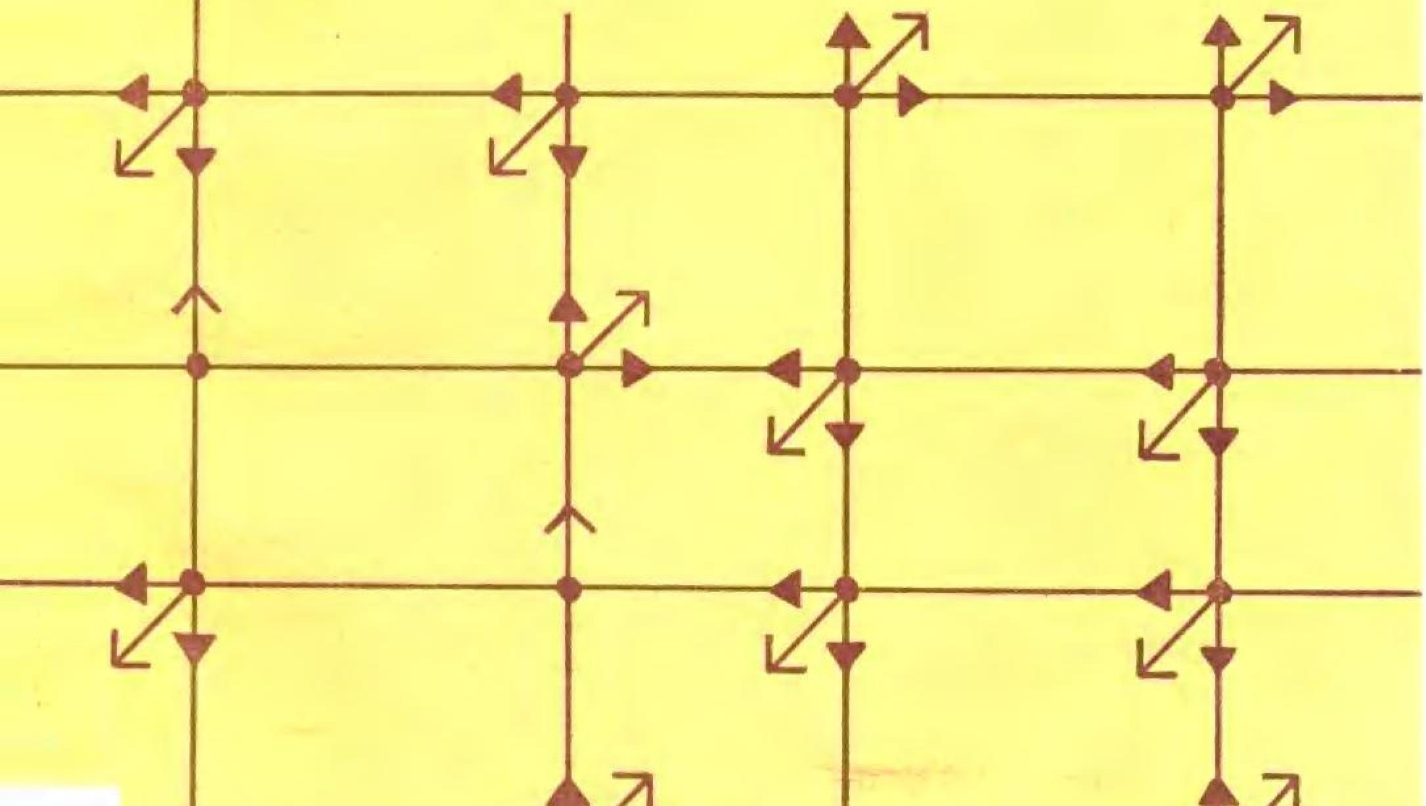
[苏] B·Φ·卢基亚诺夫

工程测量精度估算



测绘出版社

书中详细论述误差的来源及其因果关系，用波莱尔域的形式对引起误差的各种起始因素进行了阐述，给出了其综合影响的模型。在此基础上详细讨论了现场放样时各构件的测设精度，以及完成各类工程测量工作所需的观测精度。对于工程测量的起始要求和各种误差间的相互关系也进行了探讨。书中附有大量的精度估算实例。

