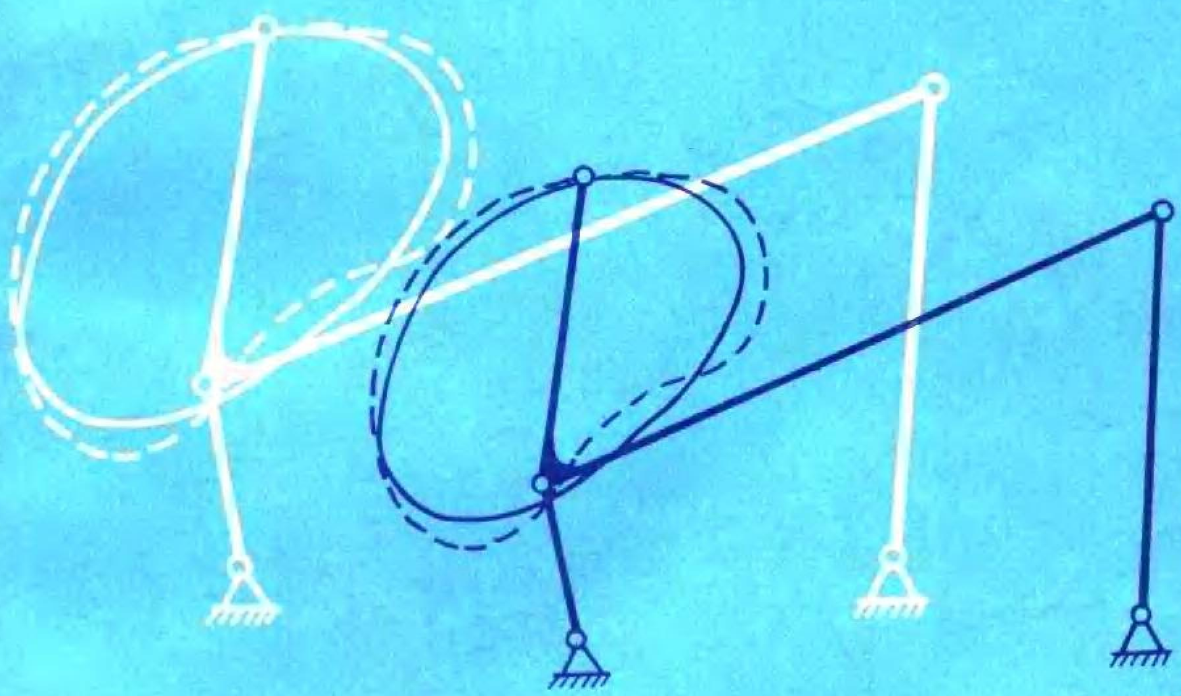
弹性连杆机构的分析与设计

张　策　陈树勋
王子良　黄永强　著



机 械 工 业 出 版 社

本书系统论述了弹性连杆机构分析与设计的基本理论和方法。全书共五章：前两章简单介绍振动理论和有限元法的基础知识，第三章以有限元模型为重点介绍机构弹性动力分析的方法，第四章集中介绍求解运动方程的方法，第五章介绍简单连杆机构的弹性动力设计的方法。书后附有计算程序。

本书可供从事机械设计的工程技术人员和高等院校有关专业的师生参考。

弹性连杆机构的分析与设计

张　策　陈树勋
王子良　黄永强　著

*

责任编辑：张继铣、张秀恩　版式设计：乔　玲
封面设计：田淑文　责任校对：陈　松

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 15 1/2·字数 378 千字
1989年3月北京第一版·1989年3月北京第一次印刷
印数 0,001—2,490·定价：8.75 元

*

ISBN 7-111-00489-2/TH·79

前　言

连杆机构传统的分析与设计方法把机构的构件假定为刚性的。近几十年来，设计的机械产品运转速度趋于提高，对机械的工作精度要求更为严格。与此同时，为了减轻机械的重量，设计的构件截面减小，构件刚度降低。高速下急剧增大的惯性力使机构构件产生弹性变形和振动，从而使机构的工作性能恶化。因此，某些机构构件的弹性不能再象传统方法中那样被忽略不计。这样，就产生了机构学的一个分支——机构弹性动力学。

机构弹性动力学在国外形成研究热潮只是最近二十年的事。这一新的机构分析与设计理论的发展，"是国际市场上为推出具有超等运转性能的产品而竞争的结果"。中国机械产品要更新换代、走向世界，机构弹性动力学也必将在中国的机械设计领域得到应用和发展。近年来，我国学术界也已起步研究。本书试图将这一课题的基本内容向机械产品设计人员做一介绍，希望能推动它的应用，也希望有助于学术上的进一步研究。

