高等数学学习及考研辅导用书

高等数学习作课精编

主编　杜伯仁　赵　晶

副主编　韩世勤　王国庆　朱小宁

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习作课精编/杜伯仁,赵晶主编.—北京:国防工业出版社,2002.9

ISBN 7-118-02870-3

Ⅰ.高... Ⅱ.①杜... ②赵... Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 037823 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 19 440 千字

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:1-4000 册 定价:26.00 元

前　言

高等数学的许多内容单凭常识是不易理解的。这也是学习高等数学感觉困难的原因之一。学习高等数学时，在认真领会、准确记忆数学概念、定义、定理的基础上，应该通过解答一定量的习题来加深对数学概念、定义的理解，熟悉和掌握数学概念、定义、定理的运用。广大教师和学生也希望有一本适用的习作课参考教材。

中国地质大学数学教研室已举办考研辅导班二十多年，积累了丰富的经验和资料。常有读者索要考研资料。

鉴于以上两个原因，数学教研室决定由我们执笔将教研室十余位老师在长期的教学实践中搜集、整理的有代表性的近千道例题编成此书。本书的许多内容编者曾在历届考研辅导班中讲授，收到了很好的效果。

本教材根据工科高等数学教学大纲的要求编写，内容共分十四章，每章由内容提要、例题精选、习题三部分构成，习题按章节配有答案，难题给出解答。书中精选大量精彩例题，内容丰富、题型广泛，并按内容、方法进行了归类。读者在使用本书时，可先独立思考动手算一算，再与例题解法比较，从中积累经验，扩大视野，提高学习效率。

本书既可以作为工科院校学生学习高等数学的习作课教材，也可以作为报考硕士研究生的复习资料，还可供大专院校数学教师参考。

本书第一、二、三章由赵晶编写，第四、五、六章由朱小宁编写，第七、十四章由杜伯仁编写，第八、九、十章由韩世勤编写，第十一、十二、十三章由王国庆编写。全书由杜伯仁、赵晶统稿。杨雅仙同志参加了部分章节的责任编辑工作,在此表示感谢。

限于作者水平，不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 4 月

目　　录

第一章 极　　限

一、内 容 提 要

1. 数列极限的$\varepsilon-N$定义，函数极限的定义

1.1　数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists$正整数$N$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$

1.2　函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\ X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

1.3　函数的左右极限

左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$0<x_0-x<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当$0<x-x_0<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$

2. 极限的性质

函数的极限与其左右极限的关系： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$。

极限的唯一性： 若函数极限存在，则极限值必唯一。

局部有界性： 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$\exists\ \delta>0$，当$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta), x\neq x_0$时，$f(x)$有界。

保号性及其推论：

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$（或$A<0$），则$\exists\ \delta>0$，当$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta), x\neq x_0$时$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)>0$（或$f(x)<0$），则$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）。

3. 无穷小和无穷大

3.1　无穷小和无穷大的概念

无穷小： 在自变量的某一变化过程中，若函数$f(x)$以零为极限，则称函数$f(x)$为无穷小量。

无穷大：在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为无穷大量。

3.2 无穷小的性质及其运算

(1) 有限个无穷小之和仍为无穷小。

(2) 有界量与无穷小之积仍为无穷小。

(3) 有限个无穷小之积仍为无穷小。

(4) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\alpha(x)=0$。

(5) 在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；反之，若函数 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小。

(6) 有限个无穷大之积仍为无穷大。

(7) 有界量与无穷大之和为无穷大。

(8) 若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$。

3.3 无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x)=0, \quad \lim\beta(x)=0$

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小。

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小。

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小。

(4) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

(5) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq 0), k>0$，则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小。

4. 极限的运算

极限的运算主要有：**四则运算**、**复合运算**、**等价无穷小代换**（略）。

5. 极限存在的两个准则

单调有限准则：单调有界数列必有极限。

夹逼准则：若在 $x=x_0$ 的某个去心邻域内，都有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

6. 重要极限与常用极限公式

两个重要极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$；

常用极限公式：

$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n}=0\ (|q|<1)$； $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$； $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k}}{a^{n}}=0\ (a>1,\ k\geqslant 1)$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^{2}}=\dfrac{1}{2}$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+mx}-1}{x}=\dfrac{m}{n}\quad(m,n\in N)$；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{a}(1+x)}{x}=\log_{a}\mathrm{e}$； $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a$；

