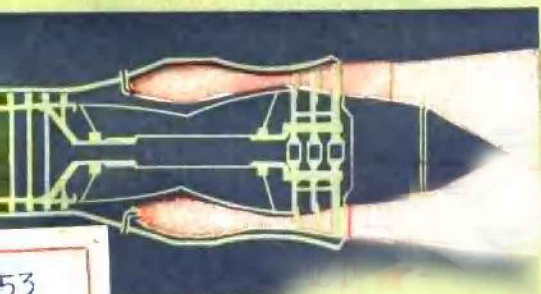


涡轮机高温零件温度场专题文集

第三集

涡轮机叶片温度场的分析研究



国防工业出版社

内 容 简 介

本书是“涡轮机高温零件温度场专题文集”第三集。在第一、二集中已经对涡轮机转子的稳定和 unstable 温度场作了分析研究。本集是对涡轮中温度最高的零件——静叶和动叶，提供一套比较完整的温度场分析研究方法，它包括：经典法、有限元法和电热模拟法等；并对各种类型燃气轮机叶片的稳定和 unstable 温度场进行了分析研究。

本书可供航空、造船、火箭、机车以及陆用涡轮机的设计和研究部门在设计和分析计算各种冷却叶片时使用。亦可供有关专业的大学生和研究生参考。

涡轮机高温零件温度场专题文集

第 三 集

涡轮机叶片温度场的分析研究

葛永乐 郭宽良 葛新石 孙孝兰 林汉涛 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张 11 230 千字

1982年12月第一版 1982年12月第一次印刷 印数：001—900册

统一书号：15034·2421 定价：1.15元

前 言

近年来,为了提高发动机的经济性,燃气涡轮的进口温度越提越高,例如已将航空发动机的涡轮进口初温提高到 1300°C 以上。在这样的高温下,叶片却直接处在燃气流下工作。因此,为了保证发动机的工作可靠性,通常采用各种冷却方法来降低叶片温度。但为了衡量冷却效果以及确保叶片材料在允许温度下的工作寿命,还必须计算出叶片在各种工况下的温度场。这是发动机设计和研究部门的一项重要课题。

叶片温度场的理论计算方法在国外早已在进行研究。六十年代以后,我国也开始这方面的工作。十多年来,在党和上级的正确领导下,国内各研究单位相互协作,在叶片温度场的研究方面取得了一定的成果。为了促进学术上的交流,今将我们十多年来的一些研究心得编写成书,借以抛砖引玉,互相学习,共同提高。

本书是由葛永乐、郭宽良、葛新石、孙孝兰和林汉涛等五位同志共同编写的。在编写过程中曾得到许多同志的关怀和帮助。参加第一~四篇的编写工作的还有吕建成、杨燕生、王子清、章诚松、丛日盛、张益华、李森奎等同志;参加第五篇的还有李翊神、孙汝元、吴莲瑛、刘儒勋等同志;参加第七篇的还有杨燕生、单荣英、李翊神、黄克诚等同志;参加第九篇的还有张维楨同志。有关固体热传导变分原则的内容曾由中国科学院力学所马同泽副研究员和中国科技大学近

代力学系王群副主任审阅。本书初稿写成后，曾得到上海交通大学沈维道副教授、王盛平讲师、蒋智敏讲师和上海机械学院沈炳正教授、徐昂千副教授的详细审阅。711 研究所 沈岳瑞副所长、熊琳总工程师、李玉斌主任、磨庆涛主任等领导同志对本书的出版给予大力支持和热情关怀。作者在此谨致以衷心地感谢。