本书共分五章。第一、二两章对弹性动力分析用到的基础理论——振动理论和有限元法做了简单的介绍，以供未系统学过这两门学科的读者入门之用。由于篇幅的限制，在内容选择上主要针对第三章之需要，不能包容太多；叙述上也只能从简，不能挖掘过深。第三章介绍弹性动力分析方法，是本书之核心内容。这一章主要介绍用有限元模型分析弹性连杆机构的方法：如何建立机构系统的有限元模型，如何导出系统的运动微分方程式。为了叙述上的集中，将运动方程式的求解放到第四章介绍。为此，建议读者在了解 3.2 节的基本方法时应穿插阅读 4.2 节的内容。第五章介绍简单弹性连杆机构的设计问题。

本书由张策、陈树勋、王子良、黄永强著，由张策、陈树勋主编。执笔分工如下：张策—3.1 节、3.2 节、第五章、附录；陈树勋—第一章、第二章、3.3 节；王子良—3.4 节、3.5 节、3.2.5 小节；黄永强—第四章。

本书是著者近年来关于弹性连杆机构动力学研究成果的总结。这项研究工作得到国家自然科学基金的资助。书中还纳入了国内外学者和研究生的一些研究成果。清华大学教授唐锡宽同志、天津大学教授祝毓琥同志、机械工业出版社高级工程师张继铣同志认真审阅了全书并提出了宝贵意见。对此，著者一并表示衷心的感谢。

著者研究这一领域的时间不长，又受到理论水平的限制，因此本书一定存在不少缺点错误，敬希读者批评指正。

著者

1987年1月于

唐山工程技术学院

目　录

第一章　机械振动学基础

机械振动学内容十分广泛，本章仅介绍与弹性连杆机构分析有关的内容。主要包括单自由度系统的振动，多自由度系统的振动，以及等截面直杆的纵向振动和横向振动。

1.1　单自由度系统的振动

一个实际的振动系统，常常是一个复杂的弹性系统。研究系统的振动时，必须根据所要解决的问题，抓住主要因素，将实际振动系统加以简化，其中有很多问题可以简化为只具有一个自由度的振动系统。因此，研究单自由度系统的振动具有一定的实际意义。同时，正如后面将要看到的，一个具有离散参数的多自由度系统和具有分布参数的弹性体的振动，经过适当的处理，都可以转化为单自由度振动问题的叠加。所以单自由度的振动理论是整个振动理论的基础。

图 1-1 是单自由度系统的简化模型。m 是振动物体的质量，k 是弹簧刚度，r 是阻尼系数，$F(t)$是外加激振力，$x(t)$是从静力平衡位置 o-o 量起的位移量。建立系统的运动方程如下：

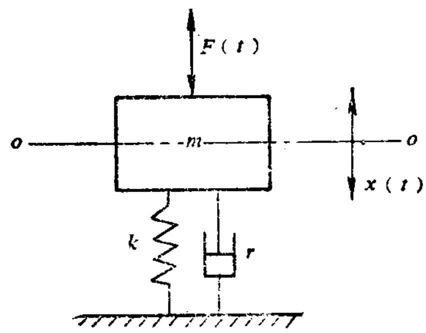


图　1-1

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F(t) \tag{1-1}$$

1.1.1　自由振动

当外加激振力$F(t)=0$，且不考虑阻尼时，式(1-1)就简化为无阻尼自由振动方程

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1-2}$$

这是振动的最简情况。它的解为

$$x=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t \tag{1-3}$$

式中　$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，称为系统的固有圆频率(rad/s)。固有圆频率 ω_n 和频率 f 之间的关系为

$$f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\mathrm{Hz})$$

振动的周期T为

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\mathrm{s})$$

方程 (1-2)的解也可写成

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi) \tag{1-4}$$

式中　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$，称为振幅；$\varphi=\arctan\dfrac{A_1}{A_2}$，称为初相位，单位为弧度（rad）。$A$和$\varphi$为待定常量，由初始条件确定。

在前面的讨论中，忽略了运动阻力的影响。实际上，阻力总是存在的，如两物体表面间

的摩擦力，周围介质的阻力，材料的内摩擦等。这类阻力通称为阻尼。阻尼的性质可能很复杂，通常把它简化为所谓的粘性阻尼。它的特点是阻力的大小与速度成正比，阻力的方向与速度的方向相反。这一假设使得这个问题在数学处理上大为简化。有阻尼的自由振动的微分方程为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \tag{1-5}$$

令

$$2\alpha = \frac{r}{m}$$

则式（1-5)化为

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1-6}$$

这是二阶常系数线性微分方程，它的特征根为

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \tag{1-7}$$

方程式（1-6）的解的性质取决于根式$\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}$是非零实数，零，或虚数。在以后的讨论中，更多地引入一个无量纲的量$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$，称为相对阻尼系数或阻尼比。下面根据根式$\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}$的三种情况分别讨论如下。

