x_2)$，$\cdots$亦为基本列，故收敛.

注意到$\{x_n\}$为基本列，从而$\{f(x_n)\}$亦为基本列，于是$\{f(x_n)\}$收敛.

而由上面的讨论知$\{f(x_n)\}$与$\{f(x_0)\}$收敛于同一极限，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

从而$f(x)$在x_0点连续，而由x_0的任意性，知$f(x)$在(a,b)连续.

再证$f(x)$在端点a和b有有限的单侧极限.

设$x_n>a$，$x_n\to a$，则$f(x_n)$收敛，记为$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

任取点列$\{y_n\}$，满足$y_n>a$，$y_n\to a$，那么$f(y_n)$也收敛.现作点列$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots$收敛于a，这是基本列，$\therefore f(x_1),f(y_1),f(x_2),f(y_2),\cdots$收敛.而$\{f(x_n)\}$和$\{f(y_n)\}$作为两个子列应收敛于同一极限，即

$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=A$.

$\therefore \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$.

同理可证$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在且有限.

$\therefore$ $f(x)$在(a,b)内一致连续.

论断(c)是错误的,举例如下:

设$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

则$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & 0<x<1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$\therefore F'(x)$在$[0,1]$上有原函数.

但$F'(x)$ R不可积,这只要证$F'(x)$在$[0,1]$中无界即可.

事实上,$\because \lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}(2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2})$,由于$\lim\limits_{x\to0}2x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$,而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$无界(这只要取$x=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$即可),

$\therefore F'(x)$无界,从而$F'(x)$ R不可积.

三、(15分)设$f(x)$在$[a,b]$上连续且上凸(即$\forall x_1,x_2\in[a,b]$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,有$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$),则对任何$T\in(0,b-a)$必存在$x_0\in[a,b]$,使

$$\frac{f(x_0+T)-f(x_0)}{T}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即在$[a,b]$上曲线$y=f(x)$有任意长度(不超过端点弦)平行端点弦的弦.

证:令$g(x)=f(x+T)-f(x)-\dfrac{T}{b-a}(f(b)-f(a))$,

$$\begin{aligned}
\text{则} g(a)&=f(a+T)-f(a)-\frac{T}{b-a}(f(b)-f(a))\\
&=f(a+T)-\left[\frac{T}{b-a}f(b)+(1-\frac{T}{b-a})f(a)\right]\\
&\geqslant f(a+T)-f\left[\frac{T}{b-a}b+(1-\frac{T}{b-a})a\right]\\
&=f(a+T)-f(a+T)=0,
\end{aligned}$$

$\therefore g(a)\geqslant0$.

$$\begin{aligned}
\text{而} g(b-T)&=f(b)-f(b-T)-\frac{T}{b-a}(f(b)-f(a))\\
&=f(b)(1-\frac{T}{b-a})+\frac{T}{b-a}f(a)-f(b-T)\\
&\leqslant f\left[\frac{T}{b-a}a+(1-\frac{T}{b-a})b\right]-f(b-T)\\
&=f(b-T)-f(b-T)=0,
\end{aligned}$$

$\therefore g(b-T)\leqslant0$.

由f连续知g也连续,又$\because g(a)\geqslant0$,$g(b-T)\leqslant0$,

$\therefore \exists x_0 \in [a, b-T] \subset [a, b]$，使

$$g(x_0) = 0,$$

即 $f(x_0+T) - f(x_0) - \dfrac{T}{b-a}(f(b) - f(a)) = 0$.

$$\therefore \quad \frac{f(x_0+T) - f(x_0)}{T} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

四、(15分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上无穷次可微并且满足：(a) 存在 $M>0$，使得 $|f^{(k)}(x)| \leqslant M$，($\forall x \in (-\infty, +\infty)$，$k = 0, 1, 2, \cdots$)

(b) $f(\frac{1}{2^n}) = 0$，($n = 1, 2, \cdots$)，证明在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

证：用泰勒公式将 $f(x)$ 在原点展开：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

(ξ在 0 与 x 之间)

$\because \left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \dfrac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$ ($n \to \infty$) 对一切固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立，

