基 础 代 数

第一卷 第二分册

[美] N. Jacobson 著
上海师范大学
数学系代数教研室 译
刘绍学 校

高等教育出版社

美国 W. H. Freeman 出版公司 1974 年出版的 N. Jacobson 著《Basic Algebra》一书，是目前代数学方面内容较新和较完全的一部书。该书的编排和写法反映了作者较高的学术水平和丰富的教学经验，因此也是一部好的教学用书。

原书共分 I、II 两卷，译本分两卷四册出版。本书是第一卷第二分册，根据原书 I 卷 5—8 章译出，内容包括实多项式方程和不等式，度量空间和典型群，域上代数，格与 Boole 代数等。本书可供我国数学专业或其它开设抽象代数的课程的专业的师生作教学参考书。

基 础 代 数

第一卷 第二分册

[美] N. Jacobson 著

上海师范大学数学系代数教研室 译

刘绍学 校

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.25 字数 172,000

1988 年 10 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001— 1 810

ISBN 7-04-000353-8/O·117

定价 2.35 元

目　录

第 五 章

实多项式方程和不等式

本章的主要对象是实数域 $\mathbf{R}$ 中多元多项式方程组和不等式组的理论. 作为分析发展出发点的 $\mathbf{R}$, 它的基本性质可叙述为 $\mathbf{R}$ 是一个有序完备域: 即在 $\mathbf{R}$ 内有一个适合有序域公理在 5.1 节给出的关系 $>$, 且它又适合完备性公理. 即 $\mathbf{R}$ 的每一个有上界的子集有一个最小上界. 由于我们将只涉及多项式函数所以很自然地在此不需要所有这些性质. 我们将看到对我们的目的来说只要假设有一个有序域 R 使得: (1) R 的正元素在 R 里有平方根; (2) 系数在 R 里的每个一元奇次方程在 R 里有一根. 适合这些条件的一个有序域将称为实闭的. 显然 $\mathbf{R}$ 有这些性质. 然而 $\mathbf{R}$ 里 $\mathbf{Q}$ 上代数元所组成的子集也是一个实闭域. 但此有序域缺泛经典的完备性.

我们将证明若 R 为一实闭域, 则 $R(\sqrt{-1})$ 是代数封闭域. 取 $R=\mathbf{R}$ 时即得 $\mathbf{C}=\mathbf{R}(\sqrt{-1})$, 所以作为一个推论这将证明复数域是代数封闭的这个"代数基本定理".

我们所关切的主要是叙述判定系数在 R 内一个给定的多项式方程、不等方程 ($\neq$) 与不等式 ($>$) 的组是否在 R 内有解的算法. 这方面第一个确定的结果是由 J. C. F. Sturm 于 1836 所证明的古典定理. 在这方面的最一般结果是由 A. Tarski 在 1930 前后所证明的 Sturm 定理的重要的推广. 我们将给出这个定理的另一证明, 它属于 A. Seidenberg. 在从 Sturm 定理过渡到

Tarski 定理之前，我们将考虑系数在任一域里的方程与不等式方程组的变元消去法理论.

5.1 有序域、实闭域

我们将用域的正元素集 P 来给出有序域的定义如下：

定义 5.1 一个有序域是一个域 F 连同 F 的一个子集 P(正元素集)使得：(1) $0\notin P$, (2) 若 $a\in F$ 则或者 $a\in P$, $a=0$, 或者 $-a\in P$, (3)若 a, $b\in P$ 则 $a+b$ 与 ab 皆 $\in P$. 一个域 F 叫作可序的，如果可在 F 内指定一个具有上述性质的子集 P.

由于任一域含有多于一个元素，故若 (F, P) 为一有序域，则 P 显然非空. 令 $N=\{-a|a\in P\}$，则(2)说明了 $F=P\cup\{0\}\cup N$. 而且从(1)显然有 $P\cap\{0\}=\varnothing$ 及 $N\cap\{0\}=\varnothing$. 又有 $P\cap N=\varnothing$, 这是因为若 $a\in P\cap N$，则 $-a\in P\cap N$ 从而 $0=a+(-a)\in P$, 违背了(1). 因为 $F=P\cup\{0\}\cup N$ 是一个分成不相交子集的分解. 显然 N 关于加法是封闭的，这是因为若 a, $b\in P$, 则 $-a+(-b)=-(a+b)\in N$. 另一方面，若 a, $b\in N$, 则 $ab=(-a)(-b)\in P$.

