# 目　录

## 第一章　不等式



## 第二章　直线和圆

## 第三章 圆锥曲线



## 第四章 直线、平面、简单几何体

## 第五章 排列、组合、二项式定理和概率



## 附录 参考答案及提示

# 第一章　不 等 式

看下面的实际问题：

有边长为 $a,b(a>b)$的长方形铁板，现要用它围成一个底面是正方形的长方体贮水箱的侧面，问是按长还是按宽来围所成的长方体贮水箱贮水更多？

这个问题实际上就是比较$\frac{1}{16}a^2b$与$\frac{1}{16}ab^2$的大小，即不等式问题.

在现实生活中，像上面这一类的实际问题大量存在，要解决这一类实际问题，就必须学习本章不等式的内容.

## 第一讲　不等式的性质

**热点聚焦**

我们知道，从初中开始，为了更好地研究和运用数，引进了字母表示数，从而就有了字母间的运算而得出的表示数的代数式.数之间的大小关系自然可以表现在代数式之间.前面我们已经研究了一些代数式之间不等的式子即不等式，如一元一次不等式、一元二次不等式和含有绝对值的不等式的解法，求函数的定义域，证明函数的单调性，求含参数的方程有解等等，这些问题都要利用不等式的各种变形手段，所以不等式的变形手段是研究不等式的关键，有必要对它们进行系统的研究.

不等式的变形手段就是本讲要研究的不等式的三个基本性质及八个性质.

不等式的三个基本性质就是利用两个实数作差运算而得出的是正值、负值还是零，判断出这两个实数的大小问题的方法.它是整个不等式变形的基础，是推导出不等式八个性质的依据.

不等式八个性质是不等式本身的变换及运算依据，即不等式可交换、传递，可加、减、乘、除、乘方、开方，同向相加、相乘.但要注意，可乘性性质两边同乘的数一定要判断出是正数、负数、还是零.乘方、开方、同向相乘性质要求不等式两边都是

冲刺北大清华

非负数．下面就不等式的性质的应用通过例题做一探讨．

**领悟捷径**

**例1** 已知 $a\in\mathbf{R}$，比较 $\dfrac{1}{1-2a+a^2}$ 与 $1+2a+a^2$ 的大小．

**解题快车道**

$$\frac{1}{1-2a+a^2}-(1+2a+a^2)$$
$$=\frac{1}{(1-a)^2}-(1+a)^2$$
$$=\frac{1-(1-a^2)^2}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{-a^2(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})}{(1-a)^2}.$$

∵ $a^2\geqslant 0,(1-a)^2>0,$

∴ (1)当 $a=0$ 或 $a=\pm\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{1}{1-2a+a^2}=1+2a+a^2$；

(2)当 $a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{1}{1-2a+a^2}<1+2a+a^2$；

(3)当 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ 且 $a\neq 1,a\neq 0$ 时，$\dfrac{1}{1-2a+a^2}>1+2a+a^2$．

**思路巧点拨**

由要比较的两个代数式的结构可以看出，只能由基本性质作差与零比较来判别．

为了能与零比较，往往要变成可以判断正负的积、平方和等形式．

如含参数一般要对参数讨论．

**学有一得**

比较法是比较两个代数式大小的基本方法．

**例2** 判断下列命题正确与否．

(1)若 $a<b<0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；　　(2)若 $a>b$，则 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a>\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$；

(3)若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$；　　(4)若 $a>b>c$，则 $a|c|>b|c|$．

**解题快车道** (1)∵ $a<b<0$，

∴ $ab>0$．

∴ $\dfrac{1}{ab}>0$．

∴ $a\cdot\dfrac{1}{ab}<b\cdot\dfrac{1}{ab}$．

∴ $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$．

∴ (1)错．

(2)∵ 函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，又 $a>b$，

**思路巧点拨**

要判断 $\dfrac{1}{a}$ 与 $\dfrac{1}{b}$，利用性质同乘以 $\dfrac{1}{ab}$ 来处理．

指数、对数、三角函数等大小的判断一般要利用单调性，也可用特殊值法．如(2)取 $a=1,b=$

$\therefore \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{a}<\left(\frac{1}{2}\right)^{b}.$

$\therefore$ (2)错.

(3) $\because \qquad a>|b|\geqslant 0,$

$\therefore \qquad a^2>|b|^2=b^2.$

$\therefore$ (3)正确.