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^{m}+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0\ , & n<m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ \infty\ , & n>m。\end{cases}$$

7. 函数的连续性概念和间断点的类型

7.1 函数的连续性概念

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ $(\delta>0)$ 上有定义，如果 $f(x_0-0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续。

设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 上有定义，如果 $f(x_0+0)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续。

(3) 在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数。如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续。

连续函数的图形是一条连续不间断的曲线。

7.2 间断点及其类型

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 不连续就称点 x_0 为其间断点。它有三种可能：

$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 无定义；或者 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；或者 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

函数间断点的几种常见类型：

(1) 左右极限都存在的间断点叫做第一类间断点。它包括：

可去间断点（$f(x_0-0)=f(x_0+0)$）；跳跃间断点（$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$）。

(2) 左右极限至少有一个不存在的间断点叫做第二类间断点。它包括：

无穷间断点（$f(x_0-0), f(x_0+0)$ 之中有一个为 ∞）；振荡间断点。

7.3 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内是连续的。

8. 闭区间上连续函数的性质

最大（小）值定理：在闭区间上连续的函数 $f(x)$ 一定有最大值 M 和最小值 m，并对任意 $c\in[m,M]$，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$。

有界性定理：在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界。

零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，即至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$，则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$。

二、例 题 精 选

1. 用 $\varepsilon-N$（或 $\varepsilon-\delta$）语言证明极限或有关命题

用 $\varepsilon-N$（或 $\varepsilon-\delta$）语言论证的题，一般可分为两类：一类是用定义证明数列或函数以给出的常数为极限；另一类是已知数列或函数的极限存在，要证明数列或函数在一些附加条件下具有某种性态。

例 1-1 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$，（$0<|q|<1$）。

证 因为 $0<|q|<1$，令 $|q|=\dfrac{1}{1+b}\left(b=\dfrac{1}{|q|}-1>0\right)$，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$|nq^n-0|=\frac{n}{(1+b)^n}\leqslant\frac{n}{1+nb+\dfrac{b^2}{2}n(n-1)}\leqslant\frac{2n}{b^2n(n-1)}\leqslant\frac{4}{b^2}\cdot\frac{1}{n}$$

任取 $\varepsilon>0$，为使 $\left|nq^n-0\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{4}{b^2}\cdot\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{4}{\varepsilon b^2}$，取 $N=\max\left\{[\dfrac{4}{\varepsilon b^2}]+1,2\right\}$，

当 $n>N$ 时，有

$$\left|nq^n-0\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} nq^n=0$$

[注] 用 $\varepsilon-N$（或 $\varepsilon-\delta$）语言证明极限，关键在于由 $\forall\varepsilon>0$ 去求满足极限定义的 N（或δ）。

找 N 的方法是：从不等式 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$ 中解出 n，随即获得 N。

若不易直接求出 N，应设法将 $\left|x_n-a\right|$ 适当放大，使 $|x_n-a|<\beta_n$。放大时应注意放大

后的式子仍能随 $n\to\infty$ 而趋于零（即 $\beta_n<\varepsilon$）。我们常常把 $|x_n-a|$ 放大成诸如 $\frac{l}{n},\frac{l}{\sqrt{n}},\frac{l}{n-c},r^n$，$(0<r<1)$ 等简单形式（其中 l,c,r 为正常数）。

有时在不等式放大过程中，需要附加一定的条件，例如 $n>N_0$，才能将 $|x_n-a|$ 放大成 $\frac{l}{n}$，此时应该取 N 为 $N=\max\left\{N_0,\left[\frac{l}{\varepsilon}\right]\right\}$，如例 1-1。

用 $\varepsilon-N$（或 $\varepsilon-\delta$）语言证明极限的另一类型题目是：已知数列或函数以 A 为极限，要证明另一（与之相关的）数列或函数也以 A 为极限，见下例。

例 1-2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=a$。

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知，$\forall\varepsilon>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，对于定数 $N_1,a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a$ 也是一个定数，因此，存在 $N_2,n>N_2$ 时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N-Na}{n}\right|+$$

$$\left|\frac{(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a。$$

[注] (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，得不出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的结论。例如：$a_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 显然不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$。事实上 $\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leqslant\frac{2}{n}\to 0$。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty(-\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty(-\infty)$。

