经济数学基础

陈　度　　魏有德　　谢勉忠　　著

四 川 大 学 出 版 社

经济数学基础

陈　度　魏有德　谢勉忠编

四川大学出版社（成都四川大学内）

四川省新华书店发行　百花潭中学印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1／16　印张33　字数710千

1987年8月第一版　1987年8月第一次印刷

印数：1—5000册

标准书号：ISBN 7—5614—0013—6／O·3

统一书号：13404·18　定价：4.42元

前　言

随着我国“四化”建设的迅速发展，对经济和管理工作提出越来越高的要求，经济数学的应用也越来越广泛，因此经济类许多专业都把经济数学作为一门重要的基础课．

本书是在多年讲授经济数学的讲义基础上编写而成的，力求文字通俗易懂，概念深入浅出，精选例题，结合数学在经济学中的应用较详细地介绍了计算方法，在各章的最后编写了小结，便于自学．除在各节末配有练习外，还在各章小结之后配有习题，以供学生参考，也为报考经济类硕士研究生的高等数学作参考．

本书内容包括一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数等共12章．授完本书约需200学时，为了适用于各专业和各类型（本科、专科、夜大、电大、函授和培训班）的学生，在选取教材内容时留有一定的余地．按照教学大纲的不同要求，对于专科及培训班的学生，可只讲授一元函数微积分（第1—4章），多元函数微积分（第6章），线性代数（第8—10章），约需144学时．

本书由陈度副教授主编，魏有德和谢勉忠老师参加编写，具体执笔为：第一、二、三、四、五、七章——魏有德；第六章——谢勉忠；第八、九、十、十一、十二章——陈度．

由于编者水平有限，不妥之处，望广大读者批评指正，以便今后进一步修改．

目　录

第一章　函　数

集合和函数是数学的基础知识，本章所要介绍的集合、映射和函数，是这本教材的预备知识，是中学所学过的内容的复习和深化．全章内容分三部份，第一部分介绍集合和映射的基本概念，第二部份介绍（一元实）函数的基本知识，其中特别提出了经济学中常见的一些函数的名词，第三部份是讲我们研究的主要函数类型——初等函数和分段函数．

§1.1　集合

集合论是一门现代的数学，从某种意义上讲，它也是数学的语言和基础．

（一）　集合概念

什么是集合？我们把它当作一个不加定义的概念，而将其描述为：若干具有某种特性的、确定而又彼此不相同的对象汇集在一起形成的一个整体．构成集合的各个对象叫做该集合的**元素**（或**点**），通常以大写字母A、B、C…表示集合，而以小写字母a、b、c…表示元素．如果a是集合A的元素，用$a\in A$表示，读作a属于A；如果a不是集合A的元素，则用$a\bar{\in}A$（或$a\notin A$）表示，读作a不属于A．

如果一个集合的元素是有限个，则称为**有限集**（或**有穷集**），否则，称为**无限集**（或**无穷集**）

例如，（1）由所有的自然数n（n=1，2，…）为元素构成的集合，记为N。N是无限集．

（2）全体实数集R，它是一切实数（所有的有理数和无理数）构成的集合．R是一个无限集．

（3）此时此刻在本教室里的学生构成一个集合；其中全体男学生，全体女学生又分别构成另外两个集合．这些集合都是有限集．

（4）某主管局下属的51个工厂（名称或编号）构成一个集合；而每个工厂的职工又分别构成51个集合．这些都是有限集．

（5）某百货商店出售的现有商品货物：牙膏、牙刷、毛巾…构成一个集合，是有限集．

（6）直线$y=2x$上的一切点（x，y）构成一个集合，是无限集．

构成集合的元素可以是各种各样的对象，因而集合这概念的应用就非常广泛．但是，构成一个集合仍然是有条件的，这就是“具有某种特性的，确定而又彼此不相同的”．比如，此时在教室里的“高个子学生”就不能构成一个集合，因为“高个子”这个标准不明确，身高多少才算“高个子”？我们无法断定在教室里的某学生是否是“高个子”．而“此时在教室里，高于1.7米的学生”就构成一个集合．同时，一个集合里的元素是彼此不相同的，即“元素的互异性”．

