数理统计导论

R.V.豪格 A.T.克莱格 著 朱铉道 俞宗源 钱辉镜 译

高等教育出版社

数理统计导论

R.V. 豪格　A.T. 克莱格　著
朱铉道　俞宗源　钱辉镜　译

高等教育出版社

内容提要

本书是根据麦克米仑出版公司1978年出版的数理统计导论(Introduction to Mathematical Statistics)第四版翻译的，前五章介绍了必需的随机变量的分布理论，后六章叙述了估计、统计假设检验、非参数方法、独立性、稳健性、多元正态分布以及二次型等内容，可供高等学校教学数理统计课程时参考。

数理统计导论

R.V.豪格　A.T.克莱格　著

朱锿道　俞宗源　钱辉镜　译

•

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

•

开本 850×1168　1/32　印张 17.5　　字数 420 000

1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷

印数 00.001—1,900

ISBN 7-04-000307-3/O·65

定价 5.40 元

前　言

我们十分感谢全国各地的同事，他们如此慷慨地向我们提供《数理统计导论》这一版中的编排次序和材料种类这两方面的建议。我们相信读者会发现,这一版比前一版更适宜于做教科书用。此外，在前五章中基本上建立了所有必需的分布理论。接着在第六、七、八、九章中分别是估计和包括非参数方法的统计假设检验。然而，在第六章估计理论后可直接地、较早地引入第十章的充分统计量。第十一章的许多课题还可以按下述方式较早地引入:在估计的优良性的度量(6·2) 后引入劳-克拉美(Rao-Cramér)不等式(11·1) 和稳健的估计 (11·7)，在最佳检验(7·2)后讲序贯分析(11·2)，在方差分析 (8·5) 后介绍多重比较(11·3)，以及在样本相关系数(8·7)的材料后引入分类(11·4)。有了这个机动性，在一学期每周 6 学时或者一学季每周 8 学时的教程中，就能容易地讲完前八章，而第九至第十一章的各种课题可根据时间许可由教师选择，作为补充。在较长的教程中，我们希望有许多教师和学生能关心下列课题:随机独立性(11·5),稳健性(11·6和11·7),多元正态分布(12·1)以及二次型(12·2和12·3)。

我们感谢凯瑟林·M·汤普生(Catherine M·Thompson)，马克辛·梅林顿(Maxine Merrington) 和 E.S.皮尔逊(E.S.Pearson)教授，经他们许可采用（本书的）表Ⅱ与Ⅴ，这两张表是由 Biometrika（公司）出版的表的摘要和改编。我们要感谢爱丁堡(Edinburgh)的奥列弗(Oliver)和博伊德(Boyd)有限公司，允许我们采用（本书的）表Ⅳ，这张表是《供生物、农业和医学研究

的统计表》一书中的表Ⅲ的摘要和改编，而该书是剑桥大学(Cambridge)已故的罗纳德·A·费歇耳(Ronald A. Fisher)教授（爵士）和罗泽姆斯特大学（Rothamsted）的弗兰克·邪茨（Frank Yates）博士合编的。最后，我们还要感谢凯莉恩·霍纳（Karen Horner）夫人，这一版手稿的准备得到了她最好的帮助。

R. V. H.

A. T. C.

目　录

第一章　随机变量的分布

§1·1 引　言

在基本上相同的条件下做重复试验，可以说是一种常规方法，用这种方法可以部分地刻划许多种研究的特点．例如，在医学的研究方面，也许感兴趣的中心问题是所给药品的疗效；又如，一个经济学家可能关心在各个期间内三种指定的商品的价格；再如，农艺师可能希望研究某种化学肥料对某种谷物产量的作用．一个研究者对任一这样的现象能抽出信息的唯一方法是做试验．每个试验结束有一个结果．但这些试验的特点是：在试验完成前，结果是不能准确地预言的．

假定有这样一种试验，试验的结果是不能准确地预言的，可是试验有这样一种性质：在试验完成前，能描述一切可能结果的集合．如果在相同条件下，这种试验能重复进行，就称它为**随机试验**，并称一切可能结果的集合为**试验的空间**或**样本空间**．

