随机信号与系统

〔美〕R. E. 莫廷森
毛自灿　何有福　译
陈天麒　校

电子科技大学出版社

随机信号与系统

〔美〕R. E. 莫廷森
毛自灿　何有福　译
陈天麒　校

电子科技大学出版社

·1990·

内 容 提 要

本书根据美国R．E．莫廷森所著翻译而成，专门研究随机信号与系统，内容包括：对概率和随机过程的一般性讨论，一维、二维和多维高斯分布，有限随机序列和平稳随机序列，连续时间平稳高斯过程和二阶过程，非平稳随机过程和随机序列，含有无记忆非线性器件的线性系统，离散时间卡尔曼滤波。书中还讨论了希尔伯特空间和卡亨南-洛维展开等论题。

本书可作为通信与电子系统学科本科生和研究生的教材，也可供这一学科及相关学科的教学、科研和工程技术人员参考。

Random Signals and Systems

R. E. Mortensen

随机信号与系统

〔美〕R．E．莫廷森

毛自灿　何有福　译

陈天麒　校

电子科技大学出版社出版

（中国成都建设北路二段四号）

四川绵竹印刷厂印刷

四川省新华书店经销

开本　787×1092　1/32　印张　8.5625　字数　182 千字

版次　1990年10月第一版　印次　1990年10月第一次印刷

印数　1—2200 册

中国标准书号　ISBN　7-81016-244-6/TN·70

（15452·110）　　　　定价：3.10 元

译者序

自然界和人类社会中信息的传输与交换，都是通过信号这一物理实体来完成的。信号是信息的载荷者、传递者。从本质上讲，真实的信号几乎都是随机的。在信号产生和传输的过程中，又必然要受到噪声和各种干扰因素的污染，从而增加了它的随机性。因此，利用概率论和统计学方法对随机信号和具有随机输入的系统进行分析，在理论上和实践上具有重要的意义。

本书是根据美国洛山矶加利福尼亚大学R. E. 莫廷森所著《Random Signals and Systems》翻译而成的。原书致力于随机信号和系统的讨论，其特点是，除对通常都有的连续时间随机信号（即随机过程）进行讨论外，还考虑到现代科学技术的发展趋势和电子计算机的广泛应用，对离散时间随机过程（即随机序列）也作了详细的研究；除了讨论平稳随机过程和随机序列外，还详细研究了非平稳随机过程和随机序列。在系统方面，除了讨论具有随机输入的线性系统外，也讨论了含有无记忆非线性器件的系统。作者还精心安排了希尔伯特空间和卡亨南-洛维展开等论题的讨论。作为理论的应用，作者最后专辟一章讨论了离散时间卡尔曼滤波。原书以课题汇编的形式编排，使用灵活方便；文体不拘一格，叙述简明扼要；注意理论联系实际，用较多的实例阐明理论的具体应用。

本书是一本研究生教材，但经过适当取舍，也可以作为

本科高年级学生的教材使用。本书还可作为有关专业的教学、科研和工程技术人员的参考书。

本书前言，1～7章和两个附录由毛自灿翻译，8～11章由何有福翻译。全书由陈天麒教授统一校阅。

由于我们水平有限，加之时间仓促，如有错误和不当之处，恳请读者批评指正。

译　　者

1989年12月

前 言

编写本书的目的，是想把它作为大学高年级随机过程导论性课程的教科书，或者作为一年级研究生继续学习课程的教科书。作为高年级课程，所需的预备知识是主修电气工程的高年级学生通常要学的数学课程，即矩阵代数，微分方程，拉普拉斯和傅里叶变换，再加上半学期的概率论课程。作为研究生课程，虽不要求增加特殊的预备知识，但是希望研究生具有一种重要的，无形的，有时称为“数学成熟性”的技能。在洛山矶加利福尼亚大学(UCLA)，采用本书作教科书，是控制系统工程和通信系统工程研究生课程的先修课。本书试图为学习工作在不确定性环境下的模拟通信系统和线性控制系统的设计提供所需的基本知识，也为增进对标准数字信号处理技术的理解提供所需的基本知识。

在洛山矶加利福尼亚大学电气工程系，随机过程方面的课程过去30年来是采用达文波特和鲁特[14]或帕博里斯[24]的著作。在这期间，存在两种历史的发展趋向，对现在讲授的随机过程课程的内容产生了相反的影响。第一，人们在电气和电子工程师协会学报（IEEE Transactions）和许多其它杂志与本课题有关的论文中，碰到的数学问题的复杂程度大大增加；第二，微处理器和相应软件的迅速发展和急剧地增加。

第一种发展趋势的结果是，那些希望进行尖端研究和在学位论文中作出理论贡献的电气工程博士生，必须熟悉测度

论和泛函分析。第二种发展趋势的结果是，最新的供大学生学习数字滤波器设计的教科书，对读者的微积分知识仅仅作了最低限度的假定，但却假定他们对离散数学相当熟悉。因此，在拟用本书作教科书的课程中，我们面临一种困境，即接受一个其大学预备知识强烈反映第二种趋势的学生，而又要使这个学生对面向第一种趋势的全部研究生课程有一个专业的准备。