（二） 集合的表示方法

集合的表示法常有如下两种方法：

第一种方法是用指示该集合的元素的特征、性质来描述集合，此时，用记号{元素的符号 | 元素的特征或性质}或{元素的符号：元素的特征或性质}来表示．这种方法通常称为**描述法**。

例如，“非负实数集合F”，可记为$F=\{x|x\geqslant 0\}$或$\{x:x\geqslant 0\}$；

“大于1而不超过3的实数a的集合A”，可记为$A=\{a|1<a\leqslant 3\}$或$\{a:1<a\leqslant 3\}$；

“全体实数构成的集合R”，可记为$R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$。

第二种方法是用列举的方法来表示，即，若某一集合B是由元素x_1，x_2，x_3，…所构成，则可记为$B=\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$．这种方法称为**列举法**.

例如，“全体自然数集合N”，可记为$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$；“由数1，2，4，6构成的集合G”，记为$G=\{1, 2, 4, 6\}$.

显然，一个集合除具有上面指出的“元素的确定性”、“元素的互异性”外，还有“元素的无序性”，比如$\{1, 2, 4, 6\}$，也可表示为$\{2, 6, 1, 4\}$.

经济数学和其他数学一样，主要涉及的是“数集”或“点集”，在经济实际问题中，有时把所涉及的“对象”抽象化为数目字或点来加以考察，所以，数集和点集是我们考察的主要内容.

例1 集$A=\{x|x^2-1=0\}$是满足方程$x^2-1=0$的实数解所构成的集合．显然，$A=\{-1, 1\}$，它只有两个元素-1和1，是有限集.

例2 集$B=\{x|x^2+2x-3\geqslant 0\}$，由解不等式$x^2+2x-3\geqslant 0$知，$x\leqslant -3$或$x\geqslant 1$，因此，$B=\{x|x\leqslant -3或x\geqslant 1\}$，即B是由一切小于或等于$-3$的实数以及一切大于或等于1的实数构成的集合．显然，它的元素有无限多个，是一个无限集.

例3 各种区间的集合表示法：a，b为二实数，且$a<b$时，

开区间$(a, b)=\{x|a<x<b\}$；

闭开区$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

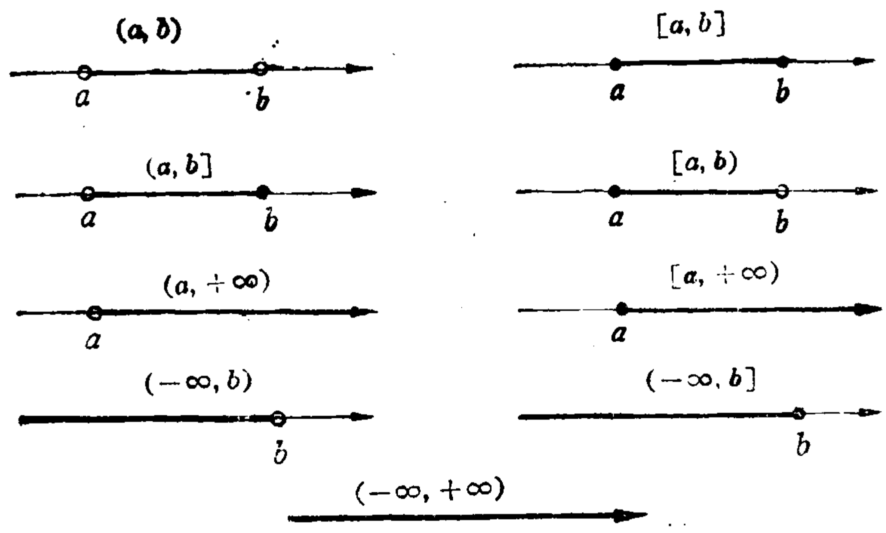


图1—1

左开右闭区间$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

五种无穷区间$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$；$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$；$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$；$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

在数轴上图示为图1—1.