对从事工程测量工作的科研、教学及实际作业人员均具有指导意义。

ВИКТОР ФЕДОРОВИЧ ЛУКЬЯНОВ

Расчеты точнссти инженерно-геодезических работ

工程测量精度估算

[苏] В·Ф·卢基亚诺夫

杜宗甫 译

沈文炳 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14.25 · 字数 325 千字

1985 年 8 月第一版 · 1985 年 8 月第一次印刷

印数 1—7,500 册 · 定价 2.95 元

统一书号：15039 · 新 387

前　言

苏共第二十六次代表大会的决议规定，要进一步提高劳动生产率和增长全社会的生产效益。在这种情况下工程测量的作业量将大大增加。建筑物的设计、施工和使用，现有企业的改造，地区公用设施的建设等都离不开工程测量，这类例子真是多得不胜枚举。在所有情况下，工程测量对生产效率和工程质量的提高都起到了促进作用。特别是对装配式建筑物来说作用更大，不进行轴线测设、构件校正和竣工测量是无法施工的。

在解决应用测量学的一些问题时，常常不得不考虑国民经济部门的一系列特殊要求，并按它们的需要来完成该任务。这时精度估算的作用越发重要。正确的选择精度将能保证较高的工程质量和工作效率。

在科技书籍中，只是在叙述主要题材时顺便讨论工程测量精度的估算问题，而且通常总把内容压缩至最低限度，只给出初步的近似解。仅有一本书对精度估算问题进行了专门的阐述[35]。

随着国民经济各个领域对施工精度和效率要求的提高，迫切需要把已有的经验加以总结。本书就是针对这一问题而写的。

书中以相当大的篇幅介绍了数学工具，并力图以某种模式反映观测条件与误差之间的因果关系。这就为制定一种算法提供了先决条件，同时还指出了在电子计算机上进行精度估算的可能性。

书中讨论了各种误差对设计量测设结果的影响，指出了将系统误差同偶然误差分别考虑的必要性。

作者指出，在手稿准备出版过程中 Л·М·鲁基亚诺娃工程师给予了很大帮助。

目　录

第一章　概　论 ………………………………………… (1)

§1　工程测量的精度估算 ………………………………………… (1)

§2　集合论的有关知识 ………………………………………… (3)

§3　概率论的一般知识 ………………………………………… (6)

§4　数理统计理论的一般知识 ………………………………………… (14)

§5　回归分析的一些问题 ………………………………………… (17)

§6　尺寸链理论的知识 ………………………………………… (21)

第二章　测量误差的计算 ………………………………………… (26)

§7　基元误差 ………………………………………… (26)

§8　基元误差的估计 ………………………………………… (34)

§9　基元误差的计算 ………………………………………… (42)

§10　测量误差 ………………………………………… (48)

§11　误差的分类 ………………………………………… (52)

§12　测量误差和测设误差的估算 ………………………………………… (56)

第三章　现场测设单项放样元素的误差估算 ………………………………………… (63)

§13　设计线段的测设 ………………………………………… (63)

§14　设计角度的测设 ………………………………………… (70)

§15　设计高程的测设 ………………………………………… (81)

§16　方向线的测设 ………………………………………… (86)

§17　投影点和轴线时铅垂线和垂直面的测设 ………………………………………… (93)

第四章　单项工种的精度估算 ………………………………………… (103)

§18　旁向找平 ………………………………………… (103)

§19　建筑物主轴线（基本轴线）的放样 ………………………………………… (106)

§20　圆曲线的放样 ………………………………………… (112)

§21　装配式构件和技术设备安装过程中的检验测量 ………………………………………… (123)

第五章　工程测量控制网的精度估算 ………………………………………… (131)

§22　建筑工程中的高程网 ………………………………………… (131)

§23　建筑工程中的平面网 ………………………………………… (134)

§24　多级网 ………………………………………… (149)

第六章　工程测量的精度估算 ………………………………………… (154)

§25　装配式建筑物构件安装的一般介绍 ………………………………………… (154)

§26 装配式建筑物各构件施工时温度的影响……………………………（156）
§27 轴线的细部放样……………………………………………………（163）
§28 高层建筑物起始地平与安装地平上的平面网……………………（177）
§29 高层塔式建筑物中心的投影………………………………………（183）
§30 空气压缩机站和水泵站工艺管道的安装…………………………（193）
§31 沉降观测……………………………………………………………（199）
§32 建筑物水平位移的观测……………………………………………（206）
附录 1 概率积分值 $\Phi(t)$ ……………………………………………（219）
附录 2 函数值 $P=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$ ……………………………………（219）
参考文献…………………………………………………………………（220）

第一章　概　　论

§1.　工程测量的精度估算

工程测量的目的，在于测定一些物体的几何参数，确定这些物体在空间的位置，或者向国民经济各部门提供必要的数据(轴线、安装准线等)，以保证其工作的顺利进行。例如，在高层装配式建筑物的施工中，对施工机械的物理过程进行调整时，沿给定的轨道开动施工机械时，负责“指挥”操作技术的测量工作就具有特别重要的意义。有时，工程测量专家对保证施工中的几何结构要负全部责任。