下面举两个例子说明用 $\varepsilon-N$（或 $\varepsilon-\delta$）语言来证明与极限有关的问题的方法。

例 1-3 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在，试证存在 $X>0$，$f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界。

证 对 $\varepsilon_0=1>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，必 $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$，而 $|f(x)|-|A|\leqslant|f(x)-A|<1$ $(x>X)$，故 $x>X$ 时，$|f(x)|<|A|+1$。令 $M=\max\{|A|+1,f(X)\}$，当 $x\in[X,+\infty)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$。于是 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上有界。

例 1-4 设 $y=f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在，证明 $y=f(x)$

在（$-\infty$，$+\infty$）上是常数。

[分析] 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，必 $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$。故 当 $x_1,x_2>X$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<|f(x_1)-A|+|A-f(x_2)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$，即 当 x_1,x_2 充分大后，$|f(x_1)-f(x_2)|$ 可小于事先任意给定的正数。

假如 $f(x)$ 不是常数，则必 $\exists x_1,x_2$，使

$$f(x_1)\neq f(x_2)\text{，}\quad |f(x_1)-f(x_2)|$$

是一个正常数。由于 $f(x)$ 以 T 为周期，故 $\forall n\in N$,有

$$f(x_1+nT)=f(x_1)\text{，}\quad f(x_2+nT)=f(x_2)\text{。}$$

而 x_1+nT，x_2+nT 是可以充分大的，因此

$$|f(x_1+nT)-f(x_2+nT)|<2\varepsilon\text{，}$$

但由

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1+nT)-f(x_2+nT)|<2\varepsilon\text{，}$$

就要求 $\varepsilon>\dfrac{|f(x_1)-f(x_2)|}{2}$，因此，若取 $\varepsilon\leqslant\dfrac{|f(x_1)-f(x_2)|}{2}$ 就会导出矛盾，经以上分析，可采用反证法来证明本题。

证（反证法） 假设 $y=f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上不是常数，则必 $\exists x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(x_1)\neq f(x_2)$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}|f(x_1)-f(x_2)|>0$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，必 $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon_0$，设 $f(x)$ 以 T 为周期($T>0$)，取自然数 n，使

$$n>\max\left\{\frac{X-x_1}{T},\frac{X-x_2}{T}\right\}\text{，}$$

则

$$x_1+nT>x_1+T\cdot\frac{X-x_1}{T}=X\text{，}\quad x_2+nT>x_2+T\cdot\frac{X-x_2}{T}=X\text{，}$$

故

$$|f(x_1+nT)-A|<\varepsilon_0\text{，}\quad |f(x_2+nT)-A|<\varepsilon_0\text{，}$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|f(x_1+nT)-f(x_2+nT)|\\&\leqslant|f(x_1+nT)-A|+|f(x_2+nT)-A|<2\varepsilon_0\text{，}\end{aligned}$$

即 $|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon_0=|f(x_1)-f(x_2)|$，矛盾。所以 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是常数。

[注] 在例 1-3 和例 1-4 中由于极限存在，我们可选一个特定的 $\varepsilon_0>0$，如例 1-3 中选 $\varepsilon_0=1$；例 1-4 中选 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}|f(x_1)-f(x_2)|>0$。选取的这个 ε_0 是一个正常数，这与证明极限存在是不同的。证明极限存在时，正数 ε(即 $\forall\varepsilon>0$) 必须是任意给定的。ε_0 的寻求有一定的技巧性，多数情况下可根据 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ 及要证的结果倒推。

2. 证明极限不存在的方法

例 1-5 证明当 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的极限不存在。

证 取 $x_n=2n\pi$ 和 $x_n'=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，当 $n\to\infty$ 时，有 $x_n\to\infty$，$x_{n'}\to\infty$ 且

$$\sin x_n=\sin 2n\pi=0\to 0\text{，}\quad \sin x_n'=\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to 1\neq 0\text{，}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 的极限不存在。

[注] 例 1-5 利用了“若函数极限存在，则子序列的极限也存在，且子序列的极限与函数的极限有相同的值”这一结论，这是证明极限不存在的一种常用方法。

例 1-6 证明 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但 $x\to 0$ 时，它不趋于无穷大。

证 取 $x_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$，则有 $|f(x_n)|=(n+\frac{1}{2})\pi$，对于任意的 $M>0$，总可以找到 n，使得 x_n 属于 $x=0$ 的任何一个给定的邻域，同时 $(n+\frac{1}{2})\pi>M$，因此，在 $x=0$ 的任何邻域内 $f(x)$ 无界。