例4 集合$S=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 1$，且$y\geqslant x^2\}$是xy平面上的点集，其元素——平面上的点$(x, y)$必须同时满足：$x^2+y^2\leqslant 1$和$y\geqslant x^2$. 显然，在平面直角坐标系下，它是图1—2中阴影部份内的所有点（包括边界线上的点）所构成的集合。

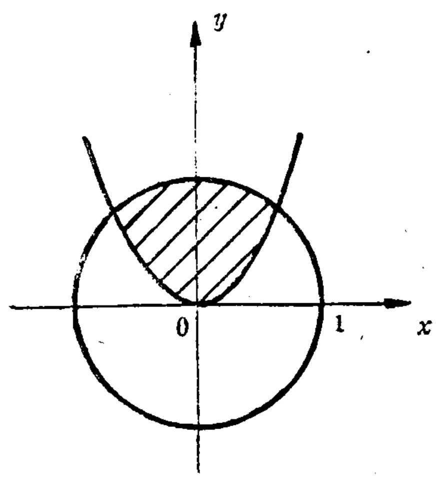


图1—2

练 习 一

1．判断下列各说法是否构成一个集合：

（1）我们班里的“矮个子”.

（2）某校在校学生中学习好的同学.

（3）某工厂生产的质量不好的产品.

（4）某工厂生产的质量不合格的产品.

2．举出：（1）一个有限集合例子；（2）一个无限集合的例子.

3．判断下列集合表示法是否正确：

（1）$\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}\}$.

（2）所有奇数集合为$\{x|x=2n+1, n\in N\}$.

（3）所有偶数集合为$\{x|x=2n, n\in N\}$.

（4）所有整数集合为$\{x|x=n, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

4．用描述法或列举法表示下列集合：

（1）不小于2的所有实数集合.

（2）大于3或小于－1的实数集合.

（3）大于5的所有偶数集合.

（4）不大于7的所有整数集合.

（5）圆$x^2+y^2=4$内部的一切点的集合.

（6）直线$2x+y=1$上一切点的集合.

5．用区间表示下列集合：

（1）$A=\{x|2<x\leqslant 3，x\in R\}$.

（2）$B=\{x|x\geqslant -1，x\in R\}$.

（3）$C=\{x|x<4，x\in R\}$.

6．在平面直角坐标系下，用平面图形区域表示出下列集合：

（1）$A=\{(x，y)|x-y+1\geqslant 0，x\in R，y\in R\}$.

（2）$B=\{(x，y)|2x-y<0，x\in R，y\in R\}$.

（3）$C=\{(x，y)|x^2+y^2\leqslant 25，x+y\geqslant 5，x\in R，y\in R\}$.

（4）$D=\{(x，y)|y\geqslant x^2，2x-y+3\geqslant 0，x\in R，y\in R\}$.

§1.2 集合的运算

（一） 集合运算定义

为了考察集合的运算，现引入如下的一些基本概念.

定义1 若集合A的每一个元素都属于集合B，即若$x\in A$就有$x\in B$，则称**集合B包含了集合A**，或**A包含在B内**，记为$A\subset B$或$B\supset A$，此时，我们也称A是B的一个**子集**.

例如，自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R之间就有

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

定义2 若两个集合A与B，满足：$A\subset B$，又$B\subset A$，则称A与B**相等**，记为$A=B$，否则，称为A与B不相等，记为$A\neq B$.

$A=B$，就是说A、B的元素完全相同.

例如，

$\{x|x^2-x-2=0\}=\{-1，2\}$；

$\{x|x^2+2x-3\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -3或x\geqslant 1\}$.

定义3 A、B为二集合，若$A\subset B$，且$A\neq B$，则称A为B的一个**真子集**.

为了方便，我们还引入一个特殊的集合概念——空集概念.

定义4 不包含任何元素的集合称为**空集**，记为ϕ.

例如，集合$\{x|x^2+1=0，x为实数\}$就是一个空集.