我们可在 (F, P) 内通过规定：$a>b\Leftrightarrow a-b\in P$, 引进一个序关系，此时若 a, b 为 F 的任二个元素，则我们有三分律：三个可供选择的式子 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 有且只有一个成立. 若 $a>b$，则对任一 c 来说 $a+c>b+c$ 且对任一正数 p, $ap>bp$. 反之，我们可从域内的一个关系$>$出发，这个关系满足三分律、传递性、以及二个性质即 $a>b$ 可推出 $a+c>b+c$ 与当 $p>0$ 时 $ap>bp$，然后置 $P=\{p|p>0\}$，则 (F, P) 显然就是如上所定义的一个有序域，而且在 (F, P) 内定义的相应关系$>$就是所给定的这一个.

通常为方便起见，也把 $b>a$ 写成 $a<b$. 实数域 $\mathbf{R}$ 内不等式的初等性质是容易建立的. 我们来列举其中某些性质：

$$a>0\Rightarrow a^{-1}>0.$$

$$a>b>0\Rightarrow b^{-1}>a^{-1}>0.$$

若 $a>b$, 则 $-a<-b$,

若 $a>b$ 且 $c>d$, 则 $a+c>b+d$,

如常地定义 $$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时} \end{cases}$$

则可证 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

$$|ab|=|a|\cdot|b|.$$

如果 F' 是 (F, P) 的一个子域, 则对 $P'=F'\cap P$, (F', P') 是一个有序域. 我们称之为在 F' 内诱导的序. 如果 (F, P) 与 (F', P') 为任二个有序域, F 到 F' 上的一个同构 η 若使 $\eta(P)\subset P'$, 则称 η 为一序同构. 此时也有 $\eta(0)=0$ 及 $\eta(N)\subset N'$, 故 $\eta(P)=P'$

在任一有序域 (F, P) 内, $a\neq 0$ 可推出 $a^2>0$. 故若 $a_1, \cdots, a_r\neq 0$, 则 $\sum a_i^2>0$. 特别地, $1+\cdots+1=1^2+\cdots+1^2\neq 0$, 它表明任一有序域具有特征 0. 又在 F 内我们不能有 $-1=\sum a_i^2$, 因为这将给出 $1^2+\sum a_i^2=0$. 特别地 $-1\neq a^2$, $a\in F$, 所以 F 不含 -1 的平方根. 由此显然, 复数域 $\mathbf{C}$ 不是可序的.

在实数域 $\mathbf{R}$ 内利用完备性公理容易建立以下两个性质:

(i) 任一正元素在 $\mathbf{R}$ 里有一平方根.

(ii) 任一奇次实系数多项式方程 $f(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 里有一个根.

这二者都是介值定理, 即"若 f 为一连续函数, 且对 $a<b$ 来说 $f(a)f(b)<0$, 则存在一个数 $c\in(a, b)$ (即 $a<c<b$) 使得 $f(c)=0$" 的推论. 现在若一有序域 (R, P) 具有 (以 R 代 $\mathbf{R}$ 的) 性质 (i) 与 (ii) 则称之为一实闭域①. 我们有下面的

定理 5.1 一个实闭域只有唯一的序, 使它构成一个有序域.

① 这个概念等价于 Artin-Schreier形式实域理论内处于中心地位的另一概念. 它的一个叙述在本书卷 II 第 11 章内给出.

这样的一个域的任一自同构是一个序同构. 如果 R 是实闭域, 则其中在 $\mathbf{Q}(\subset R)$ 上所有代数元组成的子域是实闭的.

证明 设 (R, P) 为实闭域, 并设 (R, P') 是 R 上任一有序域. 若 $a\in P$, 则 $a=b^2$, $b\neq 0$. 因而 $a\in P'$. 于是 $P\subset P'$, 由此推出 $P=P'$. 以同样的方法推出第二个结论. 现在设 R 是实闭域, 并设 R_0 为 R 的 $\mathbf{Q}$ 上代数元子域(4.12 节). 若 $0<a\in R_0$, 则有一个 $b\in R$ 使 $b^2=a$. 于是 b 是 R_0 上代数元, 从而 $b\in R_0$. 因而条件(i)在 R_0 里成立. 以同样的方法我们看到(ii)成立, 所以 R_0 是实闭域.