为了说明这一看法，可以指出，反映第一种趋势的最新教科书是沃恩和哈杰克[29]的优秀著作，同一时期反映第二种趋势的教科书是威廉姆斯[28]值得欣赏的著作。

我相信，在随机过程领域打算以博士水平作出重要成绩的学生，必须在数学系修一门实分析方面的课程，随后再学用巴拉克里斯南[3]的著作作教科书的泛函分析课程。因此，本书不打算引导学生进入测度论，而尽力使他们沿着适当的路线思考，如利用集合论引入概率，用概率集合函数作为"概率测度"，并在各处加上必要的提示。同样理由，除此以外，本书均未提及伊藤（Ito）随机微积分及有关论题。另一方面，本书公然大胆讨论了希尔伯特空间而没有引起麻烦。虽然这样取材可能表现了强烈的癖性，但这是根据自己的实践经验所作的选择。我相信，在用本书作教科书的课程中，引入卡亨南-洛维展开是需要的，因为它是象威特比（Viterbi）解码算法这样成功的实际贡献的理论基础的一部分。当讨论卡亨南-洛维展开时，希尔伯特空间理论的某些信息是非常有用的。这些信息还有助于对卡尔曼滤波理论中新值过程的意义提供一种解释。

为了适应熟悉计算机的大学生们，第二章复习一维和二

维高斯分布，并探讨它的一些性质。这顺便为我们提供一个机会，以检查学生的矩阵运算和计算多重积分的能力。适合于学生的水平，第四章讨论有限长度随机序列，并在附录2中提供了一个计算机程序，它可以产生学生们想研究的各种序列。

作为大学本科生课程，其基本核心是第二章、第四章、第五章和第六章中的材料。取决于可用的学时数和学生的承受能力，也可以引入第三章，第九章和第十章的材料。作为研究生课程，在复习上述所有材料后，着手讨论第一章二阶随机变量的希尔伯特空间和第八章平方可积函数的希尔伯特空间，然后进行卡亨南-洛维展开的讨论。仍然取决于时间和机会，还可以讲授多维条件高斯密度的性质和引入第三章的估计理论，第七章和第十章的动态系统状态空间理论，并在第十一章中引入卡尔曼滤波理论。

本书蓄意写成课题汇集的形式，以便具有最大的灵活性。文体是不拘形式的和讨论式的，以吸引大多数学生的注意力。仅在少数地方进行了定理的证明，在这些地方，总结发展和提供结果的简洁陈述看来是特别需要的。

（以下为致谢辞，从略。）

R. E. 莫廷森

1986年11月于加利福尼亚洛山矶

目　　录

第一章　概率和随机过程的一般性讨论

1.1　引　　言

本书的目的是介绍随机过程理论的某些特殊论题，这种理论已在控制和通信工程中获得应用。写作本书时，假定读者已学过概率论的导论性课程。尽管如此，由于各种原因，从复习概率论开始看来仍是适当的和有用的。

本章复习概率论的主要概念。该理论对于理解本书的材料是必需的。除此以外，还将引入一两个对于读者来讲可能是新的概念，例如二阶随机变量的希尔伯特空间，以便于后面使用。最后，在定义某些术语并建立某些概念之后，将说明希望读者在研究本书的材料后获得些什么，并对将要进行的工作作一个简短的评述。

为此，我们将对术语“随机过程”下一个暂时的定义，并简短讨论几种随机过程，这些过程在本书后面还会遇到。在本章末，还包含一个简短的说明，用以解释为什么要以这种方式写这本书。

1.2　概　　率

普遍认为，研究概率论的一种好方法是以集合论为基础。我们将以这种观点来探讨这个课题。在非常严格的讨论中，将术语“集合”看成一种不确定的概念，它具有最初的

公理中所假定的某些性质，而整个研究就建立在这些公理之上。直观地讲，一个集合就是一些事物的总和。在概率论中，这些“事物”就是基本事件。在集合论中，我们打算处理的所有事物的集合称为泛集，而在概率论中，将泛集称为样本空间。

假定我们做一个实验，在这个实验中，已知随机性因素将发生作用。例如，选择一类人并向他们提问进行调查，或者在已知实验误差不可忽略的情况下，重复地对某物理变量进行测量。有时将这样的实验称为随机实验。实验的结构不是随机的，随机性是指实验的结果事先不能精确地预测。

在最原始的意义上讲，实验的统计性质仅仅是指数据本身。在更精细的意义上讲，统计性质亦指数据在经过某些数值处理以后所得到的某些性质。概率论就用来分析这样的随机实验。利用它可以判断对数据进行何种数值处理才是适当的，以及对于统计性质的可信性可以作出何种说明。甚至更为基本的是，可以利用概率论确定，应当如何安排实验以使我们能对统计性质的可信性作出有意义的陈述。