例 1　掷一枚硬币，设 T 表示掷出的结果为背面，H 表示结果为正面．如果我们假定在相同条件下这枚硬币能重复地抛掷，那末掷这枚硬币就是随机试验的一个例子．在该随机试验中，结果是两个符号 T 和 H 之一，即样本空间是这两个符号的集合．

例 2　掷一个红骰子和一个白骰子，设结果是有序对（红骰子向上的点数，白骰子向上的点数），如果我们假定在相同条件下这两个骰子能重复地掷，那末掷这对骰子是一个随机试验，并且样本空间由36个有序对 $(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,6)$ 组成．

设$\mathscr{C}$表示一个样本空间，C表示$\mathscr{C}$的一部分。如果当试验完成时，结果在C内，我们就说**事件**C已发生。现在设想这个随机试验已重复地做了N次。则在全部N次试验中。我们能计算事件C实际上发生的次数f（频数）。比值$\frac{f}{N}$称为在这N次试验中事件C的**相对频率**。当你掷一枚硬币时就能发现，对于小的N值，通常相对频率相当不稳定。但是当N增大时，经验表明相对频率趋向于稳定。这就启示我们：与事件C联系着一个数，譬如说p，它等于或近似等于事件C的相对频率似乎稳定在其附近的那个数。如果我们作了这样的联系，那末数p可以解释为将来在试验完成时，事件C的相对频率将等于或近似等于的那个数。这样，虽然我们**不能**预言一个随机试验的结果，但是对于一个大的N值，我们**能**近似地预言结果将在C内的相对频率。与事件C相联系的数p有各种名称。有时候称p为随机试验的结果在C内的**概率**；有时候称p为事件C的**概率**；有时候称p为C的**概率测度**。通常根据上下文选择适当的术语。

例3 设$\mathscr{C}$表示例2的样本空间，C是$\mathscr{C}$中两数之和等于7的一切有序对的集合。于是C是集合$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$。假定这对骰子掷了$N=400$次，并设“两个骰子点数和为7”（即事件$C$）的频数是$f=60$。则结果在$C$内的相对频数为$\frac{f}{N}=\frac{60}{400}=0.15$。于是有一个与$C$联系着的接近于0.15的数$p$，并称$p$为事件$C$的概率。

注 上面关于概率的解释，有时候称为**相对频率方法**，它明显地依赖于这样的事实：在基本上相同的条件下，一个试验能重复地进行。可是，许多人给概率以另外的解释，把它当作信任的合理的度量。例如，对他们来说，$p=\frac{2}{5}$意味着他们**个人认为的或主观上认为的**事件C的概率等于$\frac{2}{5}$。因此，如果他们不反对赌博，那末$p=\frac{2}{5}$就可以解释为他们敢断言C发生的一种意愿；使

得两种可能的支付有比例$\frac{p}{1-p}=\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$. 此外，如果他们确实相信 $p=\frac{2}{5}$是正确的，他们就愿意接受下述任何一种赌法：(a)若 C 发生，赢 3 个单位，若 C 不发生，输 2 个单位；(b) 若 C 不发生，赢 2 个单位，若 C 发生，输 3 个单位. 然而，由于在§1·4中所给的概率的数学性质是与这两种解释的任一种一致的，因此，后来的数学发展不取决于用哪一种方法解释概率。

建立统计的数学理论的主要目的是给随机试验提供数学模型. 一旦这种试验的数学模型已经提供而且理论也已详细地建立，统计学家就可以在这范围内对随机试验作出推断(即获得结论). 建立这样的一个模型需要概率的理论. 一个逻辑上令人较为满意的概率理论是建立在集合和集合函数的概念基础上的. 这些概念将在§1·2 和 §1·3 中引入.

习 题

1·1. 描述下列每一个随机试验的样本空间$\mathscr{C}$.用你已有的经验(或凭直观)给出下列各例中事件C 的概率 p 的值：

(a)掷一枚匀称的硬币，这里事件C 是掷出的结果为背面.

(b)掷一个普通的骰子，这里事件C 是掷得 5 点或 6 点.

(c)从一副普通的扑克牌中取一张，这里事件C表示所取的牌是黑桃.

(d)在区间$[0,1]$上取一数，这里若所取的数小于$\frac{1}{3}$，则事件C发生.

