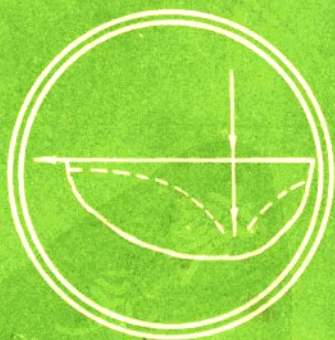


# 弹性力学 例题及习题指导

林家骥 主编



西北工业大学出版社

# 弹性力学例题及习题指导

林家骥 主编

西北工业大学出版社

1990年12月 西安

## 内 容 简 介

全书共十章,包括平面问题、空间问题、变分法、差分法、有限单元法、板壳问题、接触问题和热应力。本书与全国通用教材(徐芝纶编《弹性力学简明教程》和杨绪灿、金建三编《弹性力学》)配合使用,主要面向土建、水利、机械、采矿等专业的大学生。全书以示范性例题、提要例题、提示例题三种形式共编写了113道。可作为培养学生分析与解决问题能力的一本教学参考书,也可供教师和工程技术人员参考。

## 弹性力学例题及习题指导

主 编 林家骥  
责任编辑 王夏林  
责任校对 杨长照

西北工业大学出版社出版发行  
(西安市友谊西路127号)  
陕西省新华书店经销  
西安冶金建筑学院印刷厂印装  
ISBN 7-5612-0327-6/O·36

开本850×1168毫米 1/32 5.75印张 140千字  
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷  
印数:1—5000册 定价:2.50元

# 前 言

在多年来讲授弹性力学课程中，编者深感这门课程给初学者带来的困难：其一是弹性力学概念比其他先修力学课程更为抽象、难懂；其二是教学中所涉及的数学内容远较其他力学课程为多，有些内容甚至超过了本科生的数学教学大纲，这就增加了学习上的难度；其三是学生在掌握了本课程的基本理论之后，仍会对灵活多变的习题感到无从下手。而国内目前已出版的一些“题解”，容易使学生养成“依赖”甚至“抄袭”的不良习惯。基于上述原因，编者认为有必要编写一本篇幅不大，而又具有启发、培养学生和初学者分析与解决问题能力的参考书。

本书以示范例题和习题指导为宗旨，针对目前高等工业学校土建、水利以及机械、采矿等专业弹性力学教学大纲的基本要求，分为十章编写，学生可根据所学专业要求选学部分章节。每章首先以理论提要形式，扼要介绍有关概念、理论及公式；其次，对一些具有典型意义的问题以示范例题形式作出详解，以帮助学生掌握弹性力学解题的思路、步骤和方法；再次，对于一般性问题或以“提要”形式给出思路、并指出可能遇到的难点，或以“提示”形式加以启发、引导并给出答案。本书主要面向工科学生或初学者，不想使内容过于繁杂，所用的公式符号亦与现行通用教材保持一致。

本书由林家骥主编，具体分工如下：林家骥编第一、二、三、四、五、六、七章；陈科进编第八、九章；王社编第十章。陈科进、王社还协助整理和校对了全书原稿及校样。

本书承西安交通大学蒋咏秋教授主审；惠兴中副教授、王悟生副教授也详细审阅了本书的初稿，他们提出了许多宝贵的意见和建议。在此，谨向诸位支持本书编写、出版工作的同志表示衷

心的感谢。

由于水平所限，不妥或错误之处在所难免，恳切希望广大师生和读者批评指正。

编 者

1990年5月于西安冶金建筑学院

## 符 号 表

$x, y, z$	直角坐标
$r, \theta, z$	圆柱坐标
$u, v, w$	直角坐标位移分量
$u_r, u_\theta, w$	圆柱坐标位移分量
$\left. \begin{array}{l} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \\ \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \end{array} \right\}$	直角坐标应力分量
$X, Y, Z$	直角坐标体力分量
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	直角坐标面力分量
$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \end{array} \right\}$	直角坐标应变分量
$\left. \begin{array}{l} \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z \\ \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr} \end{array} \right\}$	圆柱坐标应力分量
$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr} \end{array} \right\}$	圆柱坐标应变分量
$l, m, n$	外法线方向余弦
$E, G, \mu$	材料的弹性模量、泊松系数
$\rho$	材料的密度
$\gamma$	材料的容重
$\varphi$	应力函数
$P$	集中荷载
$q$	分布荷载
$D$	薄板的抗弯刚度