在这种情况下，施工设计工作起着更大的作用。没有设计，或者设计质量不高，将会降低建筑物的使用价值，提高工程造价，乃至延误竣工期限。在个别情况下，还可能酿成事故。而为消除这些缺陷所需要花费的资金比整个工程的测量经费还要多。

精度估算是进行施工设计的基础。根据精度估算的结果选择测量方法，确定偏差的容许值并规定观测条件。因此我们必须从这一广泛的意义上来理解精度估算的问题。

下面我们对工程测量精度估算过程作一概括的论述。

倘若在执行国民经济某部门的任务时，需要提供k个几何参数A_j，其极限误差为ΔA_j。假设为了解决这一问题需要观测或在实地测设n个L_i，而这些L_i值与起始参数之间存在着如下已知关系：

$$\left.\begin{array}{l} A_1=\varphi_1(L_1,\ \cdots,\ L_n); \\ A_2=\varphi_2(L_1,\ \cdots,\ L_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_k=\varphi_k(L_1,\ \cdots,\ L_n). \end{array}\right\} \quad (1)$$

这时，总是$n>k$。

我们举例说明（1）式的含义。如果起始参数是直接测得的，则

$$A_1=L_1,\ A_2=L_2,\ \cdots\cdots,\ A_k=L_k.$$

观测或测设L_i时，总会产生误差η_i。这将导致在起始参数A_j中出现一个误差ξ_j。总而言之，ξ_j是观测值及其误差的函数，即

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1=\psi_1(L_1,\ L_2,\ \cdots\cdots,\ L_n,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\cdots,\ \eta_n); \\ \xi_2=\psi_2(L_1,\ L_2,\ \cdots\cdots,\ L_n,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\cdots,\ \eta_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_k=\psi_k(L_1,\ L_2,\ \cdots\cdots,\ L_n,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\cdots,\ \eta_n). \end{array}\right\} \quad (2)$$

在进行精度估算时，（2）式是观测值误差和起始参数误差之间的基本关系式。

进行精度估算有正解问题和反解问题之区别。

*正解问题*就是根据已知的测量结果 L_i 及其误差 η_i 来求解 ξ_j 值。为解算这一问题，先要估计 η_i 值，然后按（2）式计算 ξ_j，并将 ξ_j 与其极限误差 $\varDelta A_j$ 值进行比较。这一问题大家都很熟悉，在传统测量学中称之为精度估算。

*反解问题*是根据已知的 $\varDelta A_j$ 值求解 η_i。这一问题在精度估算中最为常见，因而有必要对其一般解法进行较详细的讨论。

反解问题的解算从根本上来说，就是要选择这样一个观测方案（确定 L_i 的方案），并寻求一组 η_i 值，以使它们能以给定的概率保证满足不等式组。

$$\xi_j \leqslant \varDelta A_j. \tag{3}$$

这时，需根据方程组（2）中的已知值 ξ_i 求 L_i 和 η_i。此问题无唯一解，因为待定值的个数多于方程数。如要求解，必须引入一些附加条件。比如说，这些条件可以是各种因素的影响相等，也可以是劳动费用最低等等。附加条件的选择，始终取决于具体任务的内容。

反解问题的解算，可按如下几步进行。

*第一步*是选择起始几何参数，并规定偏差的容许值。选择参数时，要从测量工作所面临的任务来考虑。尽管表面看来道理很简单，实际上这步估算是一项复杂的工程问题。解算时，我们不得不考虑所进行的工作的特点和目的等一系列因素的影响。

即使对同一测量工种，也会因其要解决的问题不同，目的各异，因而其起始参数在这种情况下也不尽相同。

例如，沉降测量可以确定不同基础的物理-力学性质。这时，有必要按基础的特征把各类建筑物分组，并取各组沉降的平均值作为起始参数。

如果建筑物沉降观测的目的是为了预报其破坏，那末作为起始参数，以选择建筑物临界点的沉降值之差为宜，因为正是这些点上的沉降值之差在结构中会导致附加应力的生成，从而引起断裂的危险。