空集ϕ并不是集合$\{0\}$，也不是集合$\{\phi\}$，因为集合$\{0\}$含有一个元素0，集合$\{\phi\}$含有一个元素ϕ.

空集被看作是一个有限集，并且是任何其它非空集合的一个真子集，即

$$\phi\subset A，\phi\neq A，A为非空集合.$$

考察一个实际问题以及由此抽象出的数学问题，都是在某一确定的范围（即某一确定的集合）内进行，通常把这个确定的集合称为该问题中所要考察的集合的全集. 例如，实数集R是任何（实）数集的全集；全平面上所有点构成的集合是平面上一切点集的全集；又如，在一个问题中涉及到三个集合$A=\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$，$B=\{1，2，3\}$，

$C=\{5, 6, 7, 8\}$，则A是B、C的全集.

有了上面的定义之后，我们就可以考察集合的运算：并、交，差、补.

定义5 设A、B是两个集合，

（1）由A的一切元素和B的一切元素构成的集合，即集合$\{x|x\in A或x\in B\}$，称为**A、B的并集**，记为$A\cup B$；

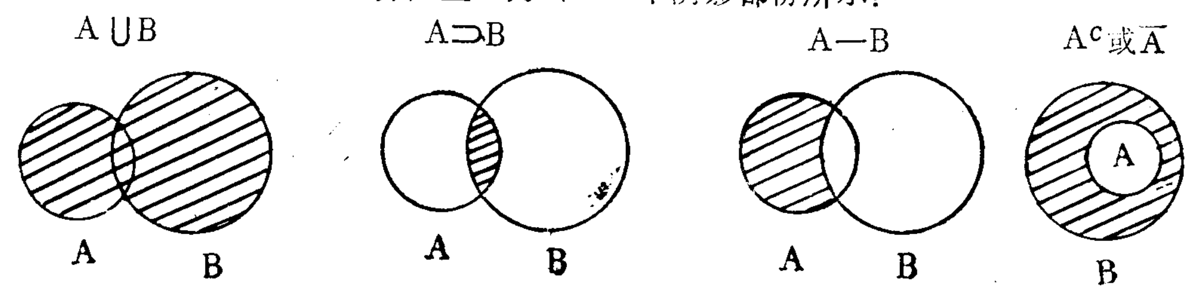
（2）由既属于A又属于B的那些元素构成的集合，即集合$\{x|x\in A又x\in B\}$，称为**A、B的交集**，记为$A\cap B$；

如果$A\cap B=\phi$，就称A、B不相交或互斥.

（3）集合$\{x|x\in A但x\overline{\in}B\}$，称为A、B的**差集**，记为$A-B$；

（4）若$A\subset B$，则集合$\{x|x\in B但x\overline{\in}A\}$，称为A关于全集B的**补集（或余集）**；记为$A_B^c$，简记为$A^c$或$\overline{A}$.直观地说，补集$A_B^c$是B中去掉A的元素以后，余下来的元素所构成的集合.

定义5所定义的集合的运算，直观为图1—3中阴影部份所示：



（1）　图1—3　（2）　（3）　（4）

并、交集概念可以推广到有限多个集合的情况.

设A_1，A_2，$\cdots A_n$是n个集合，集合$\{x|至少存在一个脚标i（1\leqslant i\leqslant n），使得x\in A_i\}$称为$A_1$，$A_2$，$\cdots A_n$的并集，记为$A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

集合$\{x|x\in A_i, i=1, 2, \cdots n\}$称为$A_1$，$A_2$，$\cdots A_n$的交集，记为$A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n$，简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

例1 设$A=\{x|x^2-16<0\}$，$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$，

求$A\cup B$，$A\cap B$.

