初中数学基础知识

初中数学基础知识

无锡市教育局教研室

江苏人民出版社

初中数学基础知识
无锡市教育局教研室

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行　淮阴新华印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/32　印张 10.25　字数 220,000
1983 年 3 月第 1 版　1983 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—321,000 册

书号：7100·225　　定价 0.76 元
责任编辑　何震邦

编 者 的 话

本书着重介绍初中数学的基础知识，适合具有初中程度的青年工人和学生学习数学和系统复习，也可供初中数学教师教学参考。

本书有：第一篇代数、三角八章，第二篇平面几何七章．各章分基础知识、例题和练习三部分．编写时力图做到内容丰富，举例典型，以利于帮助广大具有初中文化程度的读者系统掌握初中数学的基础知识和基本技能．为了帮助读者灵活运用所学知识，提高分析问题和解决问题的能力，也选了部分有一定难度的例题和练习题．书后附有练习题的提示与答案。

本书第一篇代数、三角部分由周祥昌同志编写；第二篇平面几何部分由谈国大、程幼翔同志编写．全书由李永灿同志审阅和校订．此外，无锡市部分有经验的数学教师也认真参预讨论和修改，在此，向他们表示谢忱。

由于水平有限，错误和不当之处，一定不少，欢迎读者批评。

无锡市教育局教研室

一九八三年三月

目　录

第一篇　代数　三角 …… 1

第一章　实数 …… 1

第二章　代数式 …… 13

第三章　方程和方程组 …… 37

第四章　指数和常用对数 …… 75

第五章　不等式 …… 89

第六章　函数及其图象 …… 104

第七章　直线和圆的方程 …… 123

第八章　解三角形 …… 140

第二篇　平面几何 …… 155

第九章　直线　角　平行线 …… 155

第十章　定义　公理　定理 …… 164

第十一章　三角形 …… 171

第十二章　多边形 …… 192

第十三章　圆 …… 212

第十四章　相似形 …… 236

第十五章　轨迹和作图 …… 258

综合练习 …… 270

答案与提示 …… 277

第一篇　代数　　三角

第一章　实　　数

基　础　知　识

1．实数的概念

（1）正整数、负整数、正分数、负分数和零统称为有理数．有理数总可以表示为既约分数$\frac{m}{n}$的形式，其中m和n为互质的整数，n不等于零．

例如：10^5、-0.01、$\frac{2}{3}$、$\lg 1000$、$\sin 30°$、$\sqrt[3]{-8}$、$\sqrt{-\lg 0.1}$等都是有理数．

（2）无限不循环小数叫做无理数．

例如：$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{-6}$、$\lg 2$、$\log_3 5$、$\sin 10°$、$\cos 15°$等都是无理数．

（3）有理数和无理数统称为实数．

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

要证明一个数为有理数时，只要证明它可以被化成既约分数$\frac{m}{n}$．例如$0.\dot{3}=\frac{1}{3}$，所以$0.\dot{3}$是有理数．要证明一个数是无理数时，常用反证法．即假定这个数是有理数，可以用既约分数$\frac{m}{n}$来表示它，然后推导出矛盾来，那就证明了这个数不可能是有理数，故为无理数．例如，lg3为无理数，证明如下：

设lg3为有理数，令$\lg 3=\frac{m}{n}$，$\frac{m}{n}$为既约分数．则$10^{\frac{m}{n}}=3$．两边n次幂后得：$10^m=3^n$，等式左边只有质因数2、5，右边只有质因数3，所以这个等式不成立，因此lg3是无理数．

（4）规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴．实数和数轴上的点成一一对应．

（5）在数轴上原点的两旁，离开原点距离相等的两个点所表示的两个数叫做互为相反的数．

（6）一个正数的绝对值是它的本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零．

例如：

$$|a|=\begin{cases}a, & (a>0)\\ 0, & (a=0)\\ -a. & (a<0)\end{cases}$$

又如：

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & (x>1)\\ 0, & (x=1)\\ 1-x. & (x<1)\end{cases}$$

（7）实数比较大小的法则：

①正数大于零，正数和零大于负数；

②正数中，绝对值大的数大；负数中，绝对值大的数小；

③在数轴上，位置较左的点，它表示的数较小．

例如：$5>0$；$5>-3$；$0>-3$；$\sqrt{3}>1.732$；$-\sqrt{2}>-\sqrt{3}$；$\frac{\pi}{3.14}>1$．

