面向21世纪高等学校课程教材
高等职业技术教育课程教材

高等数学

下册

邱忠文 李君湘 主编

国防工业出版社

HIGHER MATHEMATICS

3

面向21世纪高等学校课程教材
高等职业技术教育课程教材

高等数学

下册

邱忠文　李君湘　主编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/邱忠文，李君湘主编．—北京：国防工业出版社，2002.2

ISBN 7-118-02731-6

Ⅰ．高… Ⅱ．①邱… ②李… Ⅲ．高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 086768 号

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 10¼ 270 千字

2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册 定价：15.00 元

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程，为了适应当前不同层次的学生学习“高等数学”课程的需要，按照原国家教委批准印发的“高等数学课程教学基本要求”，结合当前的教学实际，我们参加教学工作的教师，编写了这套主要供“新高职”学生使用的“高等数学”教材。书中有 * 的部分，供选学。

为了满足学生今后进一步学习数学课程的需要，本教材的内容基本上涉及到了“高等数学”课程的主要内容，也可供一般大学本科学生用作教学参考书。

为了读者学习方便，本书附有初等数学常用公式、曲线汇编，作为附录。最后还有计算题参考解答供学习参考。

参加本书下册编写工作的有邱忠文、李君湘、于桂贞、李彩英、薛家治、韩健、孙秀萍等。限于编者的水平，书中不免仍有疏误，恳请读者指正。

编　者

2001 年 5 月于天津大学

内 容 提 要

本版《高等数学》上、下册系高等院校“新高职”或“一般本科”高等数学课程使用的教材，本教材基本保留了“高等数学”课程内容的传统风格，编写时参照了《高等数学课程教学基本要求》。

本书上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分和微分方程等7章；下册包括空间解析几何与矢量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和级数等5章。

本书可作为“新高职”学生使用的“高等数学”教材，亦可供一般大学本科学生作教学参考书。

目　录

第 8 章　空间解析几何与矢量代数

本章是为学习多元函数微积分学作准备.首先,建立空间直角坐标系,并介绍矢量代数的基础知识,再以矢量为工具研究空间的平面和直线,最后介绍常用的空间曲面和直线.

8.1　空间直角坐标系

与平面解析几何一样,空间解析几何也是用代数的方法研究几何图形.在空间中引进坐标系,使空间中的点与一个数组对应起来,从而可以用代数方程来研究图形.

8.1.1　空间直角坐标系

过空间中的一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且具有相同的长度单位.这三条数轴分别称为 Ox 轴(横轴)、Oy 轴(纵轴)、Oz 轴(竖轴),统称为坐标轴.它们的正向构成右手系,如图 8-1 所示.这样就构成了空间直角坐标系.

三条坐标轴中的任意两条轴所确定的平面称为坐标面.即过 Ox 轴与 Oy 轴,Oy 轴与 Oz 轴及 Oz 轴与 Ox 轴的平面分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOx 平面.三个坐标平面把整个空间分成了八个部分,每一个部分称为一个卦限.位于 xOy 平面的上方,含有 Ox 轴、Oy 轴与 Oz 轴正半轴的那一个卦限称为第一卦限.在 xOy 平面上方的其它三个卦限,依逆时针方向依次叫做第二、三、四卦

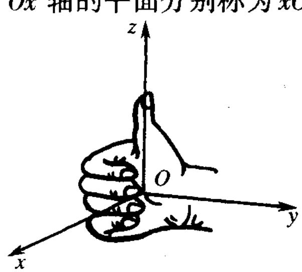

图　8-1

限.第五至第八卦限在 xOy 平面的下方.第五卦限在第一卦限的下方.其它依逆时针方向依次为第六、七、八卦限.这八个卦限分别用:Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 8-2).