文献[10]利用当时沉陷的速度作为起始参数，对沉降观测的精度作了估计。

上述这类例子已表明所述问题的复杂性。

在规定容许偏差 $\varDelta A_j$ 时，不得不考虑如下两种可能的情况：若降低精度要求，就可能使国民经济有关部门因返工所耗费的资金大大增加，从而降低工程质量，甚至导致危险情况发生；如果提高精度要求，则会增加测量工作的费用，延长工期，并导致停工。面对这两方面的要求，欲找到一个两全其美的方案是相当复杂的，因而常常将它列为一个独立的技术问题。

在选好起始参数，定出偏差的容许值，并编写好测量工作的技术任务书之后，即可着手进行估算的*第二步*——拟订总的测量方案(选择 L_i)，即

确定测量工作分几个阶段；

选择每个阶段的测量方法；

制订各阶段工作的概略方案。

究竟分几个阶段，这取决于对测量精度的要求，现有控制点的密度和精度，工作范围

的大小以及该项任务的特点。

在选择测量方法时，应顾及每种方法的优点，并选择那些最适合周围情况的方法。

在编制概略工作方案时，需按每个阶段确定网的大致形状和大小，预定施测对象并查明其主要指标。

所得到的资料，作为进行第三步的原始资料，来估算各阶段的误差。

第三步任务的实质在于揭示本阶段作业误差 ξ 与各次测量误差 η_i 之间的关系

$$\xi=\psi(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_k). \qquad (4)$$

方程（4）无唯一解，因此要求引入附加条件。

在传统的测量学中解决这一问题时，把基元误差（Элементарная погрешность）等影响的原则作为附加条件。而在解决工程测量问题时，则采用误差按比例变化的原则。

解算等式（4），并求出 η_1，η_2，…，η_k 之后，应检查条件（3）是否满足。若不满足，则要找出误差出现的原因，并对估算进行验证。

在进行工程测量时，对每步操作进行校核是很重要的。测量中的粗差和精度不够都可能导致严重的后果。因此，在进行测量作业时，应对较多数量的中间操作规定作业限差。

对各项操作的工作限差最好在精度估算过程中做规定。在这种情况下，根据给出的概率值，不难选取误差估值和限差之间的关系。

这种解算方法是最通用的一种解法。对于没有类似例子可供借鉴的工作来说，其精度估算常用这种方法。

如果过去的工作已取得了一些经验，并且无论就任务本身，或就观测条件来说，都与现在的任务相似，这时精度估算将大大简化，甚至可以部分或全部利用已进行过的分析结果。

当所涉及的工种具有根据多年工作经验总结出来的标准文件时，精度估算就变得更加简单。在这种情况下，通常只进行一些说明即可。

§2. 集合论的有关知识

基本概念

具有共同性质的一些元素 s 之总和，称为集合（或集）S。其中的每一个事件 s 称为**集合的元素**。

按其元素的个数，集可分为**有限集**与**无限集**。如果无限集的元素可以排成序列，并且在序号和元素之间存在着唯一的对应关系，则该集称为**可列集**。

如果 s 是集 S 的元素，则说 s 属于 S，写作

$$s\in S.$$

如果 S 和 S_1 是这样的两个集：S_1 的每个元素都包含在 S 内，则 S_1 称为 S 的子集，写作

$$S\supset S_1 \text{ 或 } S_1\subset S.$$

若$S_1 \subset S$，且$S \subset S_1$，则两集相等，即

$$S_1 = S.$$

若S不包含任一元素，则称之为空集，即

$$S = 0.$$

如果集R中包含着在试验中可能遇到的所有元素，则称R为空间。

集的运算

所谓集S_1与S_2的并或和，是指这样一个集S_3，其所有元素总属于S_1和S_2两集之一，并写作

$$S_3 = S_1 \cup S_2.$$

所谓集S_1和S_2的交或积，是指这样一个集S_3，它包含S_1和S_2所共有的元素，写作

$$S_3 = S_1 \cap S_2.$$

所谓两集之差（$S_1 - S_2$）是指这样一个集，它包含着除属S_2之外的S_1的所有点。

如果$S_2 \subset S_1$，则把本征差（$S_1 - S_2$）叫做相对于S_1的补集$\overline{S_2}$，并写作

$$S_1 - S_2 = \overline{S}_2(S_1).$$

很明显，上述集的各种运算，在图1中可一目了然地用维纳图解加以描述。

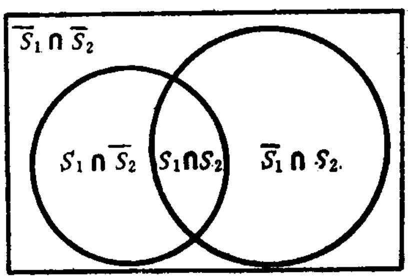


图 1

集的并和交的运算：

交换律

$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$，$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$；