2．实数的运算

（1）加法：同号两数相加，符号不变，绝对值相加；异号两数相加，把较大的绝对值减去较小的绝对值，符号取绝对值较大的加数的符号；两个相反数相加等于零；任何数同零相加，仍等于这个数．

例如：$\left(-\frac{1}{2}\right)+(-0.3)=-(0.5+0.3)=-0.8$；

$$(-0.5)+\left(+\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}；$$

$$(-5)+(+5)=0；$$

$$0+(-5)=-5．$$

表示几个正数、负数或者零相加的式子叫做这几个数的**代数和**．例如：$(+7)+(-5)+(-4)+(+10)$ 叫做 $+7$、-5、-4 和 $+10$ 四个数的代数和，也可以写做 $7-5-4+10$．

（2）减法：改变减数符号与被减数相加．

例如：$(-2.75)-(-0.45)=(-2.75)+(+0.45)$
$=-2.3$；

$$3\frac{1}{4}-\left(+\frac{1}{3}\right)=3\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)=2\frac{11}{12}；$$

$$0-(-9)=0+(+9)=9．$$

（3）乘法：两个非零实数相乘，将绝对值相乘，而积的符号是：同号得正，异号得负．任何数同零相乘，积等于

零。

例如：$\left(-3\frac{1}{7}\right)\times\left(-7\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{7}\times\frac{22}{3}=\frac{484}{21}=23\frac{1}{21}$；

$\left(-3\frac{1}{7}\right)\times\left(+\frac{3}{22}\right)=-\frac{22}{7}\times\frac{3}{22}=-\frac{3}{7}$；

$\left(-3\frac{1}{7}\right)\times 0=0$。

（4）除法：两个非零实数相除，将绝对值相除，而商的符号是：同号得正，异号得负。零除以任意一个非零实数，商为零。零不能作除数（无意义）。

例如：$(-6)\div(-14)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$；

$(+0.16)\div(-4)=-0.04$；

$0\div(-\sqrt{2})=0$。

（5）乘方：任何非零实数的乘方，将绝对值乘方，而结果的符号是：正数的任何次乘方为正；负数的奇次乘方为负，负数的偶次乘方为正。零的非零次方为零。零的零次幂没有意义。

例如：$(+2)^5=2^5=32$；　$(-2)^5=-2^5=-32$；

$(-2)^6=2^6=64$；　$0^{100}=0$。

（6）开方：正数的 n 次方根有一个是正的，称为它的 n 次算术根。负数的奇次方根有一个是负的，负数的偶次方根在实数范围内没有意义。零的算术根仍是零。

例如：$\sqrt[6]{64}=2$；　$\sqrt[5]{-32}=-2$；　$\sqrt[100]{0}=0$。

3．运算定律　（a、b、c 为任意实数）

（1）加法交换律　$a+b=b+a$。

(2) 加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$。

(3) 乘法交换律　$ab=ba$。

(4) 乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$。

(5) 乘法对于加法的分配律　$(a+b)c=ac+bc$。

例如，计算：

(1) $\left(-3.2+3\frac{3}{7}\right)-\left(6.8-5\frac{4}{7}\right)$

$=-3.2+3\frac{3}{7}-6.8+5\frac{4}{7}$　（根据减法法则）

$=(-3.2-6.8)+\left(3\frac{3}{7}+5\frac{4}{7}\right)$（根据加法的交换律和结合律）

$=-10+9$

$=-1$；

(2) $0.25\times1983\times4$

$=(0.25\times4)\times1983$　（根据乘法交换律和结合律）

$=1983$；

(3) $42\times\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{7}\right)$

$=42\times\frac{1}{6}-42\times\frac{3}{7}$（根据乘法对于加法的分配律）

$=7-18$

$=-11$。

4. 运算顺序

运算顺序应是先乘方、开方，再乘、除，最后加、减；同一级运算中应从左至右依次进行．含有括号时，一般先去小括号，再去中括号，再去大括号．

例如，计算：

$$(-0.2)^3\times125-\sqrt[3]{125}\div5^2\times7$$
$$=-\frac{1}{125}\times125-5\div25\times7$$
$$=-1-\frac{1}{5}\times7$$
$$=-1-\frac{7}{5}$$
$$=-2\frac{2}{5}.$$

例　　题

本章习题的基本类型一般可分成：(1)关于数的概念；(2)关于实数大小的比较；(3)关于实数的运算；(4)关于有理数和无理数的证明。

例 1　实数 a、b 在数轴上的对应点如图 1-1 所示，图中 o 为原点，化简 $|a+b|+|a-b|+|a|+|ab|-|-b|$。

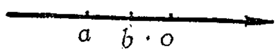

图 1-1

解　$\because$　$a<0$，$b<0$，$a<b$，

$\therefore$　$a+b<0$，$a-b<0$，$ab>0$，$-b>0$

$$|a+b|+|a-b|+|a|+|ab|-|-b|$$
$$=-(a+b)+(b-a)+(-a)+ab-(-b)$$

$= -a-b+b-a-a+ab+b$

$= -3a+b+ab$.