$I$	梁的截面惯性矩
$\nabla^2, \nabla^4$	拉普拉斯算子
$M_x, M_y, M_{xy}$	} 矩形薄板的内力分量
$Q_x, Q_y$	
$V_x, V_y$	
$R$	薄板的角顶反力
$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$	} 圆板的内力分量
$Q_r, Q_\theta$	
$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$	薄壳的薄膜内力
$T$	温度
$\alpha$	热膨胀系数
$k$	导热系数
$c$	比热
$a$	导温系数
$\lambda$	热传导系数
$U$	形变势能

## 目 录

第一章	平面问题的基本理论	1
第二章	平面问题的直角坐标解答	11
第三章	平面问题的极坐标解答	34
第四章	用差分法和变分法解平面问题	63
第五章	用有限单元法解平面问题	79
第六章	空间问题基本理论及解答	89
第七章	薄板弯曲问题	115
第八章	薄壳问题	143
第九章	接触问题	154
第十章	热应力	162



# 第一章 平面问题的基本理论

## 理论提要

### 1. 平面应力问题与平面应变问题

平面应力问题适用于分析很薄的等厚度薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时体力也平行于板面并且不沿厚度变化。

取坐标轴如图1-1所示，其特点是整个薄板的所有点都有

$$\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0.$$

仅有三个应力分量

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \sigma_y = \sigma_y(x, y), \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

平面应变问题适用于很长的等截面柱体，其上作用的面力、体力均平行于横截面而且沿柱长方向不变化（如挡土墙、水坝等）。

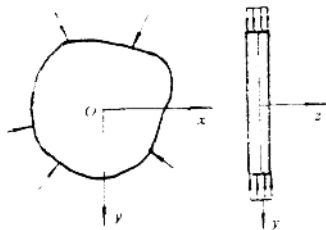


图 1-1

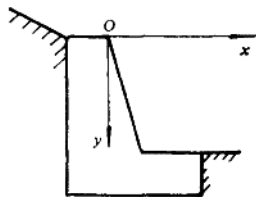


图 1-2

在图1-2所示坐标系下，所有各点都只会沿 $x$ 和 $y$ 方向移动，而不会有 $z$ 方向的位移，即 $w = 0$ ， $u = u(x, y)$ ， $v = v(x, y)$ ，并有 $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ， $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ， $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ ， $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ ，

而  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$  不为零。

## 2. 平面问题的基本方程

平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1-2)$$

形变协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1-3)$$

平面应力问题的物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

及 
$$\sigma_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1-5)$$

在平面应变问题中  $w = 0$ ，必有  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ，故物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

及  $\sigma_x = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$  (1-7)

应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s &= \bar{X}, \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

### 3. 相容方程 应力函数

在常体力下，两类平面问题可归结为应力函数表示的相容方程

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (1-9)$$

应力公式为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (1-10)$$

当体力不计时，有

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (1-11)$$

## 例 题 分 析

【例1-1】 试证明，在图1-3中， $y$ 方向的位移 $v$ 所引起的线段 $PA$ 的伸缩是高阶微量。

【分析】

小变形的线性几何方程(1-2)是在略去二阶以上微量情况

下导出的。本例则属于更精确的几何方程分析，即考虑了二阶以上微量影响的非线性项。

证法（一）

如图 1-3 所示，沿  $x$  方向微段  $PA$  变形后移动到  $P'A'$ ，线段  $PA$  的正应变应为

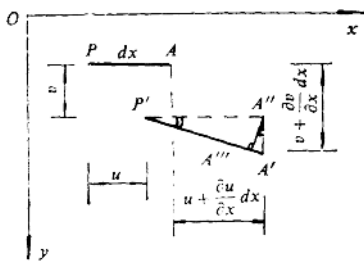


图 1-3

$$\epsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} \quad (a)$$

在图 1-3 中， $\angle A'P'A'' = \frac{\partial v}{\partial x}$ ，由  $A''$  作  $P'A'$  的垂线  $A''A'''$ ，

$$\text{则 } P'A' = P'A'' \cos\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + A'A''' \sin\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\text{即 } P'A' = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) \cos\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} dx \sin\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (b)$$

若略去二阶以上微量，可取

$$\cos\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad \sin\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (c)$$