(e)从对角顶点为$(-1,-1)$和$(1,1)$的正方形内取一点，这里若所取的点的坐标之和小于$\frac{1}{2}$，则事件C发生.

1·2. 从一指定的圆内任取一点. 给出所取的点在下述另一个圆内的概率 p：圆的半径是指定的圆的半径的一半，且该圆全部在指定的圆内.

1·3. 掷一枚匀称的硬币两次.分别给出下列两事件的概率p_1和 p_2：第一次掷是正面，第二次是背面；在两次抛掷中，一次正面，一次背面.

§1·2 集合代数

集合或对象的集合的概念常常处于无定义状况．然而，可以描述一个特定的集合，以致对所考虑的对象的集合不会引起误解．例如，前 10 个正整数的集合是描述得足够好的，它表明数$\frac{3}{4}$和14不在这个集合内，而数 3 在该集合内．如果一个对象属于某个集合，就说该对象是这个集合的一个**元素**．例如，若 A 表示满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数 x 的集合，则$\frac{3}{4}$是集合A的一个元素．$\frac{3}{4}$是集合 A 的一个元素这一事实用$\frac{3}{4}\in A$表示．更一般地，$a\in A$ 意味着 a 是集合 A 的一个元素．

与我们有关的集合常常是**数集**．可是，**点集**的语言多少比数集语言方便些．因此，我们简要地说明我们是怎样用这些术语的．在解析几何中值得强调的是，在直线上（其上原点和一个单位的点已选定）的每一点对应着唯一的数 x；并且每一个数 x，对应着直线上唯一的点．这数与直线上的点之间的一一对应，使我们能够把"数 x"说成"点 x"而不致于引起误解．此外，对于一平面直角坐标系和数 x、y 而言，每一个符号 (x,y) 对应着平面上唯一的点；并且在平面上的每一个点对应着唯一的符号(x,y)．这里我们又可以说，"点(x,y)"就是"有序数对 x,y"．当三维或更高维空间有一个直角坐标系时，我们也能用这种方便的语言．这样"点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$"就是有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$．因此，在描述集合时，我们常讲到一个点集（一个元素为点的集合），当然描述应该是小心的，以避免任何混淆．记号 $A=\{x;0\leqslant x\leqslant 1\}$解释为"$A$ 是由满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点 x 组成的一维集合"．类似地，$A=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$可解释为"$A$ 是由以点$(0,0)$、$(1,1)$为对角顶点的正方形的内部或边界上的点(x,y)组成的二维集合"．现在给出一些定义（结合例子说明）并导出一个对我们的目的来说已足

够的初等集合代数.

定义 1 若集合 A_1 的每一个元素也是集合 A_2 的一个元素，则集合 A_1 叫做集合 A_2 的一个**子集**. 记作 $A_1 \subset A_2$. 若 $A_1 \subset A_2$，并且 $A_2 \subset A_1$，则这两个集合有相同元素，记作 $A_1 = A_2$.

例 1 设 $A_1 = \{x; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，$A_2 = \{x; -1 \leqslant x \leqslant 2\}$. 这里可看出，一维集合 A_1 是一维集合 A_2 的子集，即 $A_1 \subset A_2$. 今后，当集合的维数清楚时，对它我们就不作具体的说明.

例 2 设 $A_1 = \{x, y); 0 \leqslant x = y \leqslant 1\}$，$A_2 = \{(x, y); 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. 因为 A_1 的元素是正方形（即 A_2 的图形）一条对角线上的点，故 $A_1 \subset A_2$.

定义 2 若一个集合 A 不含任何元素，则称 A 为**空集**. 记作 $A = \varnothing$.

定义 3 由所有至少属于集合 A_1 和 A_2 中的一个的元素组成的集合，叫做 A_1 和 A_2 的**并集**. A_1 和 A_2 的并集记作 $A_1 \cup A_2$. 若干个集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的并集是由所有至少属于这若干个集合中的一个的元素组成的集合. 这个并集记作 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$，如果所包含的集合的个数是有限数 k，那末记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$.