例 2 试判断下列命题的真假，并举例说明你的论断：

（1）有理数+有理数=有理数；

（2）有理数×有理数=有理数；

（3）有理数+无理数=无理数；

（4）有理数×无理数=无理数；

（5）无理数+无理数=无理数；

（6）无理数×无理数=无理数。

解 （1）真．例如$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$；

（2）真．例如$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；

（3）真．例如$3+2\sqrt{5}$，$3+\lg 2$都是无理数；

（4）不一定真．不为零的有理数与无理数的积是无理数．例如$3\times\sqrt{2}$，$3\times\lg 2$都是无理数；而0与无理数的积是有理数0；

（5）不一定真．例如$3\sqrt{2}+(-2\sqrt{2})=\sqrt{2}$为无理数，而 $(1+2\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})=2$；$\pi+(-\pi)=0$；$\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$均为有理数；

（6）不一定真．例如$3\sqrt{2}\times(-2\sqrt{3})=-6\sqrt{6}$为无理数，而$(1+2\sqrt{3})\times(1-2\sqrt{3})=-11$为有理数．

例 3

（1）① 已知$|m|=|n|$，能够断定$m=n$吗？

② 已知$|m|>|n|$，能够断定$m>n$吗？

③ 已知$m<n$，能够断定$|m|<|n|$吗？

给出数值来说明你的论断。

（2）①在什么条件下，$|x+y|=|x|+|y|$？

②在什么条件下，$|x+y|=x+y$？

③在什么条件下，$|x+y|<|x|+|y|$？

给出数值来说明你的论断。

解 （1）①不能断定$m=n$。当m、n同号时，$m=n$，当m、n异号时，$m=-n$。例如$m=\sqrt{2}$，$n=-\sqrt{2}$，虽然$|m|=|n|$成立，但$m=-n$。

②不能断定$m>n$。例如，当$m=-5$，$n=4$时，$|m|>|n|$成立，但$m<n$。

③不能断定$|m|<|n|$。例如，当$m=-5$，$n=4$时，$m<n$成立，但$|m|>|n|$。

（2）①当x、y同号或至少有一个为0时，$|x+y|=|x|+|y|$。例如$|2+3|=|2|+|3|$；$|(-2)+(-3)|=|-2|+|-3|$；$|(-6)+0|=|-6|+|0|$；$|0+0|=|0|+|0|$。

②当$x+y\geqslant0$时，$|x+y|=x+y$。例如$|3+(-\sqrt{2})|=3-\sqrt{2}$。

③当x、y异号时，$|x+y|<|x|+|y|$。例如，$|3+(-2)|<|3|+|-2|$。

例4 比较下列实数的大小：

（1）当$c<0$时，$\sqrt{c^2}$与c；

（2）$1-c^2$与1；

（3）$\frac{4}{\sqrt{2}}$与$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

(4) $-2\sqrt{2}\sin 135°$与$\lg 0.001$;

(5) $\frac{\lg 27}{\lg 9}$与π^0.

解 (1) $\because c<0$, $\sqrt{c^2}=|c|=-c>0>c$, $\therefore \sqrt{c^2}>c$.

(2) $\because c^2\geqslant 0$, $\therefore 1-c^2\leqslant 1$.

(3) $\because \frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}>\sqrt{2}+\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

(4) $\because -2\sqrt{2}\sin 135°=-2$, $\lg 0.001=-3$,

$\therefore -2\sqrt{2}\sin 135°>\lg 0.001$.

(5) $\because \frac{\lg 27}{\lg 9}=\frac{3\lg 3}{2\lg 3}=\frac{3}{2}>1=\pi^0$,

$$\therefore \frac{\lg 27}{\lg 9}>\pi^0.$$

例5 计算:

(1) $6.28-\left(-1.75+1\frac{3}{4}\right)(2-0.0019)$;

(2) $-2^2+(-2)^2-|3.14-\pi|-\frac{\pi}{(-1)^{201}}-|-3.14|$;

(3) $\left[(-5)^4\times\left(-\frac{2}{5}\right)+150\right]\times 10\div 5-(-1)^0$;

(4) $-|(-3)^3|-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2\times\sqrt{(-6)^2}$.