（1）临界阻尼　$\alpha = \omega_n$或$\zeta = 1$时的阻尼称为临界阻尼。此时特征根有二重根，即$s_1 = s_2 = -\alpha$。方程(1-6)的解为

$$x = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t) \tag{1-8}$$

这个解所表示的运动是非周期性的，亦即它不是振动。

（2）大阻尼　当$\alpha > \omega_n$或$\zeta > 1$时称为大阻尼。此时特征方程的根为两个不等的负实根。若令

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = \beta \tag{1-9}$$

则

$$s = -\alpha \pm \beta$$

方程（1-6)的解为

$$x = e^{-\alpha t}(A_1\cosh\beta t + A_2\sinh\beta t) \tag{1-10}$$

此解所表示的运动也是一个非周期性的运动。

（3）小阻尼　满足$\alpha < \omega_n$或$\zeta < 1$时的阻尼称为小阻尼。此时特征根成为一对共轭复根。令

$$\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \omega_d \tag{1-11}$$

则特征根s为

$$s = -\alpha \pm j\omega_d$$

此时方程（1-6)的解为

$$x = e^{-\alpha t}(B_1 e^{j\omega_d t} + B_2 e^{-j\omega_d t}) = e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t) \tag{1-12}$$

方程中的待定系数A_1和A_2由初始条件确定。设$t = 0$时振动物体具有初位移x_0和初速度$\dot{x}_0$，则系统对初始条件的响应为

$$x = e^{-\alpha t}\left(x_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \alpha x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t \right) \tag{1-13}$$

它也可以写成

$$x = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \varphi) \tag{1-14}$$

式中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \alpha x_0}{\omega_d}\right)^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \alpha x_0}$$

可以看到，这时系统的运动是周期性的振动。其频率为 $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$，称为阻尼振动的固有频率。其振幅随时间成指数形式衰减。图 1-2 给出了这种衰减振动的响应曲线。这一曲线可以通过实测获得。

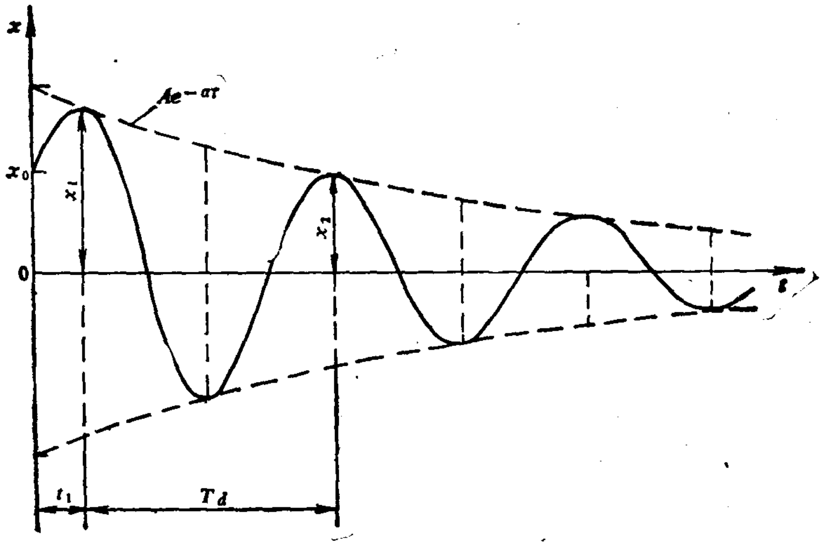


图 1-2

1.1.2 受迫振动

当有激振力 $F(t)$ 作用于系统时，系统的振动状态称为受迫振动。随着激振力函数形式的不同，分下面几种情况来讨论。

（1）简谐激振力作用下的受迫振动　在简谐激振力 $F(t) = F_0\cos(\omega t + \beta)$ 作用下，系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t + \beta) \tag{1-15}$$

或写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = h\cos(\omega t + \beta) \tag{1-16}$$

式中　$2\zeta\omega_n = 2\alpha = \frac{r}{m}$，$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$，$h = \frac{F_0}{m}$。

方程（1-16）的全解由两部分组成：与之对应的齐次方程的通解 x_1 和它的特解 x_2。由前节可知

$$x_1 = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t)$$

设方程（1-16）的特解具有下列形式：

$$x_2 = B_1\cos(\omega t + \beta) + B_2\sin(\omega t + \beta) \tag{a}$$

将式（a）代入方程（1-16），比较系数解得 B_1 和 B_2，再利用三角公式化简，特解 x_2 可以写为

$$x_2 = B\cos(\omega t + \beta - \theta) \tag{1-17}$$

式中

$$B = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \tag{1-18}$$

$$\theta = \arctan\frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \tag{1-19}$$

式中 $\delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{m\omega_n^2} = \frac{h}{\omega_n^2}$，称为静变形；$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$，称为频率比。

最后方程（1-16）的通解可以写为

$$x = x_1 + x_2 = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t) + B\cos(\omega t + \beta - \theta) \tag{1-20}$$

式中的积分常数 C_1，C_2 由初始条件确定。设初始条件为 $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$，则有

$$\begin{aligned} x = {} & e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos\omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right] \\ & - Be^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\beta-\theta)\cos\omega_d t + \frac{\zeta\omega_n\cos(\beta-\theta) - \omega\sin(\beta-\theta)}{\omega_d}\sin\omega_d t\right] \\ & + B\cos(\omega t + \beta - \theta) \end{aligned} \tag{1-21}$$