另一方面，取 $x_n'=\frac{1}{n\pi}\to 0(n\to\infty)$，则有 $f(x_n')=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内不是无穷大。

3. 求极限的方法

3.1 用极限的运算法则求极限

例 1-7 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|\sin(x-1)|^2}{x^2+ax+b}=1$，则 $a=$_____，$b=$_____。

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b$，又由题设及 $\lim\limits_{x\to 1}|\sin(x-1)|=0$ 可知

$$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0，即 b=-1-a$$

所以 $$1=\lim_{x\to 1}\frac{|\sin(x-1)|^2}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 1}\frac{|\sin(x-1)|^2}{x^2+ax-1-a}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x+1+a)} \quad ①$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 1}(x+1+a)=2+a=0$（否则与式①矛盾），$\Rightarrow a=-2,b=1$。

例 1-8 给定数列 $x_0=a$, $x_1=1+bx_0$, $x_{n+1}=1+bx_n$，n=1，2，3，…，问 a，b 取何值时 x_n 收敛。

[分析] 先求出通项 x_n 的一般表达式，再利用极限的运算法则求极限。

解 由题设和数学归纳法易得

$$x_n=1+b+b^2+\cdots+b^n a=\frac{b^n-1}{b-1}+b^n a=\frac{1}{1-b}+b^n\left(a-\frac{1}{1-b}\right) \quad (b\neq 1)$$

因此，当$|b|<1$，a 为任何实数时，或者 $b\neq 1$，$a=\frac{1}{1-b}$ 时，$\{x_n\}$收敛于 $\frac{1}{1-b}$。

例 1-9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n})$。

解 设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，则 $2S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$，

所以 $$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}\to 2$$

即 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n})=2$$

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

[分析] 求 $x\to\infty$（或 $n\to\infty$）过程的极限，分子、分母同时除以 x（或 n）的最高次幂，再用极限的运算法则求极限。

解 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1。$$

3.2 利用夹逼准则求极限

“夹逼法”的要点是把数列的通项适当放大或缩小，然后用夹逼定理求得其极限。

例 1-11 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$。

证 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

因为 $(-1)^n$ 有界，只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=0$。显然，

$$0<\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{2}{n},$$

$$0<\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)<\sin\frac{2}{n}。$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{2}{n}=0$，由两边夹逼法则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)=0$。

例 1-12 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$。

证

(1) $a=0$ 时， $$0\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n},$$

由两边夹逼法则有 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0。$$

(2) $a\neq0$， $$\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}}\geqslant\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})},$$

由例 1-2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$。

另一方面，由假设可得 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{a}。$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}=a，$$

由两边夹逼法则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$。

3.3 利用单调有界准则求极限

数列通项由递推形式给出求其极限。其解法有：

(1) 设法求出通项的表达式，再求极限（见例 1-8，例 1-9）；

(2) 利用单调有界准则求解（求解程序：首先利用单调有界准则证明极限存在，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；其次令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后由递推式两边取极限，通过解关于 l 的方程求得极限 l 的值）。

这里介绍后一种方法。

例 1-13 设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=2,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之。

证 显然 $x_n>0$，并且 $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\frac{1}{x_{n-1}}}=1$，即 x_n 有下界。又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)-x_n=\frac{1-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

即 x_n 单调降，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 a，则有 $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$。因此得 $a=\pm1$，而 $x_n\geqslant1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

例 1-14 设 $x_1=a\geqslant0$，$y_1=b\geqslant0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$，$n=1,2,\cdots$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n。$$

证 显然，$x_n\geqslant0$，$y_n\geqslant0$，由 $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\geqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1}$

及 $$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_n^2}=x_n，\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n$$

知 $\{x_n\}$ 单调增，$\{y_n\}$ 单调减，又由 $x_1\leqslant x_n\leqslant y_n\leqslant y_1$ 知 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 有界，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 都存在，设为 $l_x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$l_y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则有 $l_y=\frac{l_x+l_y}{2}$，即 $l_x=l_y$。

例 1-15 设 $a<b$，$x_0=a$，$x_1=b$，及 $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$，$n=2,3,\cdots$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$。

证法一（先设法求出通项的表达式，再求极限）：由题设可得

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) = (-\frac{1}{2})^2(x_{n-2} - x_{n-3}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-1}(x_1 - x_0),$$