例 3 设 $A_1 = \{x; x = 0, 1, \cdots, 10\}$，$A_2 = \{x; x = 8, 9, 10, 11$ 或 $11 < x \leqslant 12\}$. 则 $A_1 \cup A_2 = \{x; x = 0, 1, \cdots, 8, 9, 10, 11$ 或 $11 < x \leqslant 12\} = \{x; x = 0, 1, \cdots, 8, 9, 10$ 或 $11 \leqslant x \leqslant 12\}$.

例 4 设 A_1 和 A_2 如例 1 所定义的. 则 $A_1 \cup A_2 = A_2$.

例 5 设 $A_2 = \varnothing$，则对任一集合 A_1，$A_1 \cup A_2 = A_1$.

例 6 对任一集合 A，$A \cup A = A$.

例 7 设 $A_k = \left\{x; \frac{1}{k+1} \leqslant x \leqslant 1\right\}$，$k = 1, 2, 3, \cdots$. 则 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \{x; 0 < x \leqslant 1\}$. 注意，数零不在这个集合内，因为它不在集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的任一个内.

定义 4 由所有属于集合 A_1 又属于集合 A_2 的元素组成的集

合叫做 A_1 与 A_2 的**交集**. A_1 与 A_2 的交集记作$A_1\cap A_2$. 若干个集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的交集是由所有属于 $A_1,A_2,A_3,\cdots$中的每一个集合的元素组成的集合. 这个交集记作 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots$,如果所包含的集合个数是有限数 k,那末记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$.

例 8 设 $A_1=\{(x,y);(x,y)=(0,0),(0,1),(1,1)\}$,$A_2=\{(x,y);(x,y)=(1,1),(1,2),(2,1)\}$. 则$A_1\cap A_2=\{(x,y);(x,y)=(1,1)\}$.

例 9 设$A_1=\{(x,y);0\leqslant x+y\leqslant 1\}$,$A_2=\{(x,y);1<x+y\}$. 则 A_1 与 A_2 无公共点,$A_1\cap A_2=\varnothing$.

例 10 对任一集合 A, $A\cap A=A$, 并且$A\cap\varnothing=\varnothing$.

例 11 设 $A_k=\left\{x;0<x<\dfrac{1}{k}\right\}$, $k=1,2,3,\cdots$. 则$A_1\cap A_2\cap A_3\cdots$是空集, 因为不存在属于集合 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的每一个的点.

例 12 若用A_1和A_2表示由两个相交的圆分别围成的点集,则集合 $A_1\cup A_2$ 和 $A_1\cap A_2$ 分别用图 1·1 的**维恩图** (Venn diagram) 的阴影部分表示.

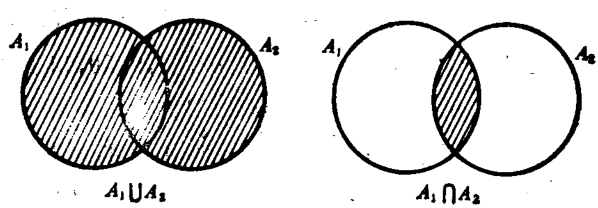

图 1·1

例 13 若用 A_1,A_2 和 A_3 表示由三个相交的圆分别围成的点集. 则我们用图 1·2 来描述集合$(A_1\cup A_2)\cap A_3$和$(A_1\cap A_2)\cup A_3$.

定义 5 在某些讨论或研究中, 可以描述与讨论有关的所有元素的全体. 给所考虑的所有元素的集合一个专门的名字, 叫做

空间。通常用大写的手写体字母如$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$表示。

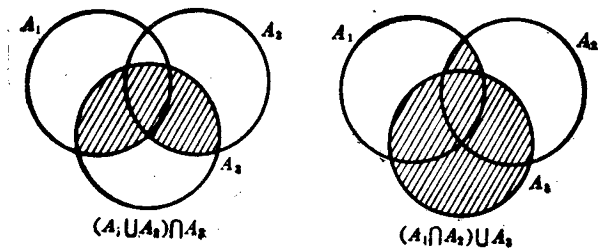

图 1·2

例 14 掷一枚硬币四次，x表示出现"正面"的次数。必然地，"正面"的次数将是数 0,1,2,3,4 中的一个。于是，这里空间是集合$\mathscr{A}=\{x;\ x=0,1,2,3,4\}$。

例 15 考虑所有底为x、高为y的非退化矩形。为了使讨论有意义，x与y必须是正的．于是空间是集合$\mathscr{A}=\{(x,y);x>0,\ y>0\}$。