解　因$A=\{x|x^2-16<0\}=\{x|-4<x<4\}$，

$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant 1或x\geqslant 3\}$

则

$$A\cup B=\{x|-4<x<4\}\cup\{x|x\leqslant 1或x\geqslant 3\}$$
$$=R\qquad（R为实数集）$$
$$A\cap B=\{x|-4<x<4\}\cap\{x|x\leqslant 1或x\geqslant 3\}$$
$$=\{x|-4<x\leqslant 1或3\leqslant x<4\}.$$

（二）　集合运算法则

集合有如下几个重要运算法则：

交换律　　$A\cup B=B\cup A$，

$A\cap B=B\cap A$；

结合律　　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

分配律　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

对偶律　　$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$，

$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

（此时，A、B都是某个集合I的子集，其补集都是关于I的）

这些法则都可以用集合论方法严格加以证明，这里仅只以一个为例：证明分配律中的公式 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

根据定义，要证明上式左、右两端的集合相等，只需证明上式左、右两端的集合互相包含．

现证：$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

设$x\in A\cup(B\cap C)$，由并集的定义知，$x\in A$或者$x\in(B\cap C)$，

当$x\in A$时$\Rightarrow x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$（并集的定义）

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$（交集的定义）；

当$x\in(B\cap C)\Rightarrow x\in B$且$x\in C$（交集的定义）

$\Rightarrow x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$（并集的定义）

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$（交集的定义）．

这就证明了，$A\cup(B\cap C)$中的元素必是$(A\cup B)\cap(A\cup C)$的元素，因此有$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

再证：$A\cup(B\cap C)\supset(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

设$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则由交集的定义知$x\in(A\cup B)$且$x\in(A\cup C)$，这时只有两种可能：

当$x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$；

当$x\notin A$时，由于$x\in(A\cup B)$且$x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in B$且$x\in C\Rightarrow x\in(B\cap C)$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$．

这就说明了，$(A\cup B)\cap(A\cup C)$中的元素必是$A\cup(B\cap C)$的元素，因此有$A\cup(B\cap C)\supset(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

综上两方面的证明便得$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

分配律和对偶律还可以推广到有限多个的情形，即有

$$A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i)；$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)；$$

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}；$$

$$\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

其中A_i（$i=1, 2, \cdots, n$）都是某全集I的子集，补集也都是关于I的.

例2 设全集为$I=\{1, 2, \cdots, 10\}$，又设$A_1=\{2, 3\}$，$A_2=\{2, 4, 6\}$，$A_3=\{3, 4, 6\}$，$A_4=\{7, 8\}$，$A_5=\{1, 8, 10\}$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)} = I-\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = I-\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}=\{5, 9\}.$$

练 习 二

1．写出集合$\{a, b, c\}$的所有 子集.

2．下列集合哪些是空集：

（1）$A=\{x|x^2-x-2=0\}$.　　（2）$B=\{x|x^2-2x+3=0,\ x\in R\}$.

（3）$C=\{x|x^2-1\leqslant 0且x^2-2x-8\geqslant 0\}$.　　（4）$D=\{x|x^2=0\}$.

（5）$E=\{\phi\}$.　　（6）$F=\{x|\sin x=2\}$.

3．如果$A=\{0, 1, 2\}$，$B=\{1, 2\}$，下列各种写法哪些是正确的，哪些是错误．并从中总结出元素与集合，集合与集合之间的关系的正确表示方法：

$1\in A$，$0\overline{\in}B$，$1\subset B$，$\{1\}\in B$，$\{1\}\subset B$，$2\in B$，$2\subset A$，$2\in A$，$\{2\}\subset A$，$\{0\}\subset B$，$A=B$，$A\subset B$，$A\supset B$，$\phi\subset B$，$A\subset A$，$B\subset B$.

4．设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，$C=\{2, 4, 6\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$，$A\cup B\cup C$，$A\cap B\cap C$，$A-B$.

5．如果$A=\{x|x^2-8x+15<0,\ x\in R\}$，$B=\{x|x-4>0,\ x\in R\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$.

6．如果$A\neq\phi$，$A\subset B$，下列各个 式子哪些对，哪些不对？并改正之.

$A\cup A=A$，$A\cap A=A$，$A\cap A=\phi$，　$A\cap\phi=A$，$A\cup\phi=\phi$，$A\cup B=A$，$A\cap B=A$，$A-A=A$，$A-B=A$，　$B-A=\phi$.