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

不难看出，只要能证明对所有的 k，都有 $f^{(k)}(0) = 0$，就能推出在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

由于 $f(x)$ 连续，用条件(b)及海因定理知，$f(0) = 0$. 现假设 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$，来证明 $f^{(k)}(0) = 0$. 若不然，取 $\varphi(x)$ 满足 $f(x) = x^k\varphi(x)$，则

$$\varphi(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-k}.$$

当 $|x| \leqslant 1$ 时，

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-k}\right| \leqslant \frac{M}{n!}.$$

由于 M 为常数，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n!}$ 收敛. 由M判别法推出：

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-k}$$

在 $|x| \leqslant 1$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$，从而 $\varphi(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续，当然在原点连续. 又因为

$$\varphi(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \neq 0.$$

由连续函数的保号性知，在原点存在一个邻域使 φ 在此邻域上恒不为零. 而 $f(x) = x^k\varphi(x)$，所以在此邻域内除 $f(0) = 0$ 外，$f(x)$ 不再有其它零点.

另一方面，由条件(b)知，$f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) 而只要 n 充分大就可使 $\dfrac{1}{2^n}$ 落在上

述的邻域内，这就导致了矛盾.

也就是说，由 $f(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$，一定能推出$f^{(k)}(0)=0$，从而$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k)}(0)=\cdots=0$.所以对所有的$x\in(-\infty,+\infty)$，有$f(x)=0$.

五、（15分）试用有限覆盖定理证明数列柯西收敛原理（充分性部分）.

证：充分性部分的证明应是：若数列$\{a_n\}$是柯西数列（即对$\forall\varepsilon>0\ \exists N$，当$n$，$m>N$时，有$|a_n-a_m|<\varepsilon$成立），则$\{a_n\}$收敛.

首先证$\{a_n\}$有界.

这里取$\varepsilon=1$，于是$\exists N_0$，当$n>N_0$时就有：

$$|a_n-a_{N_0+1}|<1.$$

而由$|a_n|-|a_{N_0+1}|\leqslant|a_n-a_{N_0+1}|<1$可推得：

$$|a_n|\leqslant 1+|a_{N_0+1}|=M,$$

即

$$a_n\in[-M,M],\ n=N_0+1,\ N_0+2,\ \cdots.$$

由于前N_0项（有限项）均为定数，不失一般性，故仍记$a_n\in[-M,M]$，$n=1,2,\cdots$.

再证$\{a_n\}$收敛.

我们指出，在$[-M,M]$中必存在x_0使在x_0的任意邻域内都含有$\{a_n\}$中的无穷多项.假若不然，对$\forall x\in[-M,M]$，都存在$\delta_x>0$，使$o(x,\delta_x)$中只含有$\{a_n\}$的有限项，显然所有这些$o(x,\delta_x)$覆盖了$[-M,M]$，从而由有限覆盖定理知其中有有限个邻域覆盖了$[-M,M]$，这样$[-M,M]$中只含有$\{a_n\}$的有限项，矛盾，所以上面说的x_0一定存在.下面证明$\{a_n\}$收敛于x_0.

对$\forall\varepsilon>0$，由于$\{a_n\}$是柯西序列，故存在N，当n，$m>N$时$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$，再由$x_0$的取法知，在$o\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$中存在$a_k$使$k>N$，从而由

$$|a_n-x_0|\leqslant|a_n-a_k|+|a_k-x_0|$$

知，当$n>N$时，$|a_n-x_0|<\varepsilon$，也即$a_n\to x_0$.

六、（20分）设$f(x)$在$|x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$（$a^2+b^2+c^2\neq0$）上连续，证明

$$\iiint\limits_V f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1}f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u,$$ 其中V为球域$x^2+y^2+z^2\leqslant1$.

证：令左端积分为I并作球坐标变换：

$$\begin{cases}x=p\cos\varphi\cos\theta,\\ y=p\cos\varphi\sin\theta,\\ z=p\sin\varphi.\end{cases}$$

$$\text{于是 } I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(a\cos\varphi\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta+c\sin\varphi)p^2\cos\varphi\mathrm{d}p$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi f(a\cos\varphi\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta+c\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$