(4) $\because \qquad a>b,|c|\geqslant 0,$

①当 $c\neq 0$ 时,$|c|>0$,

$\therefore \qquad a|c|>b|c|.$

②当 $c=0$ 时,$|c|=0$,

$\therefore \qquad a|c|=b|c|=0.$

$\therefore$ (4)不一定正确.

0,$\frac{1}{2}>1$ 错.不等式两边同乘一个数,一定要考虑这个数的取值范围.

学有一得

---

**例3** 已知 $a>b>0,c<d<0$.求证 $\sqrt{-\frac{a}{d}}-a^2c>\sqrt{-\frac{b}{c}}-b^2d$.

解题快车道

$$\left.\begin{array}{l}c<d<0\\ \frac{1}{cd}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{cd}\cdot c<\frac{1}{cd}\cdot d\Rightarrow\frac{1}{d}<\frac{1}{c}<0\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-\frac{1}{d}>-\frac{1}{c}>0\\ \text{又}\quad a>b>0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$-\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}>0\Rightarrow\sqrt{-\frac{a}{d}}>\sqrt{-\frac{b}{c}}.$ ①

又 $\qquad a>b>0,$

$\therefore \qquad a^2>b^2>0.$

$\because \qquad -c>-d>0,$

$\therefore \qquad -a^2c>-b^2d.$ ②

由①②同向相加,可得

$$\sqrt{-\frac{a}{d}}-a^2c>\sqrt{-\frac{b}{c}}-b^2d.$$

思路巧点拨

由不等式两边的结构可以看出,两边的形状一样,所以只要考虑用不等式的性质.

本题充分展示了不等式性质中条件的巧妙运用.

学有一得

---

**例4** 已知 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3}$.求 $2\alpha,2\beta,3\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的取值范围.

解题快车道

由 $\quad\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

思路巧点拨

本题是已知角的范围,求相关角的范

相加，得

$$-\frac{\pi}{2}<2\alpha<\frac{5\pi}{6}.$$

又由

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{3}\\ \Rightarrow\quad -\frac{\pi}{3}<-\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}$$

相加，得

$$-\frac{\pi}{3}<2\beta<\pi.$$

又设

$$3\alpha-\frac{\beta}{3}=m(\alpha+\beta)+n(\alpha-\beta)=(m+n)\alpha+(m-n)\beta.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}m+n=3\\ m-n=-\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{4}{3},\\ n=\dfrac{5}{3}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad 3\alpha-\frac{\beta}{3}=\frac{4}{3}(\alpha+\beta)+\frac{5}{3}(\alpha-\beta).$$

由

$$\left.\begin{aligned}0<\frac{4}{3}(\alpha+\beta)<\frac{2\pi}{3}\\ -\frac{5\pi}{6}<\frac{5}{3}(\alpha-\beta)<\frac{5\pi}{9}\end{aligned}\right\}$$

相加，得

$$-\frac{5\pi}{6}<3\alpha-\frac{\beta}{3}<\frac{11\pi}{9}.$$

围的问题，解这种题一定要把要求角写成已知角的线性形式．而不能分别求出 $\alpha,\beta$ 的范围后再去求 $3\alpha-\frac{\beta}{3}$．

学有一得

**精彩小结**

通过上述不等式性质的介绍与四个例题的讲解，使我们明白在应用不等式性质解题时，应该注意掌握以下两点：

1．洞悉不等式各个性质的结构特征，是找出解题线索，启发解题思维的重要依据．由于不等式的三个基本性质是作差与零比较而得大小关系的结构，所以它是解可以通过作差后易与零比较大小的题型的依据；不等式的八个性质又主要是两边同加、同乘、相加、相乘、乘方、开方等结构，所以它主要解不等式两边通过以上相同变形而得结构基本相同的题型．不过在用同乘一个数时，一定要分清这个数是正数、负数还是零；在用相乘、乘方、开方这三个性质时，一定要在正数上．八个性质中虽然没有同减、相减、相除性质，但是它们都可用同加、相加、相乘性质来解决．

2．概括题型结构，探讨解题规律，总结解题方法是熟悉知识，提高解题能力的重要途径．本讲主要出现四种题型．

(1)比较大小型.一般用比差法,它的步骤是:作差——变形——判断,这种方法关键在于第二步变形,一般是变形为积或平方和的形式,如果含参数,就要对参数进行分类讨论.