式（1-21）就是在简谐激振力作用下有阻尼受迫振动的完全响应。它由三部分组成：第一部分是与激振力无关的阻尼自由振动，它完全取决于初始条件，在零初始条件下它不存在。第二部分的振幅与激振力有关，频率等于阻尼自由振动的频率。这一项称为伴随自由振动，在零初始条件下它也存在。第三部分是纯粹的受迫振动，它是稳态振动，其频率等于激振力的频率，而相位滞后于激振力 θ 角。从式（1-21）可以看出，由于阻尼的存在，自由振动和伴随自由振动随着时间的延续而逐渐消失，最后只剩下稳态的受迫振动。式（1-21）所表示的振动称为瞬态响应，而稳态的受迫振动称为稳态响应。从开始振动到达受迫振动的稳定状态是需要一个时间过程的，这个过程称为过渡过程。过渡过程的长短与阻尼的大小有密切的关系。

稳态的受迫振动的振幅 B 的大小在工程技术上意义十分重要，所以对其必需做深入的研究。令

$$d = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \tag{1-22}$$

代入式（1-18），则 B 又可表为

$$B = d \cdot \delta_{st}$$

d 称为放大因子或动力系数，它是频率比 λ 和阻尼比 ζ 两个变量的函数。若把 ζ 视为参量，给其一系列的数值，则可绘出 $d-\lambda$ 曲线，如图 1-3 a 所示。因为它反映了振幅随激振力频率变化的关系，故称之为幅频特性曲线。从图中可以看到下列情况：

1）当 $\omega \ll \omega_n$，即 $\lambda \ll 1$ 时，$d \approx 1$，$B \approx \delta_{st}$ 此频率段称为准静态区。

2）当 $\omega \gg \omega_n$，即 $\lambda \gg 1$ 时，$d \approx \frac{1}{\lambda^2} \to 0$，此频率段称为惯性区。

3）当 $\omega \approx \omega_n$，即 $\lambda \approx 1$ 时，动力系数迅速增大，阻尼对动力系数的影响最为显著。此频率段称为阻尼区（或共振区）。

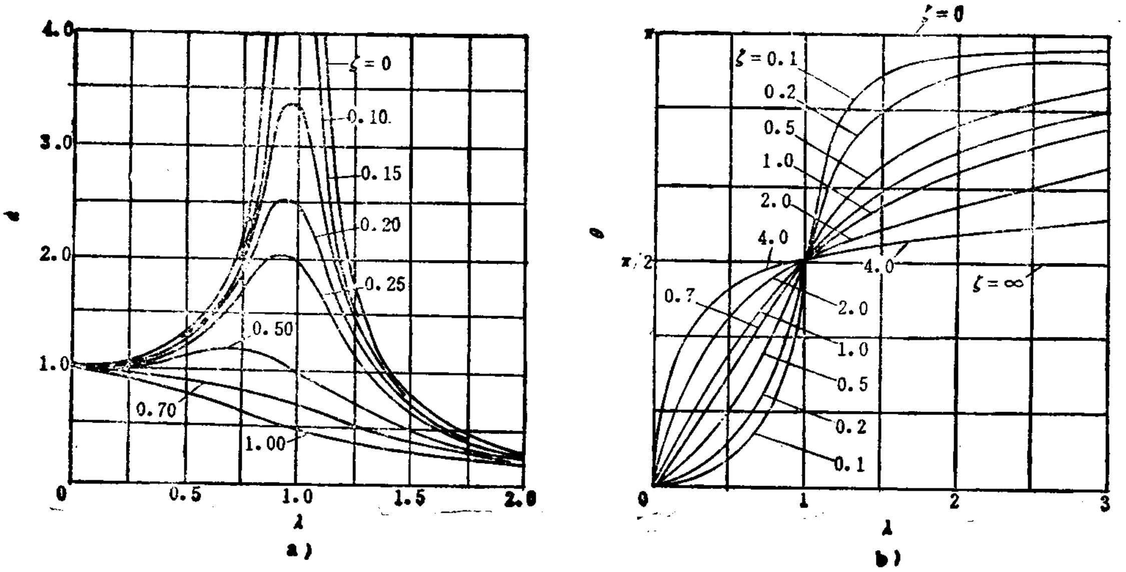


图 1-3

此外，由于阻尼的存在，使得受迫振动的位移响应与激振力不同步，它们之间存在一个相位差 θ 角。θ 值也与 λ 和 ζ 有关，这种关系曲线称为相频特性曲线，如图 1-3 b 所示。从图中看到，不论 ζ 为何值，当 $\lambda = 1$，即 $\omega = \omega_n$ 时，θ 值恒等于 90°，这一点在振动测试中很有用。

（2）周期激振力作用下的受迫振动

在工程中，有许多激振力虽然不是简谐的，但是具有周期性，如四冲程内燃机的爆发压力就是一例（图1-4）。解决这类问题的有效方法就是把周期性的激振力展成傅里叶（Fourier)级数，然后利用叠加原理进行求解。

