〔日〕内井惣七 著

推理与证明

——现代逻辑的技巧

推理与证明

——现代逻辑的技巧

中国人民大学出版社

推 理 与 证 明

——现代逻辑的技巧

〔日〕 内井惣七著

陈祖军 王 学 曲玉波 译

赵总宽 校

中国人民大学出版社

推 理 与 证 明

——现代逻辑的技巧

〔日〕 内井惣七 著

陈祖军 王学 曲玉波 译

赵总宽 校

•

中国人民大学出版社出版发行

（北京西郊海淀路39号）

丰台印刷厂印刷

新 华 书 店 经 销

•

开本：850×1168毫米32开 印张：6

1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷

字数：130 000 册数：1—8 000

•

ISBN 7-300-00408-3

B·53 定价 2.15元

中译本前言

符号逻辑在现代语言学、数学、哲学、自然科学、社会科学和思维科学及工程技术各方面有着广泛的应用。它是计算机科学和人工智能研究的必不可少的工具。

《推理与证明》一书突出符号逻辑的主要内容，广泛而深入浅出地介绍符号逻辑各种有效推理与证明的方法。所述内容，均属在科学认识和日常生活中很实用的逻辑方法，并且本书有助于读者掌握和应用这些逻辑方法的技能、技巧。

在我国符号逻辑的教学和普及过程中，时而听到符号逻辑内容抽象和表述枯燥的反映。如何从具体的应用实例入手讲授它，使更多的人容易理解和掌握它，如何使学习它的人不仅认识它的重要性，而且产生学习它的兴趣，这是搞好符号逻辑教学和尽快普及符号逻辑需要解决的问题。本书著者在解决这个问题方面做了很好的赏试。将本书译为中文，可作为我们改进符号逻辑教学方法时参考，同时希望该译本对符号逻辑的普及有所裨益。

《推理与证明》的日文版本，是日本符号学学会会长板本百大教授于1986年来我国讲学时赠予李先焜教授的。本译书的出版得到了湖南农村金融职工大学和中国人民大学出版社的大力支持。在译书出版之际，我代表译校者瑾向著者内井惣七先生及板本百大教授、李先焜教授和出版社的同志表示衷心的感谢。

赵总宽

日文版前言

从历史的角度看，现代符号逻辑学，是自弗雷格以来，与数学的基础问题相联系发展起来的。而逻辑学教材又多带有浓厚的数学色彩，也反映了这方面的情况。因此，许多人可能有这样一种印象：逻辑学是一门深奥而又枯燥的科学。可是作为以一般读者和大学生为主要对象的教科书，就没有必要搞得那么深奥枯燥了。我们稍加思索就会发现：我们每天都在进行各种推理和证明。把这样的推理和证明的能力稍加发挥，养成有规律地思考问题的习惯，我认为这是学习逻辑学的最好捷径。

也许还有人认为这样也是深奥枯燥的，但是一旦他们看到近来掀起的围棋和相棋热，也一定会喜欢上具有与围棋和相棋同样趣味的智力游戏。猜谜是一种有代表性的智力游戏。自古以来，各种谜语使很多人产生乐趣，而作为智力游戏或猜谜的共同基础就是所谓的推理和证明。猜谜的乐趣在于发现了未知的东西。如果不严格地说，这就是推理。而确认推理结果正确的过程就是证明。那么，对于逻辑学，就应象下棋和猜谜那样，一边娱乐，一边学习。

在这本书中，不仅要求读者证明，而且尽量使读者对发现即推理产生兴趣。在此基础上，尽量从现代逻辑学中引出一些有助于发现的逻辑技巧。在这两点上，我想以克服现有大多数逻辑教材的缺点为目的。成功与否期待读者评定。

在写这本书时，从下面两个人的著作中受到直接的启发。一个是著名的美籍匈亚利数学家乔治·波利亚（*George*.