由于作者才疏学浅，经验不足，书中错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

作者

一九七九年九月

目 录

第一篇 叶根冷却时变截面工作叶片温度场的分析研究 … 1

§ 1-1 引言	1
§ 1-2 变截面叶片温度场计算公式的推导	2
§ 1-3 工作叶片根截面温度 t_1 的求定	14
§ 1-4 燃气涡轮工作叶片温度场的计算分析	18
§ 1-5 燃气涡轮工作叶片温度场的模拟分析	34
§ 1-6 结论	42
参考文献	43
附录表 1-1 双曲线正弦函数表	44
附录表 1-2 双曲线余弦函数表	46
附录表 1-3 双曲线正切函数表	48

第二篇 端部冷却型导向叶片空间温度场的分析研究 …… 50

§ 2-1 引言	50
§ 2-2 导向叶片沿叶高的温度分布的理论计算	51
§ 2-3 考虑及放热系数沿导叶叶型变化时导 叶空间温度场的理论计算	60
§ 2-4 导叶空间电模型的测试技术	70
§ 2-5 燃气涡轮导向叶片空间温度场的计算分析	73
§ 2-6 燃气涡轮导向叶片空间温度场的模拟分析	81
§ 2-7 结论	87
参考文献	89

第三篇 空气内冷却导向叶片空间温度场的分析研究 …… 90

§ 3-1 引言	90
§ 3-2 空心导叶沿叶高的温度分布的理论计算	91

§ 3-3 空心导叶沿叶型的温度分布的理论计算·····	103
§ 3-4 燃气涡轮空心导叶的空间温度场的计算分析·····	113
§ 3-5 结论·····	137
参考文献·····	138
第四篇 快速启动时导向叶片不稳定	
温度场的分析研究·····	139
§ 4-1 引言·····	139
§ 4-2 导向叶片热阻和热容网络的计算·····	140
§ 4-3 导向叶片电阻和电容网络的计算·····	149
§ 4-4 导叶不稳定温度场的测定结果·····	152
§ 4-5 结论·····	158
参考文献·····	160
第五篇 固体热传导问题的权余法和变分原则 ·····	161
§ 5-1 引言·····	161
§ 5-2 权余法·····	162
§ 5-3 固体热传导问题的变分原则·····	168
§ 5-4 结论·····	182
参考文献·····	183
第六篇 用有限元法计算涡轮气冷叶片	
二维稳态温度场·····	184
符号表·····	184
§ 6-1 引言·····	186
§ 6-2 有限元法出发的方程·····	187
§ 6-3 边界参数 η 、 q 的计算·····	189
§ 6-4 方程的离散化及直接解法·····	193
§ 6-5 DJS-21 机计算程序和程序说明·····	205
§ 6-6 计算结果和分析·····	213
参考文献·····	218

附录6-1	用FORTRAN语言编写、在DJS-8机上使用的本计算示例专用程序	219
第七篇	用有限元法计算涡轮气冷叶片二维非稳态温度场	229
§ 7-1	引言	229
§ 7-2	求解二维非稳态热传导问题的有限元法	230
§ 7-3	边界参数的计算	239
§ 7-4	计算程序和说明	241
§ 7-5	计算结果和分析	259
	参考文献	263
第八篇	气冷叶片内通道中气流非稳态温度场的计算	264
	符号表	264
§ 8-1	引言	266
§ 8-2	气冷叶片非稳态温度场的计算	266
§ 8-3	有关参数的计算	268
§ 8-4	T_{ck} 的计算公式及程序	273
§ 8-5	计算结果及分析	280
第九篇	用有限元法计算枞树形接触棒头的稳定和不稳定温度场的研究	283
	符号表	283
§ 9-1	引言	286
§ 9-2	温度场的定解问题	288
§ 9-3	温度场有限元法的物理本质	290
§ 9-4	稳定温度场的有限元法	296
§ 9-5	不稳定温度场的有限元法	309
§ 9-6	枞树形棒头边界换热的准则关系式	314