(2)判断对错型.一般方法直接用不等式性质即可;特殊值法也是解这种题型的常用方法,特别在选择题或填空题中;有时还要用函数单调性.

(3)证明型.根据要证不等式两边的结构来选择是用比差法还是直接用不等式性质.

(4)求范围型.把要求的角用已知角表示出来后,再用同向不等式相加等性质来求解即可,在这里一般不能连续用同向不等式相加的方法来求范围.

**动手探索**

## 一、选择题

1. 若 $a,b,c,d$ 四数满足:① $d>c$,② $a+b=c+d$,③ $a+d<b+c$,则有(　　).

A. $b>c>d>a$　　B. $a>d>c>b$

C. $d>b>a>c$　　D. $b>d>c>a$

2. “$a>b$”是“$a\log_m{}^n>b\log_m{}^n$”$(0<m<n\leqslant 1)$成立的(　　)条件.

A. 充分非必要　　B. 必要非充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

3. 若 $0<a<1$,则下列不等式中正确的是(　　).

A. $(1-a)^{\frac{1}{3}}>(1-a)^{\frac{1}{2}}$　　B. $\log_{1-a}(1+a)>0$

C. $(1-a)^3>(1+a)^2$　　D. $(1-a)^{1+a}>1$

## 二、填空题

4. 若 $a>b>c>1$,则 $\sqrt{abc}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ac}$ 的大小顺序是________.

5. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,使 $a>b$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的条件是________.

6. 若 $-1<a<b<1$, $-2<c<3$,则 $(a-b)\cdot c$ 的取值范围是________.

## 三、解答题

7. 设 $x\in\mathbf{R}$,试比较 $2x^2-x-1$ 与 $x^2+1$ 的大小.

8. 若 $a>b$, $c>d$,则 $\frac{a}{d-c}-a<\frac{b}{d-c}-b$.

9. 设 $1<x<y<4$,试求 $x+y$, $x-2y$, $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

## 四、探索题

10. 有一所学校,原来是一个长方形布局,市政府对这所学校进行规划,必须改成正方形布局,但要求要么保持原面积不变,要么保持原周长不变,那么这所学校应选哪种布局对学校来说有利.

# 第二讲 平均值不等式

热点聚焦

看下面一个问题：

某学生要参加 800m 赛跑，平时训练只训练三种速度：快速$\sqrt{a}$、中速$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$、慢速$\sqrt{b}$，且知只用一种速度如快速跑无法跑完；用两种速度各跑一半如快速、中速搭配也无法跑完．在比赛时，该学生应选择哪种速度更快完成比赛．

显然选择一种速度时，即中速最佳，它需用的时间是 $800\div\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=1600\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})$；选择两种速度时，以快速、慢速搭配最佳，它需用的时间是 $400\div\sqrt{a}+400\div\sqrt{b}=400(\sqrt{a}+\sqrt{b})\div\sqrt{ab}$，所以只要比较 $a+b$ 与 $2\sqrt{ab}$ 的大小就可判断选择方案．而 $a+b$ 与 $2\sqrt{ab}$ 是和与积的代数式的大小比较问题，这一类问题直接利用不等式的性质来判断往往比较繁琐．那么有没有更好的依据来解决这类问题呢？答案是肯定的，那就是本讲要研究的平均值不等式．

我们只要掌握下面两个平均值不等式：

1．如果 $a,b$ 是正数，那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时，取"＝"号）．

2．如果 $a,b,c$ 是正数，那么$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取"＝"号）．

它们是由两个重要的不等式变形而得出的，有了它们就可以很快解决和与积结构的一些不等式问题．倘若再与不等式的性质结合，还可以处理其他结构的不等式．下面就平均值不等式举例说明它能解决的问题．

领悟捷径

**例1** 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，且 $a+b+c=1$，求证：

(1) $abc\leqslant\frac{1}{27}$；　　(2) $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$；

(3) $ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$；　　(4) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

**解题快车道**　(1)由平均值不等式

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

(2)∵

$$\left.\begin{array}{r}a^2+b^2\geqslant 2ab\\ b^2+c^2\geqslant 2bc\\ c^2+a^2\geqslant 2ca\end{array}\right\}$$

三式相加,得

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

再两边同加上 $a^2+b^2+c^2$,得

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2.$$

∴ $$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}.$$

(3)∵ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$,

由(2)可知 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$,

∴ $$(a+b+c)^2\geqslant 3ab+3bc+3ca.$$

∴ $$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}.$$

(4)

$$\left.\begin{array}{r}a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c}}>0\end{array}\right\}$$

两式相乘,得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$

∴ $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

**思路巧点拨**

(1)题是和与积结构,直接套用公式即可证明.