Polya），从他的名著《怎样解题》和《数学的发现》等书中懂得了创造性思维的重要性。另一个人是美国的数学家兼逻辑学家、魔术师雷曼德·斯麦因(*Raymond Smullyan*)，他最近的著作《*What Is the Name of This book?*》（《这本书叫什么名字》1978），作为逻辑难题的杰作留传于世，因此在我这本书中也改用了几个（比较容易的）习题。我建议那些对逻辑难题特别有兴趣的读者，务必读读这本书。此外，还有幸在此向那些有兴趣在逻辑学上想有更深一步了解的读者，推荐下面两本书，作为向更高层次迈进的逻辑教科书。

（1）奎因的《逻辑的方法》原著第三版，中村、大森、滕村译（岩波书店1978年）。

（2）神野慧一郎、内井惣七的《逻辑学——模型理论和历史背景》（密涅瓦书房1976）

与出版上面第二本书一样，密涅瓦书房的后藤郁夫先生给予了本书很大的支持。最后，就是我个人的一点私事了。为了这本书的写作，我几乎舍弃了今年七—九月的暑假。在此，把这本书献给为体谅我而度过寂寞的暑假的妻子和两个女儿，以及乡下的父母和舅母（关于这些关系参照第4章）。

1980年12月4日

内井惣七

目　　录

第三章 个体与属性

——吸血鬼害怕阳光吗？渎职议员有罪吗？逻辑规律被反证了吗？

第四章　复杂的关系

——你的父亲是谁？你的孩子是谁的孩子？你理解了这些逻辑关系吗？

——思考、得出答案了吗？并证明答案了吗？

第一章　真假的探索

谁是犯人、谁是吸血鬼、哪些是逻辑规律？

1． 推理和证明

逻辑学被认为是枯燥的学问，但不管你爱好与否，我们在日常生活中总是经常接触到推理和论证。对于我们每天无意识地进行的那成百上千次的推论（例如：一听到时钟敲了三下，就想到三点了，等等）暂且不论。这里要考虑的是经过努力，有意识地进行的推论和论证。对推论和论证以后还要进一步明确区别。首先从一个实例说起：

【例题1】 某珠宝店被盗，搜查的结果表明下列事实。

（1）可疑者有a、b、c三人，其中至少有一个是罪犯。

（2）当a行盗时，b一定同案。

（3）在作案时间里，b正在快餐馆饮酒。

根据这些事实能推出什么结果？并能对其结论进行证明吗？

【解　答】（i）推出的结论是“c是犯人”这一命题。推理的途径可能有几条，不过有代表性的就是下面采用的一条。首先由（3）得知：

（4）b不是犯人。

又由（2）得：

（5）如果a是犯人，那么b也是犯人。

由此导出：

（6）b如不是犯人，a也不是犯人（（5）的对偶命题）。

由（6）和（4）可得：

（7）a不是犯人。

因为a、b都不是犯人，所在前提（1）中剩下的可能性只有一个，即

（8）c是犯人。

（ii）以上推论就恰好构成由前提（1）—（3）推导出（8）的证明，因为推论的各各环节都符合逻辑规律。例如：由（5）推到（6），根据对偶律。再如：由（6）和（4）推出（7）依据分离律。从而从三个可疑者中，排除其中二个，把剩下的做为结论。整个过程都是以正确的逻辑规律为基础的。

所谓推论就是依据已知的前提推导出未知的结论的过程。与此相反，证明，其结论则是已知的，确定结论能否由前提正确地推出是它的宗旨。换言之，推论是根据由命题到命题的推移而发现未知的结论的过程。与此相反，证明是依据逻辑规则确认给出的前提和其结论的关系的过程。这种区别，举例来说，如果把(i)解“$x^2-3x+2=0$”这一代数方程式的过程和(ii)证明“三角形的内角和等于二直角”这一几何定理的过程对比来看就明白了。(i)以求得未知数x的值为目的，它通过因数分解的方法推出结果（$(x-1)(x-2)=0$，因此$x=1$或者$x=2$）。而且，其解一旦得出，不管将其值代原式x，或再重新证明因数分解的过程，这当然都能证明其解是正确的。