结合律

$(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3)$，

$(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$；

分配律

$S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$，

$S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$。

集　　列

集列一般是指集S_1，S_2……的有限或可数序列。如果对于所有的i有

$$S_i \subset S_{i+1},$$

则集列S_1，S_2……称为非减集列。若

$$S_i \supset S_{i+1},$$

则称为非增集列。

非减和非增集列统称为单调集列。

为了实用的目的，把集列S_1，S_2，……的并，以非交集列之并的形式表示较为方便

$$\bigcup_{\alpha} S_\alpha = S_1 \cup S_2 \cup \cdots\cdots \cup S_\alpha = S_1 \cup [S_2 - (S_2 \cap S_1)] \cup \times \{S_3 - [S_3 \cap (S_2 \cup S_1)]\}.$$

如果集列 S_1，S_2，……在R内，则由所有属于该集列的 s 组成的集 S^*，称为集列的上限；而由除有限个元素外所有属于该集列的元素 s 组成的集 S_*，称为集列的下限。

如果 $S^* = S_*$，则集列有极限 $\lim S_\alpha$.

非减集列的极限等于该集列所有集的并

$$\lim S_\alpha = \bigcup_\alpha S_\alpha,$$

而非增集列的极限等于该集列所有集的交

$$\lim S_\alpha = \bigcap_\alpha S_\alpha.$$

集　类

在R空间里按一定的特征或性质把集归并，其总和称为集类F。

如果R空间里的非零类具有如下性质，则称之为完全可加类：

1. 整个空间R属于F

$$R \in F; \tag{5}$$

2. 如果集 S_1，S_2，……属于F，则它们的并也属于F

$$\bigcup_\alpha S_\alpha \in F; \tag{6}$$

3. 如果S属于F，则S的补集也属于F

$$\overline{S} \in F. \tag{7}$$

线性点集

区间E是指被包含在数轴上某两点 a 和 b 之间的一些实数 e 的数列。它可分为：

开区间(a, b)——$a<e<b$；

闭区间$[a, b]$——$a \leqslant e \leqslant b$；

半开右闭区间$(a, b]$——$a<e\leqslant b$；

半开左闭区间$[a, b)$——$a\leqslant e<b$.

在空间R内，若点或区间的类 $\mathfrak{B}$ 满足可加性条件（5），（6）和（7），则称之为波莱尔域(Борелевское поле)。

波莱尔域可由 E_1，E_2，……区间的有限或可数序列来建立，其方法是把一些集并入该序列，而这些集是通过对 E_1，E_2，……施行有限或可数次并、交及补的运算所组成的。

***n* 维空间 R_n 内的点集**

由 n 个实数 e 组成的数组，可视为 n 维空间 R_n 的一个点或一个向量 e 。

如给出点 a $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和点 b $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则 R_n 空间内的 n 维开区间E是指由一组不等式 $a_i<e<b_i$ 而定义的点 e $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的集，其中 $i=1,2,\cdots, n$.

用类似的方式可确定 R_n 空间的闭区间和半开区间。

在R_n空间里所有满足方程$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n)=0$的点集称为超曲面。如果$\varphi$是线性方程，则这种超曲面称为超平面。

如果n维空间的集合S是由坐标$e_1, e_2, \cdots, e_k$而产生的，则R_n内所有的点，凡是满足条件$(e_1, e_2, \cdots, 0, \cdots, 0)\subset S$的，其集叫做基为$S$的柱面集

在某些应用问题中，经常用集合论来描述和计算不同事件。关于集合论的细节可参阅文献[38]、[17]和[36]。

§3. 概率论的一般知识

基本概念

为了表示事件及其出现概率之间的联系，常利用概率空间(R, F, P)。

函数P称为波莱尔域的概率函数。该函数应满足如下条件：

1. 与任何事件$S\in R$相对应、并称之为S事件之概率的数$P(S)$，应是非负实数。

2. 如果$S_1, S_2, \cdots\cdots$是F内的一个两两不相交集的可数集列，则

$$P(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} P(S_\alpha). \tag{8}$$

3. 在事件空间R里，肯定出现的事件的概率应等于1，

$$P(R)=1. \tag{9}$$

若$S_1\in F$和$S_2\in F$，则关系式

$$P(S_2/S_1)=\frac{P(S_1\cap S_2)}{P(S_1)} \tag{10}$$

称为事件S_2的条件概率，即事件S_2出现的概率是以事件S_1已发生为前提条件。

若

$$P(S_2/S_1)=P(S_2)\text{或}P(S_1/S_2)=P(S_1). \tag{11}$$

则事件S_1和S_2认为是独立的。

基本定理

概率的加法定理

$$P(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} P(S_\alpha)-\sum_{\beta>\alpha=1}^{\infty} P(S_\alpha\cap S_\beta)+\sum_{\gamma>\beta>\alpha=1}^{\infty} P(S_\alpha\cap S_\beta\cap S_\gamma)-\cdots\cdots; \tag{12}$$