7．如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，全集$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，求$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$，$\overline{A\cap B}$.

§ 1.3 映射

（一） 映射的定义

先考察几个实际例子.

例1 设X是平面上所有三角形构成的集合$X=\{三角形\}$，$R=\{实数\}$，若对X中的任何一个元素（三角形）“求面积”，在R中必有唯一的一个元素（实数）和它对应．可知，集合X与R之间存在着“求面积”的对应法则，若记为f，则f就使每个$x\in X$在集合R中有唯一确定的元素s与之对应，通常我们把这件事简记为

$f: X \to R,$

$x \mapsto S$（三角形的面积）.

例2 设$X=\{三角形\}$，$Y=\{圆\}$，由于每个三角形都有唯一确定的一个内切圆，所以X与Y之间存在这样一个对应法则φ：任何一个三角形x都有它的唯一确定的一个内切圆y，可记为

$$\varphi: X \to Y,$$
$$x \mapsto y\ （三角形x的内切圆）.$$

例3 在R到R上，规定一个对应法则g：对每一个实数$x \in R$就得到它的立方$x^3 \in R$.

$$g: R \to R,$$
$$x \mapsto y = x^3.$$

例4 某工厂生产的产品集合X与这些产品型号的编码集合Y之间也存在着这样一个对应法则ψ：每一个产品$x \in X$就有一个型号编码$y \in Y$之对应。

实际中还大量存在这样的现象．对于这些现象，数学上一般地就给出以下定义．

定义1 设X、Y是任意两个集合，如果对X内的每一个元素x，按一法则（或规律）f，集合Y中有唯一的一个元素y被指定和它对应，则称f是由X到Y的一个**映射**（或**变换**），并称y为x在映射f作用下的**象**（或f在x处的**值**），记为$y=f(x)$，而称x是y的一个**逆象**（或原象），通常记为：

$$f: X \to Y,$$
$$x \mapsto y = f(x).$$

又，集合X称为映射f的**定义域**，记为D_f．由象$f(x)$所构成的集合称为f的**值域**，记为R_f．，即$R_f=\{y \mid y=f(x),\ x \in X\}$.

上面的例1、2、3、4中的f，φ，g，ψ都是一个映射，例2、4还表明映射不一定都是一种“数量对应法则”，因而映射可以是多种形式的。

例5 设某百货店的一种牙膏销售量集合为X，销售牙膏的总收入集合为Y，则由X到Y之间有如下的一个映射

$$f: X \to Y,$$
$$x \mapsto y = ax.$$

其中a表牙膏每合的价格。

由定义1直接可知：

1．值域R_f不一定等于Y，而是$R_f \subset Y$；

2．对X中每一个元素x（逆象或原象），通过f的作用，Y中只有一个象y与之对应，但反过来，一个象y在X中的逆象可能不只一个（如例1，2，4）．

此外，两个映射f_1，f_2，如果它们的定义域相同，且对定义域中的任何元素x，均有$f_1(x)=f_2(x)$，则称这两个映射**相等**，并记为$f_1=f_2$.

例6 设$X=(0,1)$，$Y=R_+=(0,+\infty)$，法则H规定$x \in X$与它的象$y \in Y$满足$y^2=x$，因此

$$H: X \to R_+$$
$$x \mapsto y = \sqrt{x}.$$

这是一个映射，如果改设$Y=R=(-\infty,+\infty)$，其他不变，此时法则H就不是由X到R的一个映射，因为，对一个$x \in X=(0,1)$，有两个$y=\pm\sqrt{x}$与之对应，破坏了“象”的