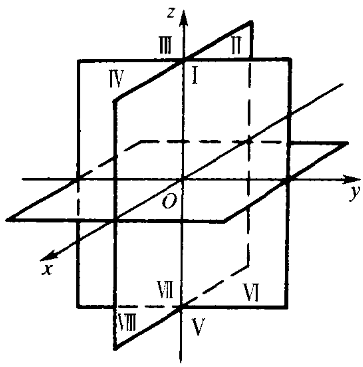

图 8-2

过空间中任意一点 M 作三个平面,分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴(图 8-3).设垂足 P,Q,R 对应的三个实数分别是 x,y,z,于是点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z).反之,如果有一个有序数组(x,y,z),则分别过 Ox 轴,Oy 轴和 Oz 轴上的点 x,y,z,作三个垂直于 Ox,Oy,Oz 轴的平面,这三个平面相交于空间一点 M.因此,有序数组(x,y,z)与空间的点 M 之间一一对应.称(x,y,z)为点 M 的坐标,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.空间的这种坐标系叫空间直角坐标系,点 O 称为坐标原点(或原点).

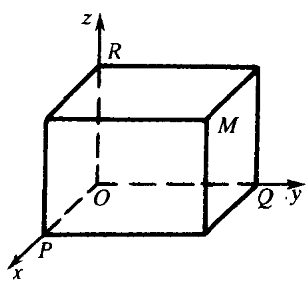

图 8-3

空间中的点在空间直角坐标系的八个卦限内,各卦限中的点其坐标的正负由下面的表格给出.

卦　限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
坐标的正负号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)
卦　限	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标的正负号	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

由此,可给出两个点关于坐标面、坐标轴、原点的对称含义.

两个点 M、Q 称为关于 xOy 面对称,即连接两点的线段 MQ 与 xOy 面垂直,且被其平分.若点 M 的坐标为(x,y,z),则点 M 关于 xOy 面对称的点 Q 的坐标为$(x,y,-z)$.同样,点 $M(x,y,z)$关于 yOz 面对称的点 Q 的坐标为$(-x,y,z)$;点 $M(x,y,z)$关于 zOx 面对称的点 Q 的坐标为$(x,-y,z)$.

类似地,我们不难得出点 $M(x,y,z)$关于 Oz 轴对称的点 Q 的坐标为$(-x,-y,z)$(即 MQ 与 Oz 轴垂直相交,且被 Oz 轴所平分);点 M 关于 Ox 轴对称的点的坐标为$(x,-y,-z)$;点 M 关于 Oy 轴对称的点的坐标为$(-x,y,-z)$.点 M 关于坐标原点 O 对称的点的坐标为$(-x,-y,-z)$.

8.1.2　空间两点间的距离

设空间中的两点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,可以通过两点的坐标表示出两点间的距离 d.过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成了以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-4),所以

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2, \end{aligned}$$

故

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

从上面的公式,我们不难知道点 $M(x,y,z)$与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

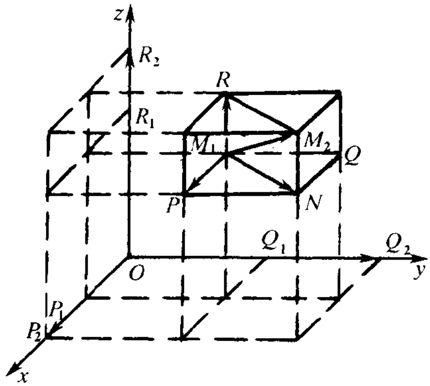

图 8-4

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1.1 验证以 $A(1,-2,2)$,$B(3,-1,0)$,$O(0,0,0)$三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解 因为

$$|OA| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$|OB| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10},$$

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+2)^2 + (0-2)^2} = 3.$$

知

$|OA| = |AB|$,所以$\triangle AOB$ 为等腰三角形.

习题 8-1

1. 点 $M(x,y,z)$的三个坐标 x,y,z 中,若有一个为零,这个点在何处?若有两个为零,这个点又在何处?并在空间直角坐标系中标出点 $A(4,0,0)$,$B(0,0,3)$,$C(0,-2,0)$,$D(4,0,3)$,$E(1,2,5)$.