VIII

§ 9-7 枞树形接触棒头温度场的有

限元计算实例以及计算机程序的说明.....321

§ 9-8 结论.....327

参考文献327

附录 9-1 稳定温度场有限元法源程序329

第一篇 叶根冷却时变截面工作 叶片温度场的分析研究

§ 1-1 引 言

现代涡轮工作叶片的结构是比较复杂的。为了求定叶片的温度场，必须求解三元热传导问题，但这样做会在数学上碰到不可克服的困难。为此，通常须将问题进行简化，并分为二个问題分别求解，即（1）求定工作叶片沿叶高方向的温度变化规律；（2）求定沿叶片横截面上的温度场。

在求解第一个问题时，可忽略沿叶片横截面上的温度变化，而将工作叶片的叶型部分当作是一个变截面的柱体，这样的简化对于叶根冷却型的实心工作叶片是允许的。本篇的主要目的就是解决这第一个问题。

对于放热系数沿叶型周向而变化的实心叶片以及内冷却的空心叶片，这时就必须求解第二个问题，亦即确定叶片横截面上的温度场。关于求解这二种问题的方法，我们将分别在第二篇和第三篇中加以分析研究。

在文献〔1〕的第二篇中，我们曾对等截面工作叶片在叶根冷却时，沿叶高方向的温度分布规律作了推导。但在现代燃气涡轮发动机中，工作叶片的横截面积沿叶高方向的变化很大，一般可达3~4倍，这样就必须把它当作一个变截面叶片来进行考虑。

在文献〔2〕和〔3〕中，作者对叶片截面积的变化规律作

了某些假定，导出了变截面叶片沿叶高方向的温度分布计算公式；并指出在 $\bar{u}_b \cdot \bar{F}_b \leq 0.85$ 时，按等截面和变截面两种叶片计算公式算得的结果其间的偏差达 10~15%（这里 $\bar{u}_b = \frac{u_b}{u_{bK}}$ ， $\bar{F}_b = \frac{F_b}{F_{bK}}$ ，式中 u_b ——叶片计算截面处的周长； u_{bK} ——叶片根截面处的周长； F_b ——叶片计算截面处的截面积； F_{bK} ——叶片根截面处的截面积）。但在上述文献所载的推导过程中，我们发现存在着某些问题，因此，我们在本篇中对变截面叶片沿叶高方向的温度分布计算公式重新进行了推导，同时对某台燃气涡轮工作叶片的温度场进行了理论计算和电热模拟分析，比较不在采用等截面和变截面这两种叶片计算公式时所造成的偏差并且得出关于一般的轻结构燃气轮机，当其工作叶片的叶高 l 等于 80 毫米时，两种计算结果间的偏差小于 0.5% 的结论；在叶片高度很小时（ $l = 30$ 毫米），两者间的偏差也只有 1.0%；因此文献〔2〕和〔3〕中所认为的按等截面和变截面这两种叶片计算公式所得的结果——其间的偏差很大的结论是值得商榷的，我们猜测可能是由于计算公式推导错误所造成。

变截面叶片温度场的理论计算方法还可参照文献〔4〕~〔6〕。

§ 1-2 变截面叶片温度场计算公式的推导

现代的燃气涡轮工作叶片的典型结构如图 1-1 所示。从图中可以看出：它可以分为叶型和叶根两部分。这里只研究叶型部分的温度场；对于叶根部分温度场的计算方法可参照文献〔7〕，这里不再重述。

叶型部分温度场计算公式的推导如下:

一、计算中的假设

假设工作叶片横截面积沿叶高方向的变化规律为

$$\bar{F}_b = (1 - a\bar{x})^2 \quad (1-1)$$

式中 $\bar{x} = \frac{x}{l}$ ——叶片计算截面的相对坐标;

x ——叶片计算截面距根截面的坐标;

l ——叶片高度;