特别地, 我们看到实代数数域, 即 $\mathbf{R}$ 内 $\mathbf{Q}$ 上代数数全体组成的子域是实闭的. 当然这个子域是不完备的. 因此我们所用的公理显然较弱于完备性公理.

下面我们来证"代数基本定理"对于实闭域的相应结果.

定理 5.2 如果 R 是实闭域则 $R(\sqrt{-1})$ 是代数闭域.

证明 我们将给出的证明属于 Artin. 这个证明在很大程度上是模仿了高斯对这个经典结果的一个证明. 我们首先注意 $\sqrt{-1}\notin R$, 且我们有 $C\equiv R(\sqrt{-1})$ 里的自同构 $r=a+b\sqrt{-1}\to \bar{r}=a-b\sqrt{-1}$, $a, b\in R$. 如果 $f(x)\in C[x]$, 那么 $f(x)\bar{f}(x)\in R[x]$. 且若它在 C 内有一根, 则 f 在 C 内就有一根. 因此为证 C 是代数封闭的只要证明系数在 R 内的每个首一多项式在 C 内有一根. 如果这多项式是奇次的, 则据(ii)这是成立的. 其次我们来证明 C 的每个元素在 C 内有一平方根. 对 R 的元素 $a\geqslant 0$, 这从(i)推出. 如果 $0>a\in R$ 而 b 满足 $b^2=-a$, 那么 $(\sqrt{-1}b)^2=a$. 现在令 $r=a+b\sqrt{-1}$, $a, b\in R$, $b\neq 0$. 置 $\sqrt{-1}=i$ 而令 $x, y\in R$. 此时 $(x+yi)^2=r$ 等价于

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b. \tag{1}$$

因 $b\neq 0$ 故可(乘上 R 中一适当元素——它在 C 内有一平方根)假

设 $b=2$，于是第二个方程变成 $xy=1$. 若 $y=x^{-1}$，则等式成立. 此时第一个方程变成 $x^2-x^{-2}=a$，或令，$z=x^2$ 而成为 $z-z^{-1}=a$. 则有 $z^2-az-1=0$. 由于 $a^2+4>0$②，所以它在 R 内有解 $(a+\sqrt{a^2+4})/2$. 又 $a+\sqrt{a^2+4}>0$，这是因为 $a+\sqrt{a^2+4}\leqslant 0$ 将导致 $4\leqslant 0$. 故在 R 内存在一个 $x\neq 0$ 使得 $x^2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$，此时 $x^4-ax^2-1=0$，而 $x^2-x^{-2}=a$. 因此 x 与 $y=x^{-1}$ 满足具有 $b=2$ 的(1). 因此我们已经证明了 C 的每一元素在此域里有一平方根；从而不存在扩域 E/C 使 $[E:C]=2$. 我们用此事实来证明系数在 R 里的每个首一多项式有一根在 C 里. 设 $f(x)$ 是这样的一个多项式. 令 E 为 $f(x)(x^2+1)$ 在 R 上的一个分裂域，假设它包含 C. 由于特征是 0，所以 E 是 R 上 Galois 扩域，令 $G=\mathrm{Gal}E/R$ 及 $|G|=2^em$，这里 m 是奇数. 按 Sylow 定理 G 有一个子群 H 其阶 $|H|=2^e$. 如果 D 是 E/R 的相应子域，则 $[E:D]=2^e$ 而 $[D:R]=m$. 由于 R 没有真的奇数维扩域，故必有 $m=1$. 从而 $D=R$ 且 $[E:R]=2^e$，而其 Galois 群就是 $G=H$，是一个 2^e 阶的群. 这样的一个群是可解的. 如果 $e>1$，则易从 Galois 理论(4.11 节)推出 E 包含一个含 C 的子域 F 使 $[F:C]=2$. 这违反了我们前面已证明的事实. 所以 $e=1$，从而 $E=C$. 于是 C 含有 $f(x)$ 的一个根，从而 C 是代数封闭的.