解 (1) 原式$=6.28-0\times(2-0.0019)=6.28$；

(2) 原式$=-4+4-(\pi-3.14)+\pi-3.14=0$；

(3) 原式$=-100\times10\div5-1=-201$；

(4) 原式$=-27-\frac{1}{12^2}\times6=-27\frac{1}{24}$.

例6 试叙述下列各式中实数a、b相互的关系或取值范围：

(1) $a+b=0$；　(2) $ab=0$；　(3) $ab=1$；

(4) $\frac{a}{b}=1$；　(5) $ab>0$；　(6) $\frac{a}{b}<0$；

(7) $ab\neq0$；　(8) $a^2+b^2>0$；(9) $a^2+b^2=0$.

解 (1) a、b互为相反数；(2) a、b至少有一个为0；(3) a、b互为倒数；(4) a、b相等且不为0；(5) a、b同号；(6) a、b异号，且$b\neq0$；(7) a、b都不为0；(8) a、b不都为0；(9) a、b都为0.

例7 求证：无理数$\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$之和是无理数.

证明 设$\sqrt{3}+\sqrt{2}=m$是有理数，则$\sqrt{3}=m-\sqrt{2}$，$3=m^2-2\sqrt{2}m+2$，$\therefore\sqrt{2}=\frac{m^2-1}{2m}$.

此式左边是无理数，右边是有理数，这是不可能的，所以无理数$\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$之和是无理数.

练 习 一

A 组

1. 什么数的相反数是它的本身？什么数的绝对值是它的本身？什么数的倒数是它的本身？什么数的任何非零整数次幂是它的本身？

2. 在什么条件下，下列各式成立？

(1) $-a>a$；(2) $|a|>a$； (3) $\frac{1}{a}>a$；(4) $a^2>a$.

3. 当 x 是怎样的有理数时，代数式 $\frac{(x-3)^2}{4}$ 的值 (1)是整数？ (2)是分数？

4. 计算：

(1) $\left|-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right|+\left|\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}\right|\div\frac{|-2|}{3}-\left|\frac{5}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$；

(2) $|-2^2+(-2)^2|-|(-3)^2+(-3)^3|+|-7^2+\left|-\frac{1}{3}\right|-|5\div(-6)|$；

(3) $(-2.5)\times(-8672)\times(-5)^3\times(-2)^2\times(-0.2)^3$；

(4) $1\frac{3}{4}-\left(5\frac{3}{7}+1.75-8.74\right)+(+2.26)+\left(-3\frac{4}{7}\right)$.

5. (1) 从平方表中查得 $2.468^2=6.091$，那么 24.68^2 等于多少？ -0.2468^2 等于多少？

(2) 从立方表中查得 $0.5197^3=0.1404$，那么 $(-51.97)^3$ 等于多少？ -0.05197^3 等于多少？

6. 如果 $-3<a<10$，写出所有奇数 a 的和与所有偶数 a 的积.

7. 写出下列各数的近似值，使其结果保留 4 个有效数字，并用科学记数法表示。

(1) $\frac{\pi}{100}$； (2) $\frac{2}{7}$； (3) 438987； (4) $100\sqrt{3}$.

8. 下列说法对不对？如果不对，怎样说才对？

(1) 任何实数的平方都是正数。

(2) 无理数都是无限小数。

(3) $a+b$ 一定大于 $a-b$。(a、b 为实数)

(4) 若正整数 a 的各位数字的和是 3 的倍数，那么 a 一定能被 3

整除。

9. 试证明$\sqrt{2}$是无理数，并且用几何方法在数轴上作出表示$\sqrt{2}$的点。

10. 试比较三个数$-\frac{17}{42}$、$-\frac{5}{12}$、$-\frac{3}{7}$的大小，把比较结果用不等号连结起来。

B 组

1. 设a、b为有理数，且满足$(\sqrt{3}a+\sqrt{2})a+(\sqrt{3}b-\sqrt{2})b-\sqrt{2}-25\sqrt{3}=0$，求$a$、$b$。

2. 证明：对于任意两个有理数，一定存在一个介于这两个有理数之间的有理数。

3. 设$\sqrt{10}$的整数部分为a，小数部分为b，试求$a-\frac{1}{b}$。

4. 若$62ab427$是99的倍数，求a、b。