a ——系数 (它按叶片的具体造型和结构确定)。

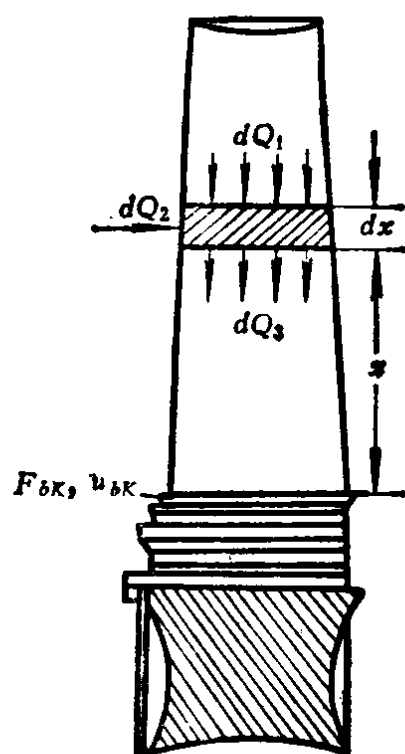


图1-1 燃气涡轮的工作叶片

工作叶片横截面积和周长的乘积沿叶高方向的变化规律取为

$$\bar{F}_b \cdot \bar{u}_b = \frac{1}{(1 + by)^2} \quad (1-2)$$

式中 $y = \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\bar{F}_b}$ ——叶片计算截面的转换坐标;

b ——系数 (它亦按叶片的具体造型和结构确定)。

同时, 假定叶片材料的导热系数 λ_b 沿叶高方向保持不变, 燃气对叶型的放热系数 α_g 按平均值计算, 并假定它沿叶高方向保持不变。

二、微分方程式的导出

在图 1-1 所示的变截面叶片中取一微段 dx , 按傅立叶

定律在单位时间内通过 $x + dx$ 截面传给微段的热量为

$$dQ_1 = \lambda_b F_b \left(\frac{dt_b}{dx} \right)_{x+dx} \quad (1-3)$$

在 x 截面上微段放出的热量为

$$dQ_3 = \lambda_b F_b \left(\frac{dt_b}{dx} \right)_x \quad (1-4)$$

在微段的侧面上，燃气传给叶片的热量可按牛顿放热公式计算，它可写为

$$dQ_2 = \alpha_g u_b (t_g^* - t_b) dx \quad (1-5)$$

式中 t_g^* ——叶片附近燃气的相对滞止温度，它可按下列公式计算：

$$t_g^* = t_g + r \frac{A w_{cp}^2}{2gc_p} \quad (1-6)$$

这里 t_g ——燃气的静温；

A ——热功当量；

w_{cp} ——叶道中燃气的相对平均速度；

c_p ——燃气的等压比热；

g ——重力加速度；

r ——复现率。

复现率 r 可按下列公式近似计算：

$$r = \sqrt{P_r} \quad (1-7)$$

式中 P_r ——燃气的普朗特准则数。

在稳定热传导状态下，微段的热平衡方程如下式所示：

$$dQ_3 = dQ_1 + dQ_2 \quad (1-8)$$

将 (1-3)、(1-4) 和 (1-5) 式代入 (1-8) 式，可得

$$\lambda_b F_b \left(\frac{dt_b}{dx} \right)_x = \lambda_b F_b \left(\frac{dt_b}{dx} \right)_{x+dx} + \alpha_g u_b (t_g^* - t_b) dx \quad (1-9)$$

整理化简后可得

$$\frac{d}{dx} \left(F_b \frac{dt_b}{dx} \right) + \frac{\alpha_g u_b}{\lambda_b} (t_g^* - t_b) = 0 \quad (1-10)$$

设相对参数 $\begin{cases} \bar{F}_b = \frac{F_b}{F_{bK}}, \quad \bar{u}_b = \frac{u_b}{u_{bK}} \\ d\bar{x} = \frac{dx}{l} \end{cases}$

这时，方程式 (1-10) 可以改写为

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{F}_b \frac{dt_b}{d\bar{x}} \right) + \frac{\alpha_g u_{bK}}{\lambda_b F_{bK}} l^2 \bar{u}_b (t_g^* - t_b) = 0 \quad (1-11)$$