从上面的定理立即推出，$R[x]$ 内首一不可约多项式或者是 1 次的或者是 2 次的. 从解 2 次方程的公式也显然有当且仅当 $a^2<4b$ 时 x^2+ax+b 才在 $R[x]$ 内不可约.

$R(\sqrt{-1})$ 的代数封闭性允许我们对 R 上的多项式函数来建立一个实变量的连续可微函数的一些基本性质，其中为我们需要的一个就是关于多项式的介值定理.

---

② 我们使用对 R 为标准的约定：$\sqrt{\ }$ 表正的平方根.

定理 5.3 设 R 为一实闭域，$f(x)\in R[x]$，假定 a，b 都是 R 的元素使得 $f(a)f(b)<0$. 则在 a 与 b 之间存在一个 c 使得 $f(c)=0$.

证明 我们假设 $f(x)$ 是首一的. 则在 $R[x]$ 内 $f(x)$ 分解因式为

$$f(x)=(x-r_1)\cdots(x-r_m)g_1(x)\cdots g_s(x).$$

这里 $$g_i(x)=x^2+c_ix+d_i \quad 且 \quad c_i^2<4d_i.$$

于是

$$g_i(x)=\left(x+\frac{c_i}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(4d_i-c_i^2)=\left(x+\frac{c_i}{2}\right)^2+e_i^2,$$

$$e_i=\frac{1}{2}\sqrt{4d_i-c_i^2}.$$

于是对所有 $u\in R$, 皆有 $g_i(u)>0$. 若 a 与 b 都 $<r_i$, $i=1,\cdots,m$, 则 $f(a)f(b)=\prod_{i,j}(a-r_i)(b-r_i)g_j(a)g_j(b)>0$. 相似地，若对所有的 i 皆有 a, $b>r_i$, 则 $f(a)f(b)>0$. 由于我们假设了 $f(a)\cdot f(b)<0$, 所以推出 r_i 之一必夹在 a 与 b 之间. 由于 $f(r_i)=0$ 所以结果就清楚了.

练　习

1. (Veblen) 设 F 为满足下面二公理的一个域: (i) 在 F 内 -1 不是一个平方, (ii) F 的任二个非平方之和为一非平方. 求证可用唯一的一种方法使 F 序化而变成一个有序域.

2. 求证 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 恰有二个序使之成一有序域.

3. 设 F 为一有序域而 x 为 F 上一个未定元. 如果定义

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)/(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)>0$$
$$\Longleftrightarrow a_0b_0>0$$

则 $F(x)$ 是有序的.

4. 设 F 为一有序域, $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为一系数在 F 内的多项式, 置

$$M=\max(1,\ |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|).$$

求证若$|u|>M$则$|f(u)|>0$. 从而证明$f(x)$在F内的每个根都在区间$-M<x<M$内.

在下列三个习题内,R为一实闭域.

5. 求证关于多项式的 Rolle 定理: 如果$f(a)=0=f(b)$而$a<b$, 则存在一个$c\in(a,\ b)$使$f'(c)=0$.

6. 求证关于多项式的中值定理: 若$a<b$,则存在一个$c\in(a,\ b)$使$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

7. 求证在每个有限闭区间$a\leqslant x\leqslant b$上$f(x)$有一个极大值.

5.2 Sturm 定理

在本节里我们将导出一个经典的结果, Sturm 定理, 它给出决定一个多项式方程$f(x)=0$在一实闭域里根的精确个数的一个方法. 在此推导中我们将相当紧密地遵循 Weber 在 *Lehrbuch der Algebra* (1898), Vol. 1, pp. 301−313 讲解的过程.

设R为一实闭域, 并令$f(x)$为一系数在R内的正次数多项式. 依照 Weber 的做法,我们将说多项式列

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_s(x), \tag{2}$$

为$f(x)$对闭区间$[a,\ b]$(即$a\leqslant x\leqslant b$)的一个 Sturm 多项式列, 如果$f_i(x)\in R[x]$且满足下列条件:

(i) 在$[a,\ b]$内$f_s(x)$没有根,

(ii) $f_0(a)f_0(b)\neq 0$,

(iii) 若$c\in[a,\ b]$是$f_j(x)$之一根, $0<j<s$, 则$f_{j-1}(c)f_{j+1}(c)<0$.