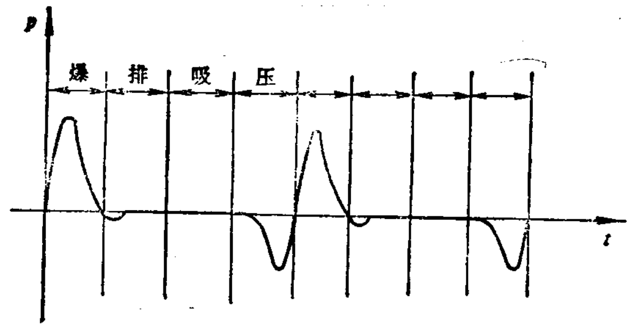


图 1-4

设激振力 $F(t)$ 是一个任意的周期函数，周期为 T，圆频率为 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。只要 $F(t)$ 满足狄里赫莱（Dirichlet）的充分条件，就能展成傅里叶级数

$$F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \tag{1-23}$$

式中

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t$$

式（1-23）也可写成

$$F(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(k\omega t-\varphi_k) \tag{1-24}$$

式中　$c_0=a_0$，$c_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$，$\varphi_k=\arctan\frac{b_k}{a_k}$

此时受迫振动的微分方程为

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(k\omega t-\varphi_k) \tag{1-25}$$

c_0相当于一个静载荷，它不引起振动，它只改变系统的静平衡位置。若令

$$k\omega=\omega_k$$

则由$F(t)$引起的稳态响应可以写为

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cos(\omega_k t-\varphi_k-\theta_k) \tag{1-26}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}B_k&=\frac{c_k/m}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_k^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega_k^2}}\\ \theta_k&=\arctan\frac{2\zeta\omega_n\omega_k}{\omega_n^2-\omega_k^2}\end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

把激振力进行谐波分析以后，其中某阶分量的频率与系统的固有频率最为接近，则该阶分量所唤起的响应最为显著。相比之下，其他分量唤起的响应很小，在近似计算中可以略去。

（3）在任意激振力作用下的受迫振动　一个有阻尼的单自由度系统在任意激振力$F(t)$的作用下，其运动微分方程为

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F(t)$$

其中　$F(t)$的图象如图 1-6 a 所示。上式也可写为

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F(t)}{m}=f(t) \tag{1-28}$$

为了求解式（1-28），先来考虑这样一个问题：系统在$t=0$时受到一个冲量I的作用，求其激起的位移响应。物体受到一个冲量I的作用，相当于给物体一个初速度v_0，即$v_0=\frac{I}{m}$。此时可以认为系统具有下列初始条件：

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0=\frac{I}{m}$$

根据式（1-13），得到系统的位移响应为

$$x=e^{-\alpha t}\frac{I}{m\omega_d}\sin\omega_d t \tag{b}$$

式（b）所表示的就是由冲量I产生的位移响应，如图 1-5 a 所示。

现在来考虑一般情况。设$t=0$时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，且当$t=\tau$时，有一个冲量I作用，如图 1-5 b 所示。不管在$t=\tau$时刻振动物体的位移和速度如何，由于冲量I的作用，使得系统在$t=\tau$之后产生了附加振动（或叫做增量位移）dx，根据式（b）有

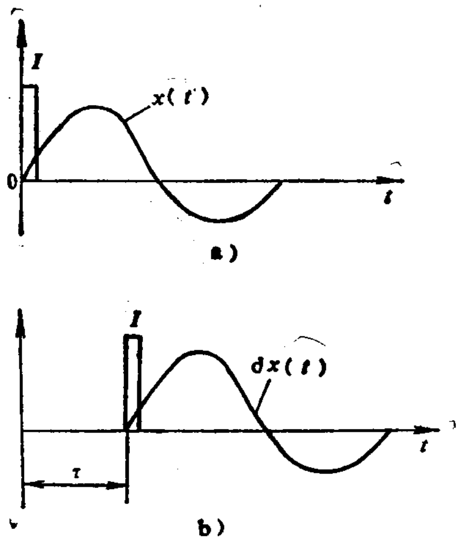


图 1-5

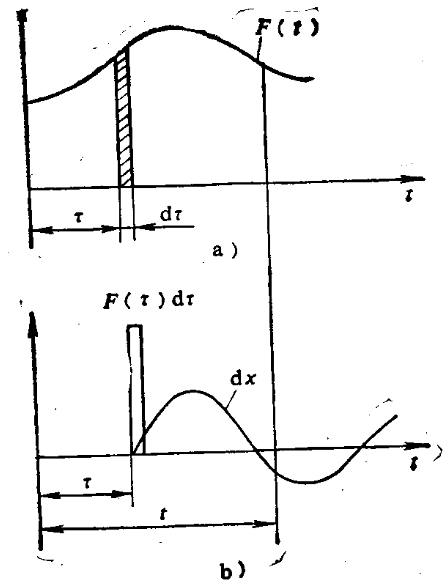


图 1-6

$$dx = e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{I}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) \tag{c}$$