概率的乘法定理

若$P(S_1)>0$, $P(S_1\cap S_2)>0$, $P(S_1\cap S_2\cap S_3)>0$, $\cdots$，则

$$P(\bigcap_{\alpha=1}^{n} S_\alpha)=P(S_1)P(S_2/S_1)P(S_3/S_1\cap S_2)\cdots P(S_n/S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_{n-1}). \tag{13}$$

随 机 量

如果对于每个实数b来说，所有$e\in R$的集E_b属于$\mathfrak{B}$，而对这些e有$X(e)\leqslant b$,

那末在所有样本点 $e\in R$ 中确定的单值实函数 $X(e)$，称为概率空间 $(R, \mathfrak{B}, P)$ 的随机量。

如果 $\mathfrak{B}$——波莱尔集类，在一条实直线 R_1 上，则随机量 $X(e)$ 表示的就是这一直线的样本点 e。

为了书写方便，随机量用 X 来表示，而其具体的值则用 x 表示。

表示随机量值及其相应概率间之联系的每个关系式，叫做**概率分布律**，常常以分布函数或分布密度的形式表示。

所谓**分布函数**，就是随机变量 X 取值不大于 x 时的概率

$$F(x)=P(X\leqslant x).$$

$F(x)$ 的导数称为**分布密度**

$$f(x)=F'(x).$$

随机量落在区间 $a\leqslant x<b$ 内的概率按下式计算：

$$P(a\leqslant x<b)=F(b)-F(a). \tag{14}$$

随机量的数字特征

随机量所有可能的取值及其出现概率之乘积的和，称为**数学期望** M。离散型随机量的数学期望 m_x 由加和

$$m_x=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{15}$$

来计算，而对连续型随机量则按积分式

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{16}$$

计算。

k 阶随机量的**原点矩**是指随机量的 k 阶数学期望

$$\alpha_k=M(X^k).$$

量 $\mathring{X}=X-m_x$ 称为中心化的随机量，而 $\mathring{X}^k$ 的数学期望—— k 阶中心矩

$$\nu_k=M(\mathring{X}^k).$$

随机量散布的中心位置常用数学期望 m_x 表征，而其对 m_x 的离散程度则用**二阶中心矩**或**方差**表示：

$$D(X)=\nu_2=M(\mathring{X}^2).$$

计算方差时，常用公式

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X) \tag{17}$$

为了更明显地表征散布程度，常用均方差或标准差

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}.$$

分布曲线的偏度，一般用**非对称系数**来表征

$$S_k = \frac{\nu_3}{\sigma^3},$$

曲线顶点的位置是用峰度

$$E_x = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3$$

来描述的。

对应于概率的局部最大值的随机量，称为众值 Md。有单众值、双众值和反众值概律分布之别。

如果 $P(X < Me) = P(X > Me)$，
则随机量之值称为中位值 Me。

概率的正态分布律

正态分布律可由如下形式的分布密度

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

来表示。式中 m_x——X的数学期望；σ——X的标准差。

在正态分布情况下，分布曲线是单众值的，$S_k = 0$，$E_x = 0$.

落入区间$[a, b)$的概率按下式计算：

$$P(a \leqslant x < b) = \frac{1}{2}[\Phi(t_b) - \Phi(t_a)], \tag{19}$$

式中 $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$——表列的概率积分值；$t_a = \frac{a - m_x}{\sigma}$，$t_b = \frac{b - m_x}{\sigma}$——标准化了的 a，b 值。

$\Phi(t)$值列于附录 1 中。

等密度分布律

若随机量的密度在 α 至 β 的区间内有

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - \beta} & 当 x \in [\alpha, \beta], \\ 0 & 当 x \notin [\alpha, \beta], \end{cases} \tag{20}$$

则说随机量均匀地分布在该区间内。

x 的分布函数有如下形式：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 当 x < \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & 当 x \in [\alpha, \beta], \\ 1 & 当 x > \beta. \end{cases} \tag{21}$$

均匀分布的主要数字特征为：

$$m_x=\frac{\alpha+\beta}{2};\qquad D(x)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12};$$
$$S_k=0;\qquad E_x=0.\tag{22}$$