(iv) 若对$c\in[a,\ b]$, $f(c)=0$,则存在开区间$(c_1,\ c)$(即$c_1<x<c$)与$(c,\ c_2)$使对任一$u\in(c_1,\ c)$有$f_0(u)f_1(u)<0$且对任一$u\in(c,\ c_2)$有$f_0(u)f_1(u)>0$.

我们将对根互异的任一多项式来证明这种序列的存在性. 但

先来看一看如何用这样一个序列来决定 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内根的个数. 我们来考察 R 的元素序列

$$f_0(a), f_1(a), \cdots, f_s(a)$$
$$f_0(b), f_1(b), \cdots, f_s(b)$$

的变号个数. 如果 $c=\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ 为 R 的非零元素的一个有限序列, 则我们定义 c 的变号个数为集 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ 内使 $c_ic_{i+1}<0$ 的 i 的个数. 若 $c=\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ 为 R 中元素的任一序列, 则我们定义 c 的变号个数为弃去 c 内诸 0 而得到的子序列 c' 的变号个数. 例如

$$\{1, 0, 0, 2, -1, 0, 3, 4, -2\}$$

有三个变号.

我们现在可陈述

定理 5.4 设 $f(x)$ 为系数在一实闭域 R 里的一个正次数多项式, 且设 $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_s(x)$ 为 $f(x)$ 对区间 $[a, b]$ 的一个 Sturm 序列. 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内互异根的个数是 V_a-V_b, 这里一般地用 V_c 记序列 $\{f_0(c), f_1(c), \cdots, f_s(c)\}$ 的变号个数.

证明 区间 $[a, b]$ 被所给 Sturm 序列的诸多项式 $f_j(x)$ 的各个根分解为一些子区间. 于是我们有一序列 $a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b$ 使在 (a_i, a_{i+1}) 内没有一个 $f_j(x)$ 有一个根. 首先设 $c\in(a_0, a_1)$, 所以没有一个 f_j 在 (a_0, c) 内有根. 此时按介值定理 (定理 5.3) 对所有的 $j\in\{0, 1, \cdots, s\}$ 皆有 $f_j(a_0)f_j(c)\geqslant 0$. 故若没有一个 $f_j(a_0)=0$, 则 $f_j(a_0)f_j(c)>0$. 它可推出 $V_{a_0}=V_c$. 现在设对某 k, $f_k(a_0)=0$. 由于 $f_0(a)\neq 0$, $f_s(a)\neq 0$, (按 Sturm 序列的性质) 故有 $0<k<s$. 则按性质(iii), 有 $f_{k-1}(a_0)f_{k+1}(a_0)<0$. 由于 $f_{k-1}(x)$ 与 $f_{k+1}(x)$ 在 (a_0, c) 内没有根, 所以我们有 $f_{k-1}(a_0)f_{k-1}(c)>0$ 与 $f_{k+1}(a_0)f_{k+1}(c)>0$. 由此推出 $f_{k-1}(c)f_{k+1}(c)<0$. 于是 f_{k-1}

(a_0), 0, $f_{k+1}(a_0)$以及$f_{k-1}(c)$, $f_k(c)$, $f_{k+1}(c)$分别提供给V_{a_0}与V_c一个变号. 把所有的k计算在内, 我们就看到$V_{a_0}=V_c$. 一个相似的论证表明: 若$d\in(a_{m-1}, a_m)$, 则$V_d=V_{a_m}$. 令$c\in(a_{i-1}, a_i)$, $d\in(a_i, a_{i+1})$, 这里$1<i<m-1$. 则同样的论证表明: 只要$f(a_i)\neq 0$就有$V_c=V_d$. 设$f(a_i)=0$. 则按(iv)我们有$f_0(c)f_1(c)<0$而$f_0(d)f_1(d)>0$. 于是序列$f_0(c)$, $f_1(c)$有一变号而序列$f_0(d)$, $f_1(d)$却没有变号. 若$j>1$则前面所用的论证表明$f_{j-1}(c)$, $f_j(c)$, $f_{j+1}(c)$与$f_{j-1}(d)$, $f_j(d)$, $f_{j+1}(d)$有相同的变号个数. 故若$f(a_i)=0$则$V_c-V_d=1$. 选$a_i'\in(a_{i-1}, a_i)$则