2. 求与点 $M(x,y,z)$分别关于各坐标面,各坐标轴及原点对称的点的坐标.

3. 求点 $M(4,-3,5)$与原点及各坐标轴的距离.

4. 在 Oz 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 及点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 求以 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形的周长.

6. 在 yOz 坐标面上,求与三个已知点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$, $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8.2 矢量代数

8.2.1 矢量的概念

在自然科学和工程技术中,经常遇到的量有两种,一种是只有大小的量,叫做数量(或标量).例如:面积、体积、质量、温度、时间等.另一种是既有大小,又有方向的量,叫做矢量(或向量).例如:速度、加速度、力等.矢量可以用有向线段表示,有向线段的长度表示矢量的大小,有向线段的方向表示矢量的方向.若用 A 表示矢量的起点,B 表示矢量的终点,则记此矢量为 $\overrightarrow{AB}$.有时也用一个粗体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示,或者用一个上面加箭头的字母来表示,比如 $\vec{a}$,$\vec{i}$,$\vec{j}$ 等.

矢量的大小叫矢量的模,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.模等于 1 的矢量叫单位矢量.模等于零的矢量叫零矢量,记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$.零矢量的方向可看作是任意的.在直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中,以原点 O 为起点向点 M 引矢量 $\overrightarrow{OM}$ 叫点 M 的矢径,常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

我们研究的矢量通常称为自由矢量,它具有与矢量的起点无关且可以在空间中平行移动的性质.

定义 2.1 若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且模也相等,则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,并记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

8.2.2 矢量的运算

1. 矢量的加减法

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，可以用几何方法按以下两个法则之一得出：

(1)平行四边形法则. 将非零矢量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至同一点 O，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 8-5).

(2)三角形法则. 将 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的矢量就是矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

三角形法则还可以推广到求任意有限个矢量的和. 比如求四个矢量之和：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$. 只需将前一个矢量的终点作为后一个矢量的起点，相继作出 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$(图 8-6)，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到 $\boldsymbol{d}$ 的终点 D 的矢量 $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

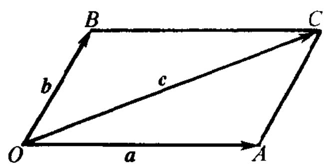

图 8-5

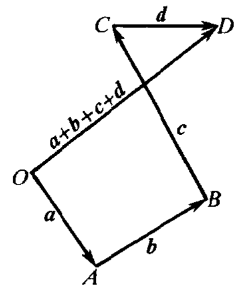

图 8-6

矢量的加法满足：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，(交换律)

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，(结合律)

这两个性质用几何画图很容易得知.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一矢量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的矢量叫 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 由三角形法则可以看出，从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把 $-\boldsymbol{b}$ 加到 $\boldsymbol{a}$ 上去即可(图 8-7).

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不为零矢量时，由三角形法则可以看出：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \qquad (2.1)$$

(2.1)式中的等号，当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时成立. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的

方向不相同时，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \quad (2.2)$$

(2.2)式称为三角形不等式，它反映了三角形中两边之和大于第三边的事实.

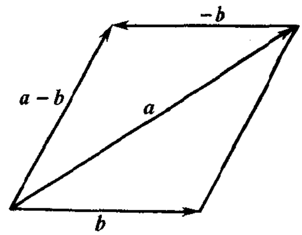

图 8-7

2. 数量与矢量相乘(简称数乘)

数量 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的积称为矢量的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

矢量的数乘满足以下运算规则($\lambda,\mu\in R$)：

(1)结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}.$$

(2)分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(3)两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或称共线)的充分必要条件为存在 $\lambda\neq0$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，则 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \quad (\text{或 } \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0).$$

8.2.3 矢量的坐标表达式

1. 矢量在轴上的投影

空间中两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是指把它们平移到共同的起点之后，矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角 θ，记为 $\theta=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$，$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=0$；若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\pi$.