（ii）以表明该命题是以几何公理或已被证明的定理为根据正确地推导出来为目的。当然，其证明本身就是发现的过程，不过结论是已知的，不是未知的。

在上述例题中，推论是在正确的逻辑规则下进行的，（8）的推论过程也就构成（8）的证明。推理和证明如已述那样虽是性质不同的过程，但它们正确的基准同样都是逻辑规则。但

是，一般来说，由已知前提推出未知结论，要比证明已知的命题难得多。

为实际体验一下这一点，从下面简单的问题开始，做做推论和证明的练习。

【问题1】对某盗窃案件的可疑者a、b依据下面的事实，能得出谁是罪犯，谁不是罪犯吗？

（1）犯人必在a、b之中。

（2）a行盗时，b一定同案。

【问题2】

（1）a或者b必有一个是犯人。

（2）不能说，a不是犯人、b是犯人。

【问题3】

（1）a或者b不是犯人。

（2）b要是犯人，a也是犯人（即同案）。

【解答】1．b是犯人。弄清楚这一结论，证明的方法有几个。例如：根据前提(1)a、b之中必有一个是犯人，那么考虑到(i)a是犯人和(ii)b是犯人两种情况就够了，可是在(i)的场合下根据(2)b也是犯人，而且在(ii)场合下，根据假定b是犯人。总之b是犯人。再一个证明法就是假定否定结论的的方法（归谬法）。假定b不是犯人。这样一来，根据这个假定和前提（1）a一定是犯人，可是a要是犯人，根据前提（2），b也是犯人，结果产生b是犯人又不是犯人的矛盾，因此假定是错的，b是犯人。

2．结论——a是犯人。证明——首先，由（2）得：

（3）a如果不是犯人，那么b不是犯人。

到底（i）a是犯人，还是(ii)a不是犯人呢？在(ii)的场合下，根据（3）b也不是犯人，这与前提（1）相矛盾，于是只剩下

(i) 的场合，a是犯人。

3．结论——b不是犯人。证明——如果假定b是犯人，那么根据（2），a也是犯人。可是这就与前提（1）相矛盾，因此结论为：b不是犯人。

2． 符号的引入

以上三个问题的解答均采用先提示出结论，而后证明之的形式。可是要是首先不能推出结论，这种证明就是不可能的。那么怎样才能推出结论呢？象前面那三个比较简单的问题，推论也是容易的，可是如有下面这样复杂的前提，推论就不那么容易了（这个例子是根据雷曼德·斯麦因的《这本书叫什么名字》改成的）。

【例题 2】 对某凶杀案件的三个可疑者来说，下列事实确凿：

（1）a、b、c中至少一人有罪。

（2）a有罪时，b或c与之同案。

（3）c有罪时，a或b与之同案。

（4）b有罪时，没有同案者。

（5）a、c中至少一个无罪。

这种情况的推论，最简便的方法就是：根据对前提的分析，使命题符号化。分析每一前提所包含的基本要素，如果能弄清实质性的情况和结构，也就抓住了问题的头绪了。虽然最初有点不顺手，不过再没有胜过符号化的方法了。现在所要考虑的是把一个命题作一个基本单位来处理，能把命题的结构形式符号化就够了。就是说，对命题内部更细的结构，如主词和谓词的区别等，暂且不管。因此对例题2。

“a是有罪的”用A表示；

"b是有罪的"用B表示；

"c是有罪的用"用C表示。

用这些命题构成更复杂的命题的结构形式，还需有：否定（$\neg A$：不是A）；联言（$A\wedge B$：A并且B）；蕴含($A\rightarrow B$：如果A那么B)；选言($A\vee B$：A或者B)四种符号。$\neg$、$\wedge$、$\vee$ $\rightarrow$这四种符号把在逻辑推论和证明中起根本作用的语言（语词）符号化了，称之为"逻辑联结词"。此外，对于联言$A\wedge B$，为叙述方便以后略写为AB。

3. 真值表

为了正确规定这些逻辑联结词的意义，根据下面的真值表，可准确地确定命题真假的条件。关于否定句$\neg A$，要是A真，$\neg A$就假；要是A假，$\neg A$就真。真用"T"，假用"F"来表示。上述条件可整理为"表1"

表1

A	$\neg A$
T	F
F	T

选言和联言，可以依据表2来确定它们的意义，即：$A\vee B$不限A、B之一真，两个都真也是真的。

表2

A	B	$A\vee B$	$A\wedge B$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

表3

A	B	$A\rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这样，联言没什么问题（解释略）。

关于条件句"如果A，那么B"，首先要明确下面四个事

实：第一，虽然A为真，但B要是为假，那么“如果A，那么B”显然是假的。第二、假如“如果A，那么B”是真的，并且A也真，那么B一定真。第三，假如“如果A那么B”是真的，并且B是假的，因此一定能推出A是假的。第四，“如果A那么B”和与其相反的命题“如果B那么A”一定具有不同的真值条件，要特别清楚地区分开如果前者真、那么后者假的情况。

依据这些事实就完全能理解表3了。即懂得：表中第二行根据事实一，第一行根据事实二，第四行根据事实三。必须注意，第三行从事实四得出，是把“如果B那么A”为假作为条件的，要是“如果A那么B”在第三行也假的话，那么它与其反命题“如果B那么A”的区别就不好握。