$$V_a-V_b=(V_a-V_{a_1'})+\sum_1^{m-1}(V_{a_i'}-V_{a_{i+1}'})+(V_{a_m'}-V_b).$$

而右边每个括号的测定表明这些或者是0, 或者是1. 而且1出现的个数等于$f(x)$的根$a_i(i\in\{1, 2, \cdots, m\})$的个数. 于是$V_a-V_b$就是$(a, b)$内$f(x)$的根的个数.

现在设$f(x)$为$R[x]$内任一正次数多项式. 我们定义关于$f(x)$的标准序列为

$$\begin{aligned}
&f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=f'(x)\ (f(x)\text{的形式导数})\\
&f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x), \qquad \deg f_2<\deg f_1.\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\vdots\\
&f_{i-1}(x)=q_i(x)f_i(x)-f_{i+1}(x) \quad \deg f_{i+1}<\deg f_i\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\vdots\\
&f_{s-1}(x)=q_s(x)f_s(x) \qquad\qquad (\text{即 } f_{s+1}(x)=0).
\end{aligned}\tag{3}$$

于是各$f_i(x)$可以由求$f(x)$与$f'(x)$的g.c.d.的Euclid算法稍作修改而得到, 即在每一步所得的最后一个多项式是除法算式中余式的负元. 例如$f(x)=x^3+x+1$, $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=3x^2+1$, $f_0(x)=\left(\frac{1}{3}x\right)f_1(x)-\left(-\frac{2}{3}x-1\right)$, 故$f_2(x)=-\frac{2}{3}x-1$. 而$f_1(x)=$

$\left(-\frac{9}{2}x+\frac{27}{4}\right)f_2(x)-\left(-\frac{31}{4}\right)$, 故 $f_3(x)=-\frac{31}{4}$. 此时关于 $f(x)$ 的标准序列就是

$$x^3+x+1,\ 3x^2+1,\ -\frac{2}{3}x-1,\ -\frac{31}{4}.$$

在一般情形由(3)显然知 $f_s(x)$ 是每个 $f_i(x)$ 的因式且它是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的一个 g.c.d. 现在置 $g_i(x)=f_i(x)f_s(x)^{-1}$ 而考察序列

(4) $$g_0(x),\ g_1(x),\ \cdots,\ g_s(x).$$

我们来证这是关于 $g_0(x)$ 对任一使 $g_0(a)\neq 0, g_0(b)\neq 0$ 的区间 $[a, b]$ 的一个 Sturm 列. 条件(ii)显然成立. 且因 $g_s(x)=1$ 故(i)亦成立. 用 $f_s(x)$ 去除(3)内多项式就给出关系:

(5) $$g_{j-1}(x)=q_jg_j(x)-g_{j+1}(x).$$

现在设 $g_j(c)=0$, 则(5)表明 $g_{j-1}(c)g_{j+1}(c)\leqslant 0$ 而且 $g_{j-1}(c)=0$ 当且仅当 $g_{j+1}(c)=0$. 在后一情形我们得到 $0=g_{j-1}(c)=g_j(c)=g_{j+1}(c)=\cdots$ 违反了 $g_s=1$. 因此我们看到 $g_{j-1}(c)g_{j+1}(c)<0$. 这就建立了 (iii). 其次假定对 $c\in[a, b]$ 有 $g_0(c)=0$. 则我们有 $f(x)=(x-c)^eh(x)$, $e>0$, $h(c)\neq 0$. 及

$$f'(x)=(x-c)^eh'(x)+e(x-c)^{e-1}h(x),$$

$$f_s(x)=(x-c)^{e-1}k(x),\quad k(c)\neq 0$$

因而 $h(x)=k(x)l(x)$ 此处 $l(c)\neq 0$ 且 $h'(x)=k(x)m(x)$. 这些关系给出

$$g_0(x)=(x-c)l(x),\quad l(c)\neq 0.$$

(6) $$g_1(x)=(x-c)m(x)+el(x).$$

故 $g_1(c)=el(c)\neq 0$. 现在选取含 c 为其内点的一个区间 $[c_1, c_2]$ 使得在 $[c_1, c_2]$ 上 $g_1(x)l(x)\neq 0$. 此时, 按介值定理与 $g_1(c)=el(c)\neq 0$, 就在 $[c_1, c_2]$ 上恒有 $g_1(x)l(x)>0$. 因而在 $[c_1, c_2]$ 上 $g_0(x)g_1(x)=(x-c)g_1(x)l(x)$ 与 $x-c$ 有相同的符号, 故对 $c_1\leqslant x<$