下面来研究在任意激振力$F(t)$作用下系统的响应问题。图 1-6 a 表示一个非周期的任意激振力$F(t)$的图象。在任意时刻τ，图中阴影线窄条所代表的冲量为$F(\tau)d\tau$，此冲量激起的系统的位移响应（见图 1-6 b）为

$$dx = e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{F(\tau)d\tau}{m\omega_d}\sin\omega_d(t-\tau) \tag{d}$$

由于t时刻的位移响应是t时刻以前所有的冲量作用的总和，所以t时刻的总位移响应等于式（d）从 0 到t的积分，即

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \tag{1-29}$$

这种数学形式称为杜哈美积分（Duhamels' integral），式（1-29）表示激振力从 0 到t的过程中所产生的位移。另外，由$t=0$时刻的初始条件x_0和$\dot{x}_0$所产生的位移从零时刻一直延续到t时刻。这样，由初始条件和外加激振力$F(t)$产生的总位移响应就是方程（1-28）的全解。根据式（1-13）和（1-29），全解为

$$x = e^{-\alpha t}\left[x_0\cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \alpha x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right] + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \tag{1-30}$$

将式（1-30）重新整理，并注意到$\alpha=\zeta\omega_n$，$\dfrac{F(\tau)}{m}=f(\tau)$，全解又可写成

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{1}{\omega_d}\int_0^t f(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cdot\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \\ & + \frac{x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \psi) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\sin\omega_d t \end{aligned} \tag{1-31}$$

式中

$$\psi = \arctan\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-32}$$

1.2 有限多自由度系统振动方程的建立

1.2.1 计算模型的简化

机械工程中的各种构件、部件、机构乃至整个机器都是复杂的弹性系统。要把连续的弹性系统的振动性态描述出来，必须知道系统中各点的位移。这样说来，弹性系统就都是无限多自由度的系统。但是在许多场合，如果把弹性系统当做无限多自由度系统来研究，会遇到很大困难。这就迫使我们采取近似解法。各种近似解法的宗旨是变无限为有限，也就是将无限多自由度系统（连续系统）转换成有限多自由度的系统（离散系统）。连续系统模型的离散化方法，大体可归纳为三大类。

（1）集中质量法　我们用图 1-7 所示的简支梁的简化过程来说明这一方法。首先将梁分割成几段（比如 $n+1$ 段），分割点称为结点。将各梁段的质量按质心不变的原则凝聚到本段的两端。两段共有的结点其质量是两段分别简化到该结点的质量之和。例如，$m_1=m_{1a}+m_{1b}$。质量经过离散化以后，仍然认为梁的刚度特性保持不变。这样，就把原结构简化成了在无质量的弹性梁上联结 n 个集中质量的 n 个自由度系统（m_0 和 m_{n+1} 不起作用）。

（2）广义坐标法　仍以图 1-7 所示的简支梁为例。在梁的弯曲振动中，梁的位移 $y(x,t)$ 可近似地表达为

$$y(x,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)q_i(t)$$

式中　$\phi_i(x)$ 为一系列的具有固定形式的函数。这些函数形式是事先假定的，它们要满足原结构的几何边界条件和建立振动方程所需要的各阶导数。而 $q_i(t)$ 为相应的广义坐标（模态坐标），它是求解振动问题的 n 个未知变量。

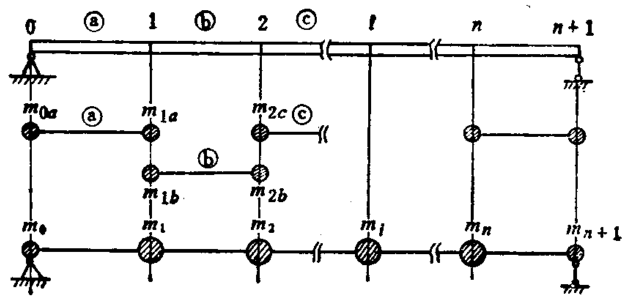


图 1-7

（3）有限单元法　它兼有前两类方法的特点。有限单元法把复杂的结构划分为小段或小块（即单元），每个单元都是一个弹性体。单元的位移用结点的插值函数来表示。有限单元法与广义坐标法有两点不同：第一，插值函数虽然也是一种事先选定的函数形式，但它不是对整个结构而是对每个单元所取的位移模式。由于单元的数目通常取得比较多，每个单元取得很小，所以插值函数的形式可以取得非常简单，一般取多项式形式。第二，有限单元法不是以模态坐标为广义坐标，而是以结点位移为系统的广义坐标。

在建立起振动系统的简化计算模型之后，下一步工作就是建立系统的运动微分方程。建立多自由度系统的振动方程有各种方法。对于比较简单的问题，一般应用动力学基本定律或定理，对于复杂问题，比较好的方法是利用拉格朗日方程。

1.2.2 用拉格朗日方程建立多自由度系统的微振动方程

设所研究的振动系统为具有完整稳定约束的非自由质点系，它共有 s 个质点，n 个自由度，故可用 n 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_n 来表示系统的位置。系统中任意一个质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_k$ 可以表达为