在利用概率论进行这样一种分析时，会产生样本空间太大或者太小的问题。因此，通常应使样本空间的选择适合于问题中的实验。例如，假定实验是投掷硬币 10 次，并记录每次投掷的结果，也就是说记录它出现正面，还是出现反面。一个有两个点（正面和反面）的样本空间太小，实际上没有什么用。一个具有无限多个点的样本空间当然足够大，但问题是它是如此庞大，以致它可能将我们引入一种数学的困境中去。如果有回避这种困境的办法，我们宁愿回避它。

对于上述实验，证明是“正好合适”的样本空间，就是

长度为 10 的所有二元序列的集合。这种二元序列有 $2^{10}=1024$ 个，因此这个样本空间包含 1024 个点。每个点是一个“基本事件”，即 10 次投币产生的一个完整序列。单独一次投币不是一个基本事件。

在用这种方法进行数学概率论的分析时，对于每个基本事件（即长度为 10 的每个序列），首先要指定一个数值概率。对每个事件所指定的概率值必须是在 0 和 1 之间的一个实数，并且这个样本空间中所有1024个点的概率值之和必须精确地等于1。

至此，我们可以来考察样本空间的各种子集，例如在第一次投币时出现正面的所有序列组成的子集。按定义，在这一子集中，所有的点的概率值之和就是第一次投币时出现正面的概率。如果这个数值与你直观感觉到的这种情况下应当出现的值一致，那么便可以说你的投币模型是逼真的。另一方面，如果这个数值不是你设想的第一次投币出现正面的事件应当具有的值，那么你必须修改指定给基本事件的概率值，直到事件呈现出你所需要的那种情形为止。

概率论将向你表明，如何利用你的关于各种事件概率的数学模型来进行计算。你有责任判断模型是否是逼真的。如果你在正确答案已经知道的情况下对模型进行检验，并且正好得到正确的答案，则你可以确信，在答案未知的情况下，模型也是可信赖的。

现在给出某种精确的数学定义。为了应用概率论，我们需要的一个基本整体是概率空间（Ω，$\mathscr{A}$，P）。概率空间的第一个元素Ω是样本空间，它可以是有限的，可数无限的，或者不可数无限的。概率空间的第二个元素$\mathscr{A}$，是Ω的可

容许子集的代数，也称为事件的代数。概率空间的第三个元素P是在$\mathscr{A}$上定义的概率测度，也就是说，P是一个集合函数，它的宗量是属于$\mathscr{A}$的集合中的一个，且其值是在 0 和 1 之间的一个实数。

如果Ω是一个有限集，则$\mathscr{A}$简单地就是Ω的所有子集的总和，即所谓幂集 2^{Ω}。如果Ω是一个无限集，要用一种始终如一的方法给它的每个子集指定一个概率而不遇到数学困难，在一般情况下是不可能的。因此，对指定概率的Ω的子集族必须详细说明，也就是要说明$\mathscr{A}$是什么。对于并、交、补运算来说，$\mathscr{A}$的子集服从布尔代数的规则。

在这些约定之下，为了成为一个概率测度，集函数P仅需满足下列条件：

1. $P(\phi)=0$，其中 ϕ = 空集
2. $P(\Omega)=1$
3. 对于$\mathscr{A}$中的每一个A，$P(A)\geqslant 0$
4. 如果A_1，A_2，…是$\mathscr{A}$的不相交的子集，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

1.3 随机变量

除了在$\mathscr{A}$上定义的函数P之外，我们也考虑在Ω本身之上定义的函数。任何这样的函数称为随机变量。如果这个函数的值是实数，便称为实随机变量；如果函数的值是复数，便称为复值随机变量；如果函数的值是R^n* 中的矢量，便称

* R^n表示 n 维欧基里德空间。——译注

为矢值随机变量，等等。习惯上，将随机变量（random variable）缩写为r.v.。

如果集合Ω是无限的，为了避免数学上的麻烦，必须禁止某些病态函数的出现。在大多数应用中，要出现这样的函数是极不可能的，但是为了精确起见，我们将列入这个限制。下面进一步来解释它。

可容许随机变量的类型必须与可容许集合的代数保持一致。对于实随机变量，我们将说明“一致”一词意味着什么；而推广到更一般的随机变量，则只是一个技术性问题。如果$X(\omega)$是一个实随机变量，则需要讨论X的值落入实轴上某个区间I的概率。为此，必须处理一个事件。所以，定义

$$X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega:\ X(\omega)\in I\} \tag{1}$$

符号$\in$代表“属于”。在这种情况下，对于每一个实数a，仅需考虑半无限区间$I=(-\infty,\ a]$这种形式就足够了。如果对于每一个a，集合$X^{-1}(I)$是$\mathscr{A}$的一个子集，则X是一个可容许的随机变量。

在这些条件下，可以确信，事件X小于或等于a的概率$P\{-\infty<X\leqslant a\}$被完全确定。我们给这个概率一个特定的名称。因为它是参量a的函数，故将它称为随机变量X的分布函数，用$F_X(a)$表示。于是

$$F_X(a)=P\{-\infty<X\leqslant a\} \tag{2}$$

在适当的情况下，分布函数$F_X(a)$变为对参量a可求导的，这种情况仅当样本空间Ω为不可数无限时才会发生。这时，采用概率密度函数更为方便，概率密度函数定义为F_X