设矢量$\overrightarrow{AB}$与轴 l 的正向夹角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，过起点 A，终点 B 分别作垂直于 l 的平面，这两个平面与轴 l 的交点分别为点 A' 及 B'（图 8-8），则点 A' 及点 B' 分别叫做点 A 和点 B 在轴 l 上的投影．轴 l 上的有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 $A'B'$，称为矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影，记为

$$\mathrm{P_{rj}}_l\overrightarrow{AB} = A'B'. \qquad (2.3)$$

轴 l 称为投影轴．

如果在轴 l 上选定原点及单位长度，并以 x_1，x_2 分别表示点 A'，B' 在数轴 l 上的坐标，则(2.3)式又可以表示为

$$\mathrm{P_{rj}}_l\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1. \qquad (2.4)$$

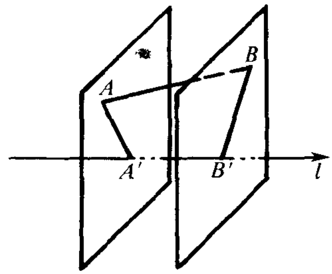

图 8-8

定理 2.1 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影等于矢量$\overrightarrow{AB}$的模乘以轴 l 与矢量$\overrightarrow{AB}$的夹角 θ 的余弦，即

$$\mathrm{P_{rj}}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

证明 过点 A 引与轴 l 平行且同向的轴 l'，则轴 l 与$\overrightarrow{AB}$的夹角就等于轴 l' 与$\overrightarrow{AB}$的夹角 θ（图 8-9），且有

$$\mathrm{P_{rj}}_l\overrightarrow{AB} = \mathrm{P_{rj}}_{l'}\overrightarrow{AB}.$$

又

$$\mathrm{P_{rj}}_{l'}\overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

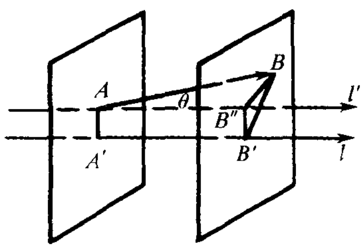

图 8-9

故

$$\mathrm{P_{rj}}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta. \qquad \text{证毕}.$$

由定理 2.1 可知，$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影是一个标量，它的大小和$\overrightarrow{AB}$与轴 l 的夹角 θ 有关，当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，投影为正；当$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，投影为负；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，投影为零．

定理 2.2 有限个矢量的和在轴 l 上的投影等于各矢量在该

轴上投影的和.即

$$\mathrm{P_{rj}}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{P_{rj}}_l\boldsymbol{a}_1+\mathrm{P_{rj}}_l\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{P_{rj}}_l\boldsymbol{a}_n.$$

2. 矢量的坐标表示法

在空间直角坐标系中,各取 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴正方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$.这三个矢量称为空间直角坐标系的三个基本单位矢量(图 8-10).

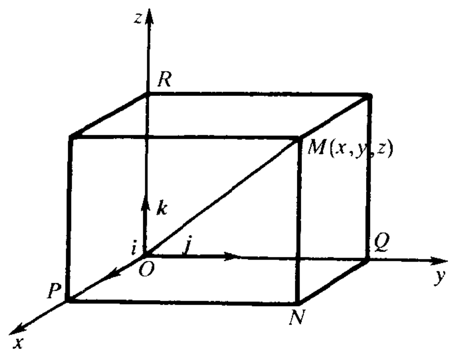

图 8-10

设 $\boldsymbol{a}$ 是以坐标原点为起点,终点为 $M(x,y,z)$的矢量$\overrightarrow{OM}$,则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\\&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

这就是矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式.而有序数组 x、y、z 称为矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标,记为$\{x,y,z\}$,即

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\tag{2.5}$$

若矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$.根据矢量的运算规律,可以得到$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式,由(2.5)式,参见图 8-11,有

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$