于是 $$x_n - x_0 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}(x_1 - x_0) = \frac{(x_1 - x_0)[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})},$$

即 $$(x_n - a) = \frac{(b-a)[1-(-\frac{1}{2})^n]}{3/2}，从而 \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = \frac{b-a}{3/2}，\quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}。$$

证法二（利用单调有界准则求解）：由于 x_n 是 x_{n-1} 与 x_{n-2} 的算术平均值，由归纳法可知：$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_1$，$x_1 > x_3 > x_5 > \cdots > x_{2n-1} > \cdots > x_0$。所以子列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 单调有界，从而极限存在，设

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = A，\quad \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = B。$$

由 $$x_{2n} = \frac{1}{2}(x_{2n-1} + x_{2n-2}) \qquad x_{2n+1} = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n-1})$$

两式分别取极限，得：

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(B+A) \\ B = \frac{1}{2}(A+B) \end{cases}$$

所以 $A = B = \lim_{n\to\infty} x_n$。下求 A。

因为

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_0) \\ x_3 &= \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \end{aligned}$$

$n-1$ 个式子相加得

$$x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} = \frac{a}{2} + b$$

上式两边取极限得

$$\frac{3A}{2} = \frac{a}{2} + b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A = \frac{1}{3}(a+2b)。$$

3.4 利用两个重要极限

例 1-16 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$。

解 原式= $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 1\times 0 = 0$。

例 1-17 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\sqrt{\cos 4x}}$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin 3x}+\sqrt{\cos 4x})}{1+x\sin 3x-\cos 4x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\sin 3x}+\sqrt{\cos 4x})}{\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}+\dfrac{\sin 3x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\sin 3x}+\sqrt{\cos 4x})}{\dfrac{8(\sin 2x)^2}{(2x)^2}+\dfrac{3\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{11}。$$

例 1-18 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}$。

解法一 原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2\sin^2\dfrac{x}{2})^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}]^{-2}=e^{-2}$。

解法二 原式$=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{\sin^2\frac{x}{2}}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right]=e^{-2}。$$

[注] 此极限属 1^∞ 型，可利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$（适用于底为 $1\pm f(x)$ 或易化为 $1\pm f(x)$ 形式的幂指函数 $[1\pm f(x)]^{g(x)}$ 的极限，其中 $f(x)\to 0, g(x)\to\infty$）。

例 1-19 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)\ln\dfrac{(x+2)}{(x+1)}+\ln(x+2)+x\ln\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}-\ln(1+\frac{1}{x})^{x}+\ln\frac{x+2}{x+1}]$$

$$=\ln e-\ln e+0=0。$$

3.5 利用等价无穷小代换求极限

等价无穷小代换可简化求极限的过程。常用的等价无穷小代换有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$。

例 1-20 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 2x}$。

解 $x \to 0$时，$e^{x^3}-1 \sim x^3$，$\sin 2x \sim 2x$; $\sin^3 2x \sim (2x)^3$。于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{\sin^3 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{8}$$

例 1-21 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}$。

解 $1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]$，当$x\to 0$时有

$$[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]\sim -\frac{1}{2}(-x^2)=\frac{1}{2}x^2;\quad (\arcsin x)^2\sim x^2$$

于是

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1\right]}{(\arcsin x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}。$$

例 1-22 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(3^n+1)-\ln 3^n}{\ln(2^n+1)-\ln 2^n}$。

解 $n\to\infty$时，$\ln(1+\dfrac{1}{3^n})\sim\dfrac{1}{3^n}$; $\ln(1+\dfrac{1}{2^n})\sim\dfrac{1}{2^n}$,

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{3^n})}{\ln(1+\frac{1}{2^n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n=0$$

[注] 熟练掌握并灵活运用等价无穷小代换可以简化求极限的运算。但是等价无穷小代换运用不得法会导致错误。一般讲乘除运算时尽管用，加减运算时不宜用（其原因在第三章导数应用中会讲到）。

3.6 利用单侧极限求极限

例 1-23 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

[分析] 当$x\to 0$时，$e^{\frac{1}{x}},e^{\frac{4}{x}},\dfrac{\sin x}{|x|}$的左右均极限不相等，例如

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,$$

所以此题应分别讨论左右极限。

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|})=\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x})=\dfrac{0}{1}+1=1$,