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n) \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{a}$$

若用T代表系统的动能，Q代表作用在系统上的广义力，则第二类拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-33}$$

对于保守系统，广义力可表达为

$$Q_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

式中的U为作用于系统的保守力的势能。这时拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-34}$$

若系统上还作用有非保守力，设其对应的广义力为F_i，拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=F_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-35}$$

式中的F_i主要是阻尼力和外加激振力所对应的广义力。

需要说明的是，拉格朗日方程是从研究质点系动力学导出的，但它可以直接推广应用于变形连续体。只是由于力学模型不同，有些量（如势能U）将具有不同的物理含义（参看文献〔f 3〕）

在应用拉格朗日方程建立系统的振动方程时，首先要写出系统的动能和势能表达式。为了从理论上说明从中得出的质量矩阵和刚度矩阵的性质以及关于“微幅振动”线性化问题，下面对系统的动能和势能给以较详细的说明。虽然这些说明是针对质点系的，但从中得出的结论可以推广应用于任何机械系统。

质点系的动能等于所有质点动能之和。设系统共有s个质点，则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k^2$$

由式（a）可得

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

其中 $\dot{q}_i$是广义坐标对时间的导数，称为广义速度。于是系统动能可表达为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}m_k\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)$$

改变求和顺序，上式可写为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s}m_k\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{b}$$

在式（b）中，圆括号内是与质量有关的项，称为广义质量。在一般情况下，它是广义坐标$q_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的函数。引入符号

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{s} m_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial q_j} \tag{c}$$

则动能T又可表达为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{d}$$

由于m_{ij}仅是广义坐标的函数，所以动能T是广义速度的二次齐次函数。从式（c）可知，广义质量具有对称性，即

$$m_{ij}=m_{ji} \tag{e}$$

这一特性在下面的讨论中要用到。

必须充分注意到“微幅振动”这一前提。设若选取质点系的静力平衡位置的广义坐标为零，亦即取平衡位置作为计算q_1，q_2，…，q_n的起点，则在微幅振动过程中，广义坐标q_1，q_2，…，q_n和广义速度$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，…，$\dot{q}_n$将做为一阶微量。为了写出准确到一阶微量的振动方程，在计算系统的动能与势能时须准确到二阶微量（因为代入拉格朗日方程对q_i和$\dot{q}_i$求导后，微量的阶数将降低一阶）。为简化振动方程的需要，把广义质量m_{ij}在“零位”展成广义坐标的台劳级数

$$m_{ij}=(m_{ij})_0+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0\cdot q_k+\cdots \tag{f}$$

式中　$(m_{ij})_0$，$\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0$为括号内的量在$q_1=q_2=\cdots=q_n=0$处的值，它们为常量；$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0\times q_k+\cdots$为$q_1$，$q_2$，…，$q_n$的一次或高于一次幂的项，这些项分别乘以$\dot{q}_1^2$，$\dot{q}_2^2$，$\dot{q}_1\dot{q}_2$，…后将成为三阶或更高阶的微量，故可以把它们略去不计而仅保留第一项，即

$$m_{ij}=(m_{ij})_0$$

今后为书写简单起见，省略$(m_{ij})_0$的下标“0”而直书m_{ij}，只要明确m_{ij}是常量即可。

引入广义质量矩阵

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\cdots m_{1n}\\ m_{21} & m_{22}\cdots m_{2n}\\ \vdots & \vdots\quad\vdots\\ m_{n1} & m_{n2}\cdots m_{nn}\end{bmatrix}$$

和广义速度列阵

$$\dot{q}=[\dot{q}_1\quad \dot{q}_2\cdots\dot{q}_n]^T$$

则动能T可以写为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j=\frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q} \tag{1-36}$$

在线性代数中，称式（1-36）这样的函数为二次型。因为动能T有恒正的性质，所以T为正定二次型，相应的质量矩阵M为正定矩阵。同时，由于广义质量m_{ij}具有对称性，所以M为对称正定矩阵。

下面讨论势能表达式。在稳定约束的情况下，势能只是广义坐标的函数，即

$$U=U(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$$

把势能函数$U(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$在“零位”展成台劳级数

$$U=U_0+\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0\cdot q_1+\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0\cdot q_2+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial q_n}\right)_0\cdot q_n+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0\cdot q_1^2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_2}\right)_0\cdot q_1q_2+\cdots+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n^2}\right)_0\cdot q_n^2\right]+\cdots \tag{g}$$

式中 U_0，$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0$，…为$U$及其导数在平衡位置(即在$q_1=q_2=\cdots=q_n=0$处)的值，它们都是常量。选取系统的平衡位置作为零势位，得$U_0=0$。因为势函数对于广义坐标的一阶导数等于广义力的负值，而在平衡位置广义力等于零，因此有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_0=\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0=\cdots=\left(\frac{\partial U}{\partial q_n}\right)_0=0$$