落入区间（a，b）的概率按下式计算：

$$P(a<X<b)=\frac{b-a}{\beta-\alpha}.\tag{23}$$

二元随机量组

二元随机量X和Y（平面上的两个点或R_2内的两个向量）的分布函数是指$X<x$和$Y<y$时的概率

$$F(x,\ y)=P(X<x,\ Y<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,\ y)dx\,dy.$$

表达式$f(x,\ y)=\dfrac{\partial^2F(x,\ y)}{\partial x\ \partial y}$称为$X$和$Y$的分布密度。

在另一个随机量取定值的条件下，所确定的这个随机量的分布律，叫该随机量的条件分布律：

$$f(x/y)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,\ y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}.$$

若
$$f(x,y)=f(x),\tag{24}$$
则称随机量X和Y是独立的。

若X和Y是独立的，则

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy.\tag{25}$$

二元随机量组散布的中心位置，可用一阶原点矩

$$\alpha_{1,0}=M(X^1Y^0)=m_x,\qquad \alpha_{0,1}=M(X^0Y^1)=m_y$$

来表征，而在坐标轴方向上的散布，则用二阶中心矩表示：

$$\nu_{2,0}=M(\mathring{X}^2\mathring{Y}^0)=M(\mathring{X}^2)=D_x,$$
$$\nu_{0,2}=M(\mathring{X}^0\mathring{Y}^2)=M(\mathring{Y}^2)=D_y.$$

二维随机量组的一阶混合矩常称做相关矩

$$K_{xy}=M(\mathring{X}\mathring{Y})=M[(X-m_x)(Y-m_y)]=M[XY]-m_xm_y.\tag{26}$$

X和Y之间线性相关的紧密程度用相关系数

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\tag{27}$$

来表征。

对于不相关的随机量$K_{xy}=r_{xy}=0$.

二元随机量组的正态分布律

二元随机量组之分布的密度表达式为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

当一个随机量取定值时，另一随机量的条件数学期望可按下式计算：

$$m_{y/x}=m_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x), \tag{28}$$

而其条件标准差为

$$\sigma_{y/x}=\sigma_y\sqrt{1-r^2}. \tag{29}$$

若椭圆的所有点具有相同的分布密度，即 $f(x)=\text{const}$，则称该椭圆为等密度椭圆（散布椭圆）。

散布椭圆中心的坐标为 m_x 和 m_y，而椭圆轴和坐标轴之间的夹角可由下式求解：

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}. \tag{30}$$

为了把正态分布律导为正则形式，需将该组的坐标轴与散布椭圆 的轴 ξ 和 η 重合，并求出主标准差

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\xi^2&=\sigma_x^2\cos^2\alpha+r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha;\\ \sigma_\eta^2&=\sigma_x^2\sin^2\alpha-r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

正则型二维随机量组的密度，具有 $m_\xi=0$ 和 $m_\eta=0$ 的独立随机量组的形式

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}-\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}}. \tag{32}$$

随机点落入散布椭圆 B_k 的概率按下式计算：

$$P[(\Xi,H)\subset B_k]=1-e^{-\frac{k^2}{2}}, \tag{33}$$

式中 $k=\frac{a}{\sigma_\xi}=\frac{b}{\sigma_\eta}$ 为椭圆两半轴与主标准差之比。

函数 $P=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$ 的值列在附录 2 中。

n 元随机量组

n 元随机量组 $X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$（n 维空间的一些点或 R_n 内的向量）的分布函数按下式确定：

$$P[(X_1<x_1)(X_2<x_2)\cdots(X_n<x_n)]=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int^{x_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

对独立随机量有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

某一随机点落入 n 维域 ω 内的概率可用 n 重积分

$$P[X_1,X_2,\cdots,X_n)\subset\omega]=\int\underset{\omega}{\cdots}\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

来确定。这与该组的如下数字特征有关：

n 个数学期望 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，

n 个方差 $D_1,D_2,\cdots,D_n$，以及 $i\neq j$ 时的 $n(n-1)$ 个相关矩 $K_{ij}=M(\mathring{X}_i\mathring{X}_j)$.