令 $m^2 = \frac{\alpha_g u_{bK}}{\lambda_b F_{bK}} l^2$ ，代入方程式 (1-11) 后可得

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{F}_b \frac{dt_b}{d\bar{x}} \right) + m^2 \bar{u}_b (t_g^* - t_b) = 0 \quad (1-12)$$

引入与 $\bar{x}$ 有关的新变量 y

$$y = \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\bar{F}_b} \quad (1-13)$$

这时 $\frac{dy}{d\bar{x}} = \frac{1}{\bar{F}_b}$ 或 $d\bar{x} = \bar{F}_b dy$ ，代入 (1-12) 式得

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dt_b}{dy} \right) + m^2 \bar{u}_b \cdot \bar{F}_b (t_g^* - t_b) = 0 \quad (1-14)$$

将 (1-2) 式代入 (1-14) 式，可得到

$$\frac{d^2 t_b}{dy^2} + m^2 \frac{1}{(1 + by)^2} (t_g^* - t_b) = 0 \quad (1-15)$$

再引入新变量 z

$$z = \ln(1 + by) \text{ 或 } e^z = (1 + by) \quad (1-16)$$

这时 $\frac{dz}{dy} = \frac{d \ln(1 + by)}{d(1 + by)} \times b = \frac{b}{1 + by} = \frac{b}{e^z}$

所以 $e^z dz = b dy$ ，代入 (1-15) 式可得

$$\frac{bd}{e^z dz} \left(\frac{dt_b}{dz} - \frac{b}{e^z} \right) + \frac{m^2}{e^{2z}} (t_b^* - t_b) = 0 \quad (1-17)$$

展开 (1-17) 式, 经过简化整理, 最后得

$$\frac{d^2 t_b}{dz^2} - \frac{dt_b}{dz} + \frac{m^2}{b^2} (t_b^* - t_b) = 0 \quad (1-18)$$

上式亦可改写为

$$\frac{d^2 t_b}{dz^2} - \frac{dt_b}{dz} - \frac{m^2}{b^2} t_b = -\frac{m^2}{b^2} t_b^* \quad (1-19)$$

三、微分方程的求解

方程式 (1-19) 为二阶线性非齐次常系数常微分方程式, 它的通解为相同的齐次方程式通解和非齐次方程式一个特解之和, 亦即

$$t_b = t_{b0} + t_{by} \quad (1-20)$$

式中 t_{b0} ——齐次方程式的通解;

t_{by} ——非齐次方程式的特解。

方程式 (1-19) 的齐次方程式为

$$\frac{d^2 t_b}{dz^2} - \frac{dt_b}{dz} - \frac{m^2}{b^2} t_b = 0 \quad (1-21)$$

方程式 (1-21) 的通解为

$$t_{b0} = c_1 e^{K_1 z} + c_2 e^{K_2 z} \quad (1-22)$$

式中 c_1, c_2 ——积分常数;

K_1, K_2 ——微分方程的特征方程式的二个根。

方程式 (1-21) 的特征方程式为

$$K^2 - K - \frac{m^2}{b^2} = 0 \quad (1-23)$$

其解为

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{b^2}} \end{array} \right. \quad (1-24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{b^2}} \end{array} \right. \quad (1-25)$$

将 (1-22) 式化为自变量 y 的方程式, 即

$$t_{b0} = c_1(1 + by)^{K_1} + c_2(1 + by)^{K_2} \quad (1-26)$$

非齐次方程式 (1-19) 的特解可用参数变易法求出, 即

$$t_{by} = f_1 e^{K_1 z} + f_2 e^{K_2 z} \quad (1-27)$$

式中 f_1, f_2 ——待定函数, 它可按下列方程组求出,

$$\begin{cases} f'_1 e^{K_1 z} + f'_2 e^{K_2 z} = 0 \end{cases} \quad (1-28)$$

$$\begin{cases} f'_1 (e^{K_1 z})' + f'_2 (e^{K_2 z})' = -\frac{m^2}{b^2} t_g^* \end{cases} \quad (1-29)$$