(2)题是平方和与和,必须先推出关键的不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

(3)题是和与和,一般两两结合用重要不等式再相加.

(4)题是倒数和与积,通常由它们相乘用重要不等式.

**学有一得**

巧妙利用平均值不等式的结构特征去处理符合某些特征的不等式,是用平均值不等式解题的关键.

---

**例2**　设 $a,b,c$ 为不等边三角形的三边,求证 $\frac{c}{a+b-c}+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}>3$.

**解题快车道**　令 $x=a+b-c,y=b+c-a,z=a+c-b$,则 $x,y,z\in(0,+\infty)$,且不全相等.

又∵ $$x+y+z=a+b+c,$$

∴ $$a=\frac{x+z}{2},b=\frac{x+y}{2},c=\frac{y+z}{2}.$$

**思路巧点拨**

由于要证不等式元较多,且较复杂,考虑适当换元,使它们之

冲刺北大清华

$\therefore$ 要证不等式就是 $\dfrac{\frac{y+z}{2}}{x}+\dfrac{\frac{x+z}{2}}{y}+\dfrac{\frac{x+y}{2}}{z}>3$,

即

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+x}{z}>6.$$

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)>6.$$

而

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2,$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}=2,$$

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geqslant 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}=2,$$

因为 $x,y,z$ 不全相等,所以以上三式不全取“=”号.

$\therefore$

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}>6,$$

即

$$\frac{c}{a+b-c}+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}>3.$$

间的关系容易用重要不等式.

**学有一得**

---

**例3** 已知 $x>1$,求函数 $y=x+\dfrac{9x}{x-1}$ 的最小值.

**解题快车道1** $\because$ $x>1\Rightarrow x-1>0$,

$\therefore$

$$y=x+\frac{9x-9+9}{x-1}$$

$$=x+9+\frac{9}{x-1}$$

$$=x-1+\frac{9}{x-1}+10$$

$$\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{9}{x-1}}+10=16.$$

当且仅当 $x-1=\dfrac{9}{x-1}$,即 $x=4$ 时,$y$ 取最小值 16.

**解题快车道2** 令 $t=\dfrac{9x}{x-1}\Rightarrow tx-t=9x$

$$\Rightarrow tx-t-9x=0\Rightarrow(t-9)(x-1)=9.$$

又$\because$ $x>1\Rightarrow t>9$,

**思路巧点拨**

求和式最小值用重要不等式要配成积为定值的和式.这时注意要在正数基础上,且等号要能取到.即有“一正、二定、三相等”条件.

通过换元使原题变为条件最值问题.而条件可变为:$(x-1)(t-9)=9$ 或 $\dfrac{9}{t}$

$\therefore \quad y=x+\dfrac{9x}{x-1}=x+t$

$$=(x-1)+(t-9)+10$$

$$\geqslant 2\sqrt{(x-1)(t-9)}+10=16.$$

当且仅当 $x-1=t-9$，即 $x=4$ 时取最小值 16.

**解题快车道 3** 由解题快车道 2 知

$$tx-t=9x\Rightarrow 9x+t=tx$$

$$\Rightarrow \frac{9}{t}+\frac{1}{x}=1.$$

$\therefore$

$$y=x+\frac{9x}{x-1}$$

$$=(x+t)\cdot 1$$

$$=(x+t)\cdot\left(\frac{9}{t}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{9x}{t}+\frac{t}{x}+10$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{9x}{t}\cdot\frac{t}{x}}+10=16.$$

当且仅当 $\dfrac{9x}{t}=\dfrac{t}{x}$，即 $x=4$ 时，$y$ 取最小值 16.

$+\dfrac{1}{x}=1$ 两种形式.

若条件为 $(x-1)(t-9)=9$，则函数就要配成 $y=(x-1)+(t-9)+10$；若条件变成倒数和为定值的形式：$\dfrac{9}{t}+\dfrac{1}{x}=1$，就要用相乘来解决.