相关矩常以相关矩阵的形式表示为

$$\mathbf{K}_x=\begin{Vmatrix}K_{11} & K_{12}\cdots K_{1n}\\ & K_{22}\cdots K_{2n}\\ & \cdots\cdots\\ & K_{nn}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}D_1 & K_{12}\cdots K_{1n}\\ & D_2\cdots K_{2n}\\ & \cdots\cdots\\ & D_n\end{Vmatrix}.$$

所谓标准化的相关矩阵，是指以相关系数为其元素的矩阵

$$\boldsymbol{r}_x=\begin{Vmatrix}1 & r_{12}\cdots r_{1n}\\ & 1\cdots r_{2n}\\ & \cdots\cdots\\ & 1\end{Vmatrix}.$$

随机量函数的数字特征

若 c 为非随机量，则

$$M(c)=0,\quad D(c)=0.$$

对于随机量线性函数之和来说，其数学期望和方差可按下式计算：

$$M[\sum_{i=1}^{n}(a_iX_i+b_i)]=\sum_{i=1}^{n}a_iM(X_i)+\sum_{i=1}^{n}b_i, \tag{34}$$

$$D[\sum_{i=1}^{n}(a_iX_i+b_i)]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)+2\sum_{i<j}a_ia_jK_{ij}. \tag{35}$$

为求随机量之积的数学期望，可用下式

$$M(XY)=M(X)M(Y)-K_{xy}. \tag{36}$$

若随机量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立的，则有

$$M(\prod_{i=1}^{n}X_i)=\prod_{i=1}^{n}M(X_i), \tag{37}$$

和

$$D(X_iX_j)=D(X_i)D(X_j)+m_{x_i}^2D(X_j)+m_{x_j}^2D(X_i). \tag{38}$$

对于中心化的随机量 $\mathring{X}_1,\mathring{X}_2,\cdots,\mathring{X}_n$ 有

$$D(\mathring{X}_1\mathring{X}_2\cdots\mathring{X}_n)=D(\mathring{X}_1)D(\mathring{X}_2)\cdots D(\mathring{X}_n), \tag{39}$$

若随机量 X 和 Y 之间存在着函数关系

$$Y=aX+b,$$

则相关矩可按下式确定

$$K_{xy}=aD_x. \tag{40}$$

在精度估算时，为了确定随机量函数的数字特征，常用以下定理：

定理1． 若随机向量 **Z** 等于随机向量 **X** 与 **Y** 之和，则相关矩阵 $\mathbf{K}_z$ 等于两被加项相关矩阵之和

$$\mathbf{K}_z=\mathbf{K}_x+\mathbf{K}_y. \tag{41}$$

定理2． 线性函数 $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}+\mathbf{B}$ 的相关矩阵为

$$\mathbf{K}_y=\mathbf{AK}_x\mathbf{A}^T, \tag{42}$$

式中 $\mathbf{A}^T$——线性函数之系数的转置矩阵。

定理3． 若 Y 和 Z 是随机量 X,V,W 的线性函数，并具有共同分量 X_i，

$$\left.\begin{aligned}Y&=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+V,\\ Z&=\sum_{i=1}^{n}b_iX_i+W,\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

则它们之间的相关系数为

$$r_{yz}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_iD_{x_i}}{\sigma_y\sigma_z}. \tag{44}$$

在实际估算时，常取系数 a_i 和 b_i 之值为 +1 或 −1。这时（44）式有如下形式：

$$r_{yz}=\frac{\sum_{1}^{n}\pm D_{x_i}}{\sigma_y\sigma_z}. \tag{45}$$

当 Y 和 Z 中的 X_i 带相同符号时，D_{x_i} 的前面应为正号；而当 X_i 带不同符号时，D_{x_i} 前应为负号。

定理4． 若 Y 和 Z 是随机量的线性函数

$$\left.\begin{aligned}Y&=a_1X_1+V,\\ Z&=a_2X_2+W,\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

并具有相关系数为 r_{x_1,x_2} 的非独立分量 X_1 和 X_2 时，它们之间的相关系数为

$$r_{yz}=\frac{a_1a_2r_{x_1x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_y\sigma_z}. \tag{47}$$

证明：Y 和 Z 之间的相关矩阵为

$$M_{yz}=M(YZ)-M(Y)M(Z). \tag{48}$$

把（46）式中的 Y 和 Z 值代入等式的右边，则得

$$M(YZ)=M[(a_1X+V)(a_2X_2+W)]=a_1a_2M(X_1X_2)+a_1M(X_1W)+a_2M(X_2V)+M(VW);$$

$$M(Y)M(Z)=M(a_1X_1+V)M(a_2X_2+W)=a_1a_2M(X_1)M(X_2)+a_1M(X_1W)+a_2M(X_2V)+M(VW),$$

将所得的结果代入(48)式，即得

$$K_{yz}=a_1a_2[M(X_1X_2)-M(X_1)M(X_2)]=a_1a_2K_{x_1x_2},$$