以上三表，无论在什么情况下，对某命题的真假，根据其子命题的真假，做出唯一性的规定时，该命题就叫做这些子命题的真值函项。凭借$\neg$、$\wedge$、$\vee$以及$\rightarrow$的命题结合，也叫真值函项意义的结合。

使用以上所定义的逻辑联结词，前面的例2的前提基本结构可以符号化为如下形式：

【例题 2】（续）

（1） $A \vee B \vee C$

（2） $A \rightarrow (B \vee C)$

（3） $C \rightarrow (A \vee B)$

（4） $B \rightarrow (\neg A \neg C)$

（5） $\neg A \vee \neg C$

说明——$A \vee B$，不限于A、B一方为真，两方都真该式也是真的。那么（1），有罪的无论是一人、二人、三人哪种情况都是真的，都正确地表现了“至少有一人有罪”的意思。（2）和（3）的“或者”也这样理解。(4)的“没有同案者”，

因为说的是，a、c都无罪，所以构成$\neg A$和$\neg C$的联言形式。相当于“如果……就……”的表现形式有很多，例如“在……情况下……”“在……时候……”“在……条件下……”，等语句都相当于“如果……就……”。

4. 消去法推理

在这样符号化的条件下，用什么样的方法推理好呢？下面介绍一种应用比较广泛而且只凭机械的程序进行推理的方法。

这种方法就是利用真值表的方法。真值表一般可用于二个方面，(i) 其一，就是根据A、B子命题的真假，确定$A\vee B$、$A\rightarrow B$等复合命题的真假。(ii) 其二，正好相反，是假定复合命题的真假来探求使假定成立的子命题的真值的组合情况。现在要介绍的方法就是以 (ii) 的真值表的使用方法为基础的。

任意命题形式，比如假设$A\vee B$，依据这个假定，有些可能性就当然地被排除了。因为假设$A\vee B$，就是认为$A\vee B$是真的，所以使$A\vee B$假的可能性就当然被排除了。这种可能性，根据前面的表2，就是A、B都假的情况。这种依据假定消去可能性的方法正是下面所讲的推理的基础。为使这种方法尽量采用机械的步骤，故遵循如下程序：

(i) 首先，象下面那样，把表述与真值表相对应的可能性构造成联言式。比如，如果包含A、B二个子命题，它俩的真假组合就有四种可能，即：〔T T〕，〔T，F〕，〔F，T〕，〔F，F〕。。与这四种可能性相对应，可以构成AB，$A\neg B$，$\neg AB$，$\neg A\neg B$四种联言式（各子命题及其否定的所有组合形式）。

(ii) 假定已知命题为真时，就要检查一下，在以上用联

言式表示的可能性里，哪个应留下，哪个应消去，比如，假定$A \vee B$，就要把$\neg A \neg B$消去。再如，假定A，就要把$\neg A$以及$\neg A \neg B$消去。

我们把这种方法应用于例题2：

【例题 2 】（续）

被包含的子命题是A、B、C三个，这里面哪个是真的，哪个是假的？那么，就要列举出肯定和否定的各种组合的可能性，并且必须穷尽需考虑的所有可能性。那就是：

$ABC \qquad \neg ABC$

$AB\neg C \qquad \neg AB\neg C$

$A\neg BC \qquad \neg A\neg BC$

$A\neg B\neg C \qquad \neg A\neg B\neg C$

所要求得的结论就包含在这 8 种组合里面。

其次，在假定（1）——（5）命题的每一情况的时候，要注意在这八种可能性中哪一个应被消去。例如：

假定（1）$A \vee B \vee C$

在这个命题中，三个子命题中至少有一个是真的。因此，$\neg A\neg B\neg C$这种可能性就被消去。在被消去的可能性的右边打上×，并且为了明确是根据哪一前提消去的，就写上该前提的序号。对（2）以下各前提依次应用这种程序得到的最后结果如表 4 。

对此结果稍加说明，首先，假定（2）$A \rightarrow (B \vee C)$就要把使（2）假的可能性消去。使（2）假的可能性，根据表3，是A真且（$B \vee C$）假的场合，而且使（$B \vee C$）假的可能性，根据表2，是B和C都假的场合。那么结果，根据（2）被消去的可能性就是$A\neg B\neg C$。同理，根据：

$C \rightarrow (A \vee B)$