**[illegible]**

---

**例 4** 已知 $a>b>0$，求证 $2a^4+\dfrac{1}{ab-b^2}\geqslant 6$，并指出"="号在什么时候取得.

**解题快车道** $\because \quad a>b>0$,

$\therefore \quad b>0,\ a-b>0.$

$\therefore \quad ab-b^2=b(a-b)\leqslant\left(\dfrac{b+a-b}{2}\right)^2.$

当且仅当 $b=a-b$，即 $a=2b$ 时取"="号.

$\therefore \quad 0<ab-b^2\leqslant\dfrac{a^2}{4}$,

即

$$\frac{1}{ab-b^2}\geqslant\frac{4}{a^2}.$$

$\therefore$

$$2a^4+\frac{1}{ab-b^2}\geqslant 2a^4+\frac{4}{a^2}$$

$$=2a^4+\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^2}$$

**思路巧点拨**

本题是求最值型证明题.证明时要配成和(或积)为定值的积(或和)的形式，即 $ab-b^2=b(a-b)$，对 $b$ 来说和是定值. $2a^4+\dfrac{4}{a^2}=2a^4+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{a^2}$.

$$\geqslant 3\sqrt[3]{2a^4\cdot\frac{2}{a^2}\cdot\frac{2}{a^2}}=6.$$

学有一得

当且仅当 $2a^4=\frac{2}{a^2}$，即 $a=1$ 时取“=”号.

$\therefore$ 当且仅当 $\begin{cases}a=1,\\ a=2b\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时取“=”号.

$$\therefore \qquad 2a^4+\frac{1}{ab-b^2}\geqslant 6.$$

**精彩小结**

1. 平均值不等式不但可以处理几个正数的和与积结构的不等式，结合不等式性质及函数的单调性，还可以处理几个正数的平方和与和结构，倒数和与和结构，根式和与和结构及两两之积之和与和结构等等的不等式问题，但在处理这些结构型的不等式时，要注意与其他依据相结合来处理.下面就常见结构的不等式的处理方法归纳如下：

(1) $ab+bc+ca$ 与 $a+b+c$ 型

利用 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 与 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ 相结合.

(2) $a^2+b^2+c^2$ 与 $a+b+c$ 型

利用 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ 乘以 2 再加上 $a^2+b^2+c^2$ 即可.

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 与 $a+b+c$ 型

利用 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}>0$ 与 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}>0$ 同向相乘即可.

(4) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 与 $a+b+c$ 型

只要在(2)中每个字母开方代换即可.

2. 在用平均值不等式求最值或解最值型的不等式时，一定要紧扣“一正、二定、三相等”这三个条件，即每项都是正值，和或积是定值，几个项能同时相等；并巧妙利用“定值”这个条件对不等式进行分拆、组合、添加系数等使之变成可用平均值不等式的形式.倘若要连续用平均值不等式，必须保持每次取“=”号的一致性.

**动手探索**

## 一、选择题

1. 若 $x\in\mathbf{R}$，则下列不等式恒成立的是（　　）.

A. $\lg(x^2+1)\geqslant\lg(2x)$　　　　B. $\frac{1}{x^2+1}<1$

C. $x^2+1>2x$　　　　D. $\frac{(x+1)^2}{2}\geqslant 2x$

2. 下列函数中，最小值为 2 的函数是(　　).

A. $y=x+\frac{1}{x}$　　　　B. $y=\sin\theta+\sec\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin\theta+\csc\theta(0<\theta<\pi)$　　　　D. $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$

3. 当 $x>0$ 时，函数 $y=3x+\frac{1}{2x^2}$ 的最小值是(　　).

A. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$　　B. 3　　C. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{5}$　　D. $2\sqrt{6}$

## 二、填空题

4. 若 $x<0$，则 $y=\sqrt{2}+2x+\frac{4}{x}$ 的最________值为________.

5. 若 $0<a<1,0<b<1$，且 $a\neq b$，则 $a+b,2\sqrt{ab},2ab,a^2+b^2$ 这四个数从小到大的顺序为________________________.

6. 设 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，则函数 $y=x^2(1-3x)$ 的最大值为________.