•, $g_0(x)g_1(x)<0$, 而对 $c<x<$, $g_0(x)g_1(x)>0$. 这表明(iv)成立. 从而(4)是关于 $g_0(x)$ 的一个 Sturm 列.

如果 $f(x)$ 没有重根, 则 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的 g.c.d. 是 1. 此时序列 $\{f_0(x), f_1(x), \cdots, f_s(x)\}$ 与 $\{g_0(x), g_1(x), \cdots, g_s(x)\}$ 相差 R 里的一个非零倍数. 因而 $f_i(x)$ 的序列就是关于 $f(x)=f_0(x)$ 的 Sturm 列. 如果 $f(x)$ 有重根, 则标准序列(4)将不是对于包含 $f(x)$ 的一重根的区间的 Sturm 列. 然而, 我们仍然可用标准序列去决定 $f(x)$ 在 (a, b) 内互异根的个数. 这是 Sturm 定理的内容:

Sturm 定理 *设 $f(x)$ 为系数在一实闭域 R 内的正次数多项式且设 $\{f_0(x)=f(x), f_1(x)=f'(x), \cdots, f_s(x)\}$ 为关于 $f(x)$ 的标准序列(4). 假设 $[a, b]$ 为一区间使得 $f(a)\neq 0$, $f(b)\neq 0$. 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内互异根的个数就是 V_a-V_b. 此处 V_c 是 $\{f_0(c), f_1(c), \cdots, f_s(c)\}$ 的变号个数.*

证明 令 $g_i(x)=f_i(x)f_s(x)^{-1}$ 如上. 则不论重数时, 多项式 $f(x)$ 与 $g_0(x)$ 在 $[a, b]$ 内有相同的根(4.4 节练习 1). 由于 $\{g_i(x)\}$ 是 $g_0(x)$ 对 $[a, b]$ 的一个 Sturm 列, 所以这些根的个数是 $V_a(g)-V_b(g)$, 此处 $V_c(g)$ 是 $\{g_i(c)\}$ 的变号个数. 由于

$$f_i(c)=g_i(c)f_s(c) \quad 及 \quad f_s(a)\neq 0, f_s(b)\neq 0,$$

所以显然 $V_a(g)=V_a$, $V_b(g)=V_b$, 因而 V_a-V_b 就是 $f(x)$ 在 (a, b) 内互异根的个数.

我们已经指出(5.1 节习题 4) $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 R 内的根都在区间 $[-M, M]$ 内, 此处 $M=\max\{1, |a_1|+\cdots+|a_n|\}$. 如果我们置 $\mu=1+|a_1|+\cdots+|a_n|$, 则 $f(x)$ 在 R 里的根都在 $(-\mu, \mu)$ 内. 故若 $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_s(x)$ 是关于 $f(x)$ 的标准序列, 则 $f(x)$ 在 R 内根的个数是 $V_{-\mu}-V_{\mu}$. 此处象通常一样, V_c 是 $\{f_0(c), f_1(c), \cdots, f_s(c)\}$ 的变号个数. 这就给出决定 $f(x)$ 在 R 内的根的个数的一个构造性方法. 有时用一个界

η 代替 μ 更好些. η 是关于 a_j 的一个多项式. 观察到 $1+a_i^2>|a_i|$, 就可得到这样的一个界, 所以我们可取

$$\eta=1+\sum(1+a_i^2)=n+1+\sum a_i^2. \tag{7}$$

此时 $f(x)$ 在 R 内的根都落在 $(-\eta, \eta)$ 内

练　习

1. 应用 Sturm 定理证明 x^3-7x-7 有二个实根在 $(-2, -1)$ 内.