唯一性．

定义2　设映射f：X→Y．

1．如果f的值域$R_f=Y$，就说f是**X到Y上的映射**．此时Y中任何元素在X中必有逆象（可能不只一个）．如例1，2，4．

2．如果是R_fY的一个真子集，就说f是**X到Y内的一个映射**．此时，Y中存在有这样的元素，它在X中没有逆象，如例6．

3．如果对X中的任何两个不同的元素x_1，x_2，它们的象y_1，y_2也不同，则称此映射为**一一映射**．如例3，5，6．

又，若$R_f=Y$，则还可称f是**X到Y上的一一映射**，如例3，5．

而若R_f是Y的一个真子集，则还可称f是**X到Y内的一一映射**，如例6．

下面介绍两个常见的特殊映射．

（二）　复合映射

设有两个映射

$$f: A\to B \qquad\qquad g: B\to C$$
$$a\mapsto b=f(a) \qquad\qquad b\mapsto c=g(b)$$

由第一个映射f，集合A中的任一元素a，在B中有一个象b=f(a)，再由第二个映射g，对这个b，在C中又有象c=g(b)，这样A、B、C三个集合中的元素之间有

$$a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c.$$

即，对A中任何元素a（经过中间元素b）总可以得到C中的一个元素c与之对应．这就是说，在A和C之间存在一个（新的）映射φ，它先把A中的元素a变成B中的元素b（b=f(a)），再把B中的元素b变成C中的元素c（c=g(b)=g［f(a)］），即

$$a\xrightarrow{f}b=f(a)\xrightarrow{g}c=g(b)=g(f(a))$$

也就是　$a\xrightarrow{\varphi}c.$

我们把这个新映射记为g·f，并称为是f和g的**复合映射**．

$\varphi=g\cdot f$：A→C

$$a\mapsto c=g(f(a)).$$

例7　设A={三角形}，B={圆}，C=R

又设f：A→B

a↦b（a的内切圆），

g：B→C

b↦c（b的面积），

则有复合映射

g·f：A→C

a↦c（a的内切圆的面积）．

例8　设X、U、Y均为实数集，又设

f：X→U

$$x \mapsto u = \sqrt{1+x^2},$$

$$g: U \to Y$$

$$u \mapsto y = \sin u,$$

则有复合映射

$$g \cdot f: X \to Y$$

$$x \mapsto y = \sin\sqrt{1+x^2}.$$

复合映射还可以推广到“多重”复合情况，如

例 9 设X、U、V、Y都是实数集，又设映射

$$f_1: X \to U$$

$$x \mapsto u = e^x,$$

$$f_2: U \to V$$

$$u \mapsto v = \sqrt{1+u},$$

$$f_3: V \to Y$$

$$v \mapsto y = \cot v,$$

则有复合映射

$$f_3 \cdot f_2 \cdot f_1: X \to Y$$

$$x \mapsto y = \cos\sqrt{1+e^x}.$$

（三） 逆映射

先考察一个例子.

设某学校的全体在校学生构成一个集合A，他们的学习成绩登记卡的号码组成另一个集合B，通过登记他们的成绩就得到映射

$$f: A \to B$$

$$a \mapsto b\text{（a的成绩登记卡号码）}$$

显然f是A到B上的一个一一映射. 反过来，如果我们通过登记卡查成绩，就得到一个由B到A上的映射，记为f^{-1}，即

$$f^{-1}: B \to A$$

$$\text{登记卡号码}\,b \mapsto a\text{（一个学生）}.$$

这个映射f^{-1}是f倒转过来的映射，通常称它为f的逆映射. 显然f也是f^{-1}的逆映射，这实际上是说，f和f^{-1}是互为逆映射.

一般地，有如下定义.

设映射f是X到Y内（或上）的一一映射，它的定义域为$D_f = X$，值域R_f，由于f是一一映射，则对R_f内的任何元素y，在X内有唯一的一个逆象x与之对应，这样就得到一个R_f（象集合）到X（逆象集合）上的映射，这个映射就称为f的**逆映射**，记为f^{-1}，（图 1—4）.

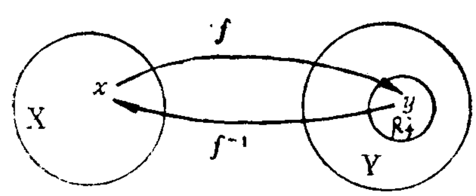


图 1—4