## 三、解答题

7. 已知 $\alpha\in(0,1),\beta\in(0,1)$，且 $\alpha\neq\beta,A=\alpha\cdot\beta,B=(1-\alpha)(1-\beta)$，求 $A\cdot B$ 的取值范围.

8. 求证 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

9. 若 $a,b\in(0,+\infty)$，求证 $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

## 四、探索题

10. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，求证 $3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$.

# 第三讲 比较法、分析法、综合法

**热点聚焦** 每门学科都有它的最基本的依据，运用这些依据可以解决许多实际问题，但每个问题的解决都从最基本的依据出发是不现实的，不仅有时解法较复杂，而且有时甚至不可能．这时，就需要得出一些有用的结论来解决问题．这些结论必须经过严格的证明，不等式也是如此，从最基本的依据出发既证明了八个不等式性质，又证明了平均值不等式，利用它们还可以证明更多的不等式．那么如何才能完成一个结论的证明呢？这就要求我们要掌握证明问题的方法．本讲就不等式证明的三种基本方法：比较法、分析法、综合法做一探讨．

**1．比较法**

(1) 求差比较法．基本步骤：作差——变形——判断(大于 0 或小于 0)，常用于多项式结构．

(2)求商比较法．基本步骤：作商——变形——判断(大于 1 或小于 1)，常用于积或商结构．

**2．分析法**

就是"由果索因"，即由结论出发寻找每一步成立的充分条件(或充要条件)，最后一步寻找到的就是已知要完成证明的方法．

**3．综合法**

就是由已知出发逐步推导出欲证的不等式的方法．它往往是分析法的逆过程，表述简单，条理清楚，所以在实际证题时，往往用分析法分析，用综合法书写．

**领悟捷径**

**例1** 若 $0<x<1$，求证 $|\log_a(1-x)^5|>|\log_a(1+x)^5|$．

**解题快车道** (1)当 $a>1$ 时，

$|\log_a(1-x)^5|-|\log_a(1+x)^5|$

$=-5\log_a(1-x)-5\log_a(1+x)$

$=-5\log_a(1-x^2)$．

**思路巧点拨**

由于作差要能变形，故必须去绝对

∵ $0<x^2<1,$

∴ $\log_a(1-x^2)<0.$

∴ $|\log_a(1-x)^5|>|\log_a(1+x)^5|.$

(2)当$0<a<1$时，

$$|\log_a(1-x)^5|-|\log_a(1+x)^5|$$
$$=5\log_a(1-x)+5\log_a(1+x)$$
$$=5\log_a(1-x^2).$$

又 $0<1-x^2<1,$

∴ $\log_a(1-x^2)>0.$

∴ $|\log_a(1-x)^5|>|\log_a(1+x)^5|.$

**解题快车道2** ∵ $\log_{1+x}(1-x)<0,$

∴ $$\frac{|\log_a(1-x)^5|}{|\log_a(1+x)^5|}=\frac{|5\log_a(1-x)|}{|5\log_a(1+x)|}$$
$$=|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)$$
$$=\log_{1+x}\frac{1}{(1-x)}$$
$$=\log_{1+x}\frac{(1+x)}{(1-x)(1+x)}$$
$$=1-\log_{1+x}(1-x^2).$$

∵ $0<x<1,$

∴ $\log_{1+x}(1-x^2)<0.$

∴ $$\frac{|\log_a(1-x)^5|}{|\log_a(1+x)^5|}>1,$$

即 $|\log_a(1-x)^5|>|\log_a(1+x)^5|.$

值，而去绝对值必须分$a>1$与$0<a<1$来讨论.

比商法一般用于作商后易变形的不等式，如对数、指数不等式的一些证明问题.

本题作商容易变形，所以也可采用比商法.

**学有一得**

比较法的关键在于变形，而变形又应掌握是作差还是作商.

---

**例2** 已知$a>b>0$，求证$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

**解题快车道** 要证原不等式，只要证

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{2\sqrt a}\right)^2<\frac{1}{2}(\sqrt a-\sqrt b)^2<\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{2\sqrt b}\right)^2.$$

∵ $a>b>0,$

只要证

$$\frac{a-b}{2\sqrt a}<\sqrt a-\sqrt b<\frac{a-b}{2\sqrt b}.$$

**思路巧点拨**

由于本题要证的不等式较复杂，不易入手，所以采用分析法.用这种方法要利用不等式性质寻找简化的充分条件，才能逐渐向