2. 应用该定理决定 x^4+12x^3+5x-9 的实根个数.

3. 设 $f(x)=x^3+px+q$, $p\neq 0$, 求证

$$f_0=f,\ f_1=3x^2+p,\ f_2=-2px-3q,\ f_3=-4p^3-27q^2$$

为 $f(x)$ 对使 $f(a)f(b)\neq 0$ 的任一 $[a, b]$ 的 Sturm 列. 注意 $f_3=d$ 为 $f(x)$ 的判别式(4.8 节). 用 Sturm 定理证明 f 按 $d<0$ 或 $d>0$ 而有单独一个实根或三个互异实根.

4. 设 $f(x)=x^4+qx^2+rx+s$, $L=8qs-2q^3-9r^2$, d 为 $f(x)$ 的判别式, 求证

若 $d<0$ 则 f 的实根个数是 2;

若 $d>0$, $q<0$, $L>0$, 则 f 有 4 个互异实根;

若 $d>0$, 而且或者 $q\geqslant 0$, 或者 $L\leqslant 0$, 则 f 无实根.

5. 用递推公式

$$nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)=0$$

定义 Legendre 多项式序列 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$, 此处 $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$. 求证 $\{P_m, P_{m-1}, \cdots, P_1, P_0\}$ 为 P_m 对区间 $[-1, 1]$ 的一个 Sturm 列. 求证 P_m 在 $(-1, 1)$ 内有 m 个互异实根.

6. 设 R 为一实闭域, $f(x)\in R[x]$, $\deg f(x)=n$. 令 W_a 记序列 $\{f(c), f'(c), \cdots, f^{(n)}(c)\}$ 内变号个数. 证明 Budan 定理: 若 $a<b$ 且 $f(a)f(b)\neq 0$, 则 W_a-W_b 比 $f(x)$ 在 (a, b) 内根的个数(计及重数)多一个非负偶整数.

7. 从练习 6 推断 Descarte 符号律: 设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_lx^{n-l},\ a_0a_l\neq 0,\ a_i\in R.$$

令 P 为 $\{a_0, a_1, \cdots, a_l\}$ 内变号个数. 求证 P 比 $f(x)$ 的正根个数(计及重数)多一个非负偶整数.

5.3 形式化的 Euclid 算法与 Sturm 定理

在本章的最后部分我们将叙述一个检验由多元多项式方程、不等方程($F\neq 0$)以及不等式($F>0$)所构成的有限组在一实闭域 R 内的可解性的方法. 主要结果 (Tarski 定理) 将是给定了这样的一个组之后，我们可在有限步之内决定有限个由关于所给组内系数的多项式方程，不等方程与不等式构成的一个组，使得所给的组在 R 内有解当且仅当有一个导出组的每个方程，不等方程与不等式为其系数所满足. 作为我们将要得到的结果的这种类型的一个例证，我们来考察"既约"四次方程 $x^4+qx^2+rx+s=0$, q, r, $s\in R$ 的情形. 在这里可证它在 R 内有根当且仅当包含判别式

$$d=4\left(4s+\frac{1}{3}q^2\right)^3-27\left(\frac{8}{3}qs-r^2-\frac{2}{27}q^3\right)^2$$

与表达式

$$L=8qs-2q^3-9r^2$$

的下列条件之一被满足:

I. $d<0$,

II. $d>0$, $q<0$, $L>0$,

III. $d=0$, $r\neq 0$,

IV. $d=0$, $r=0$, $q\leqslant 0$.

这很容易从上节习题 4 以及"当且仅当方程有重根时$d=0$"这个事实推出.

在本节内我们将证明，对系数都是在一实闭域里取值的参数的任一方程可得到一个与 Sturm 定理相似的结果，它基于求多项式的 g.c.d. 的 Euclid 算法的一个参数化表述. 现在我们来导出它. 我们从形如 $A=K[t_1, \cdots, t_r]$ 的一个系数环出发. 这里每个 t_i 都是参数而 K 或为 $\mathbf{Z}$ 或为域 $\mathbf{Z}/(p)$, p 为素数. 设 $F(t_1, \cdots, t_r; x), G(t_1, \cdots t_r; x)\in A[x]$, 则