这样一来，式（g）中只含有广义坐标的二阶和二阶以上的项。按线性化的要求，我们弃去三阶及三阶以上的微量，则系统在稳定平衡位置附近微振动的势能表达式为

$$U=\frac{1}{2}[k_{11}q_1^2+k_{22}q_2^2+\cdots+k_{nn}q_n^2+2k_{12}q_1q_2+\cdots]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}q_iq_j \tag{h}$$

式中

$$k_{ij}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 \tag{i}$$

k_{ij}称为广义刚度系数，它是势能U对广义坐标的二阶偏导数在平衡位置的值，故为常量。由本小节式（i）可知，它具有对称的性质，即

$$k_{ij}=k_{ji} \tag{j}$$

引入广义刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}\end{bmatrix}$$

和广义坐标列阵

$$\boldsymbol{q}=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_n]^T$$

则势能表达式可以写为

$$U=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{1-37}$$

从式（j）可知，刚度矩阵$\boldsymbol{K}$为对称矩阵。同时，如果系统产生了任意一组广义坐标$\boldsymbol{q}\neq 0$，使得系统产生弹性变形，则系统的势能恒大于零，此时系统势能U为正定二次型，$\boldsymbol{K}$为正定矩阵。但若系统产生了某一组广义坐标$\boldsymbol{q}\neq 0$，仅使系统产生刚体位移而不产生弹性变形，此时势能U等于零，则U为半正定二次型，$\boldsymbol{K}$为半正定矩阵。

将动能和势能表达式（1-36）和（1-37）代入拉格朗日方程（1-35），便得到系统的运动微分方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F} \tag{1-38}$$

式中

$$\boldsymbol{F}=[F_1\ F_2\ \cdots\ F_n]^T$$

称为广义力列阵。如果不考虑阻尼力，且外加激振力为零，则$\boldsymbol{F}=0$，此时，方程（1-38）化为无阻尼自由振动的微分方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{q}+\boldsymbol{K}q=0 \tag{1-39}$$

关于上述内容可以总结如下：多自由度振动系统的微分方程（1-38）和（1-39）是关于广义坐标q_1，q_2，…，q_n的常系数二阶线性微分方程组。其中的质量矩阵$\boldsymbol{M}$和刚度矩阵$\boldsymbol{K}$均为实对称矩阵，而且$\boldsymbol{M}$为正定矩阵，$\boldsymbol{K}$为正定矩阵或半正定矩阵（在有刚体运动自由度的情况下)。振动方程之所以成为常系数线性方程组，是因为舍去了动能和势能表达式中的二阶以上微量而得到的。这种处理称为线性化。

1.3 多自由度系统的自由振动

1.3.1 固有频率和主振型

结构的频率和振型是由结构自身的动态特性参数决定的。进行结构的频率和振型分析是结构动力计算的主要内容之一。

对于具有n个自由度的系统，取其广义位移x_1，x_2，…，x_n为系统的广义坐标，则系统的无阻尼自由振动方程可写为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=0 \tag{1-40}$$

式中　$\boldsymbol{X}=[x_1x_2\cdots x_n]^T$，称为广义位移列阵。设其解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) \tag{a}$$

式中　$\boldsymbol{A}$为振幅列阵。将广义位移列阵$\boldsymbol{X}$对时间t求两次导数得广义加速度列阵

$$\ddot{\boldsymbol{X}}=-\omega^2\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) \tag{b}$$

将式（a）和（b）代入式（1-40）得到

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}=0 \tag{c}$$

上式为一线性齐次代数方程组。$\boldsymbol{M}$为已知的正定矩阵，$\boldsymbol{K}$为已知的正定矩阵或半正定矩阵。现在要求ω^2使得方程（c）有非零解。这类问题称为矩阵$\boldsymbol{K}$相对于矩阵$\boldsymbol{M}$的广义特征值问题，称满足要求的ω^2值为矩阵$\boldsymbol{K}$相对于矩阵$\boldsymbol{M}$的特征值，而与ω^2相对应的非零解$\boldsymbol{A}$称之为与ω^2对应的特征向量。

欲使方程（c）有非零解，其条件是$\boldsymbol{A}$的系数行列式等于零，即

$$\det(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})=0 \tag{d}$$

式（d）称为特征方程（或频率方程）。将其展开得到关于ω^2的n次代数方程，它的根称为特征根。此特征根就是式（c）的特征值，也就是系统的固有频率的平方。在$\boldsymbol{M}$为正定矩阵，$\boldsymbol{K}$为正定矩阵或半正定矩阵的条件下，特征值全都是实数，而且是非负的（n个）。在大多数情况下，这n个固有频率值互不相等。将其按大小排列起来

$$\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n$$

它们分别称一阶固有频率，二阶固有频率，…，n阶固有频率。将ω_i（$i=1,2,\cdots,n$）代回式（c），就得到$\boldsymbol{A}$的非零解，记之为$\boldsymbol{A}^{(i)}$。$\boldsymbol{A}^{(i)}$就是与ω_i对应的特征向量，它是一组振幅的相对值，称为第i阶固有振型，也称为第i阶主振型。每一个特征值和与之对应的特征向量统称为特征对。