定义 6 设$\mathscr{A}$表示空间，A是$\mathscr{A}$的一个子集。由所有$\mathscr{A}$中不属于A的元素组成的集合，叫做A（实际上是关于$\mathscr{A}$）的**余集**，记作A^*。特别地，$\mathscr{A}^*=\varnothing$。

例 16 设$\mathscr{A}$是如例 14 所定义的，$A=\{x;\ x=0,1\}$。A（关于$\mathscr{A}$）的余集是$A^*=\{x;\ x=2,3,4\}$。

例 17 已知$A\subset\mathscr{A}$，则$A\cup A^*=\mathscr{A}$，$A\cap A^*=\varnothing$，$A\cup\mathscr{A}=\mathscr{A}$，$A\cap\mathscr{A}=A$和$(A^*)^*=A$。

习　题

1·4. 求集合A_1,A_2的并集$A_1\cup A_2$和交集$A_1\cap A_2$，其中：

(a) $A_1=\{x;x=0,1,2\}$，$A_2=\{x;x=2,3,4\}$。

(b) $A_1=\{x;0<x<2\}$，$A_2=\{x;1\leqslant x<3\}$。

(c) $A_1=\{(x,y);0<x<2,0<y<2\}$，$A_2=\{(x,y);1<x<3,1<y<3\}$。

1·5. 求集合A关于空间$\mathscr{U}$的余集A^*：

(a) $\mathscr{U}=\{x;\ 0<x<1\}$，$A=\{x;\ \frac{5}{8}\leqslant x<1\}$。

(b) $\mathscr{U}=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，$A=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2=1\}$。

(c) $\mathscr{U}=\{(x,y);\ |x|+|y|\leqslant2\}$，$A=\{(x,y);x^2+y^2<2\}$。

1·6. 列出四个字母m,a,r和y的所有可能的排列。设A_1是y在最后一个位置上的所有排列的集合，A_2是m在第一个位置上的所有排列的集合。求A_1，A_2的并集和交集。

1·7. 用维恩图（在维恩图中，空间$\mathscr{U}$是包含若干个圆的矩形所围成的点集。）比较下列集合：

(a) $A_1\cap(A_2\cup A_3)$与$(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)$。

(b) $A_1\cup(A_2\cap A_3)$与$(A_1\cup A_2)\cap(A_1\cup A_3)$。

(c) $(A_1\cup A_2)^*$与$A_1^*\cap A_2^*$。

(d) $(A_1\cap A_2)^*$与$A_1^*\cup A_2^*$。

1·8. 若集合序列$A_1,A_2,A_3,\cdots$满足$A_k\subset A_{k+1}$，$k=1,2,3,\cdots$，则称它为**非减序列**。试给出这种集合序列的一个例子。

1·9. 若集合序列$A_1,A_2,A_3,\cdots$满足$A_k\supset A_{k+1}$，$k=1,2,3,\cdots$，则称它为**非增序列**。试给出这种集合序列的一个例子。

1·10. 当集合$A_1,A_2,A_3,\cdots$满足$A_k\subset A_{k+1}(k=1,2,3,\cdots)$时，$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$定义为并集$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$。求$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$：

(a) $A_k=\left\{x;\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant3-\frac{1}{k}\right\}$，$k=1,2,3,\cdots$。

(b) $A_k=\left\{(x,y);\frac{1}{k}\leqslant x^2+y^2\leqslant4-\frac{1}{k}\right\}$，$k=1,2,3,\cdots$。

1·11. 当集合$A_1,A_2,A_3,\cdots$满足$A_k\supset A_{k+1}(k=1,2,3,\cdots)$时，$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$定义为交集$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots$。求$\lim\limits_{k\to\infty}A_k$：

(a) $A_k=\left\{x;\ 2-\frac{1}{k}<x\leqslant2\right\}$，$k=1,2,3,\cdots$。

(b) $A_k=\left\{x;\ 2<x\leqslant2+\frac{1}{k}\right\}$，$k=1,2,3,\cdots$。

(c) $A_k=\left\{(x,y);\ 0\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{1}{k}\right\}$，$k=1,2,3,\cdots$。