将式 (c) 代入式 (b) 并略去三阶微量后，可得

$$P'A' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$\text{故 } \epsilon_x = \frac{\left[dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx\right] - dx}{dx}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (d)$$

证法 (二)

若在图1-3中作

$$\begin{aligned} P' A' &= \sqrt{(P' A'')^2 + (A' A'')^2} \\ &= \sqrt{\left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2} \\ &= dx \left[ 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

展开上式并略去三阶以上微量，得

$$P' A' = dx \left[ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right],$$

于是

$$\epsilon_x = \frac{P' A' - PA}{PA} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (e)$$

式(d)、(e)均为几何非线性方程，但式(e)更精确些。

**【例1-2】** 试证明，当微分六面体的各面上所受的应力不是均匀分布的，其平衡微分方程的形式不变。

**【证明】**

如图1-4所示微分六面体 $ABCD$ ，在平面问题中 $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ， $\tau_{xy}$ 均为 $x$ ， $y$ 的函数。以 $\sigma_x$ 为例，如 $A$ 点的正应力为 $\sigma_x$ ，则 $B$ ， $C$ ， $D$ 各点的正应力将如图标注的增量形式。试观察 $C$ 点对 $A$ ， $D$ 点对 $B$ 的正应力增量均为 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ ，可见 $CD$ 面上任一点对 $AB$ 面上

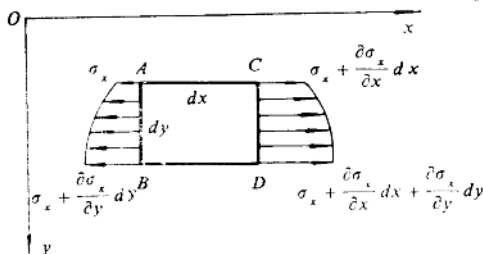


图 1-4

相应点的正应力增量均为  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 。于是假设应力沿微分面上非均匀分布与假设应力沿微分面均匀分布所得到的应力增量形式是相同的。同样，可以分析  $BD$  面对  $AC$  面的剪应力增量为  $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ 。

在计入体力分量  $X$  后，不难由平衡方程  $\Sigma X = 0$  得到

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0.$$

同理，可以在应力非均匀分布下导出相同的另一平衡微分方程。

**【例1-3】** 一水坝刚性固结在基础上，坝高为  $h$ ，坝基宽为  $b$ ，如图1-5(a)所示，试写出齐顶水压作用时的水坝边界条件（设水的容重为  $\gamma$ ，坝自重不计）。

**【提要】**

利用应力边界条件式(1-8)有

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s &= \bar{X}, \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

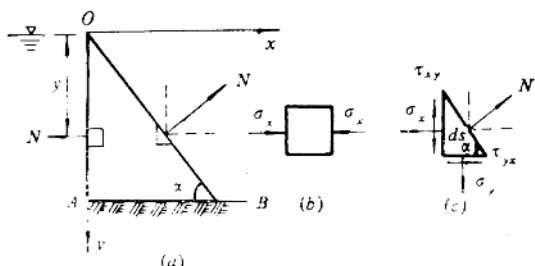


图 1-5

如考虑垂直面 $OA$ ,可在该面上 $y$ 处取一微分体(图1-5(b)),在图示坐标系下,引入

$$\left. \begin{aligned} l = \cos(N, x) = -1, \quad m = \cos(N, y) = 0 \\ \bar{X} = \gamma y, \quad \bar{Y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在不计坝自重情况下,  $\sigma_y = 0$ , 将式(b)代入式(a)得

$$\sigma_x = -\gamma y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (c)$$

同理分析斜面 $OB$ 上微分三棱体(图1-5(c)), 可引入 $\bar{X} = 0$ ,  $\bar{Y} = 0$  及  $l = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ,  $m = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , 并代入式(a)中得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} &= \operatorname{tg} \alpha \sigma_x, \\ \tau_{xy} &= \operatorname{ctg} \alpha \sigma_y, \\ \sigma_x &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_y. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

由式(d)之一、二式显见有 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ .

**【例1-4】** 如图1-6所示是完全置于水中的梯形截面的墙体, 试写出 $AA'$ ,  $AB$ ,  $BB'$ 上应力边界条件(水的比重为 $\gamma$ )。

**【提示】**

从 $AA'$ 及 $AB$ 上的应力边界条件容易看出 $\sigma_x = -\gamma y$ ,  $\tau_{xy} = 0$  及  $\tau_{yx} = 0$ ,  $\sigma_y = -\gamma h$ , 而在 $BB'$ 上, 应力分量应满足下面关系

式

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = -\gamma y \sin\alpha,$$

$$l\tau_{xy} + m\sigma_y = \gamma y \cos\alpha,$$

式中  $l = \cos\alpha$ ,  $m = -\sin\alpha$ .

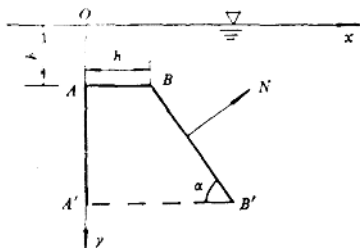


图 1-6

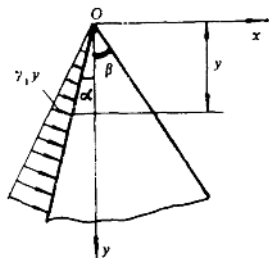


图 1-7

【例1-5】 如图1-7所示单位厚度的楔体，材料比重为 $\gamma$ ，该楔体左侧作用有比重为 $\gamma_1$ 的液体，试写出其边界条件。

【提示】

在  $x = -y \operatorname{tg}\alpha$  处，有

$$-\sigma_x \cos\alpha - \tau_{xy} \sin\alpha = \gamma_1 y \cos\alpha,$$

$$-\tau_{xy} \cos\alpha - \sigma_y \sin\alpha = \gamma_1 y \sin\alpha.$$

在  $x = y \operatorname{tg}\beta$  处，有

$$\sigma_x \cos\beta - \tau_{xy} \sin\beta = 0,$$

$$\tau_{xy} \cos\beta - \sigma_y \sin\beta = 0.$$

【例1-6】 如图1-8所示三角形形截面坝体，其材料比重为 $\gamma$ ，在右侧承受比重为 $\gamma_1$ 的液体的压力，设其应力分量为

$$\sigma_x = ax + by,$$

$$\sigma_y = cx + dy - \gamma y,$$

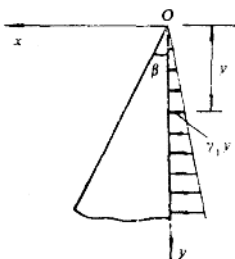


图 1-8



$$\tau_{xy} = dx - ay,$$

试根据边界条件确定系数  $a$ ,  $b$ ,  $c$  及  $d$ 。

【提示】

坝体的两个边界面 ( $x = 0$  面及  $x = y \operatorname{tg} \beta$  面) 上共有四个边界条件, 可确定出:  $a = 0$ ,  $b = -\gamma_1$ ,  $c = \gamma \operatorname{ctg} \beta - 2\gamma_1 \operatorname{ctg}^3 \beta$ ,

$$d = \frac{\gamma_1}{\operatorname{tg}^2 \beta}.$$

【例1-7】 已知薄板有下列应变分量

$$\varepsilon_x = Axy, \quad \varepsilon_y = By^2, \quad \gamma_{xy} = C - Dy^2,$$

式中  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  皆为常数。试检查在形变过程中是否符合连续条件, 若满足试列出应力表达式。

【提示】

将题设应变分量代入形变协调方程  $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$  中检验后, 若满足则利用物理方程求得应力分量

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (Axy + \mu By^2),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (By^2 + \mu Axy),$$

$$\tau_{xy} = G(C - Dy^2).$$

【例1-8】 设有矩形截面悬臂梁, 在自由端受有集中力  $P$ , 如图 1-9 所示, 体力可以不计。试根据材料力学公式, 写出弯曲应力  $\sigma_x$  和剪应力  $\tau_{xy}$  的表达式, 并取挤压应力  $\sigma_y = 0$ , 然后证明, 这些表达式满足平衡微分方程和

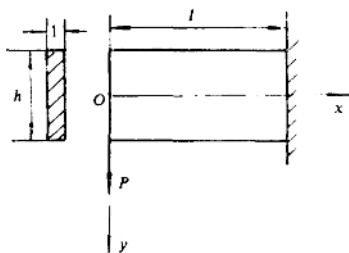


图 1-9