方程式 (1-29) 可改写为

$$f'_1 K_1 e^{K_1 z} + f'_2 K_2 e^{K_2 z} = -\frac{m^2}{b^2} t_g^* \quad (1-30)$$

从方程式 (1-28) 和 (1-30) 的联解中可求出

$$f_1 = \frac{m^2}{b^2(K_2 - K_1)} \int_0^z \frac{t_g^*}{e^{K_1 z}} dz \quad (1-31)$$

$$f_2 = -\frac{m^2}{b^2(K_2 - K_1)} \int_0^z \frac{t_g^*}{e^{K_2 z}} dz \quad (1-32)$$

将 (1-31) 和 (1-32) 式代换为自变量 y 的公式, 亦即将 $e^z = (1 + by)$ 代入 (1-31) 和 (1-32) 式, 这时可得

$$f_1 = \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \int_0^y \frac{t_g^*}{(1 + by)^{K_1+1}} dy \quad (1-33)$$

$$f_2 = -\frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \int_0^y \frac{t_g^*}{(1 + by)^{K_2+1}} dy \quad (1-34)$$

因此, 非齐次微分方程式 (1-19) 的通解可写为

$$t_b = (c_1 + f_1)(1 + by)^{K_1} + (c_2 + f_2)(1 + by)^{K_2} \quad (1-35)$$

四、积分常数的确定

积分常数 c_1 和 c_2 可按叶片的边界条件来确定。通常, 叶片的边界条件可写为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l, \bar{x} = 1, y = B \text{ 处} \quad \frac{dt_b}{d\bar{x}} = 0 \end{array} \right. \quad (1-36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \bar{x} = 0, y = 0 \text{ 处} \quad \frac{dt_b}{d\bar{x}} = \frac{Q_b l}{\lambda_b F_{bK}} \end{array} \right. \quad (1-37)$$

式中 Q_b ——根截面处叶片传给叶根的热量。

将解 (1-35) 式对 $\bar{x}$ 求一次微分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dt_b}{d\bar{x}} = & \frac{df_1}{d\bar{x}} (1 + by)^{K_1} + (c_1 + f_1)(1 + by)^{K_1-1} \cdot \frac{K_1 b}{F_b} \\ & + \frac{df_2}{d\bar{x}} (1 + by)^{K_2} + (c_2 + f_2)(1 + by)^{K_2-1} \cdot \frac{K_2 b}{F_b} \end{aligned} \quad (1-38)$$

(1-38) 式中的 $\frac{df_1}{d\bar{x}}$ 和 $\frac{df_2}{d\bar{x}}$ 可按下列公式求得:

$$\frac{df_1}{d\bar{x}} = \frac{df_1}{dy} \cdot \frac{dy}{d\bar{x}} = \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + by)^{K_1+1}} \cdot \frac{1}{F_b} \quad (1-39)$$

$$\frac{df_2}{d\bar{x}} = \frac{df_2}{dy} \cdot \frac{dy}{d\bar{x}} = -\frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + by)^{K_2+1}} \cdot \frac{1}{F_b} \quad (1-40)$$

在叶尖截面处, 亦即 $\bar{x} = 1$ 处

$$\left| \frac{df_1}{d\bar{x}} \right|_{\substack{\bar{x}=1 \\ y=B}} = \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + bB)^{K_1+1}} \cdot \frac{1}{F_{bB}} \quad (1-41)$$

$$\left| \frac{df_2}{d\bar{x}} \right|_{\substack{\bar{x}=1 \\ y=B}} = -\frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + bB)^{K_2+1}} \cdot \frac{1}{F_{bB}} \quad (1-42)$$

在叶根截面处, 亦即 $\bar{x} = 0$ 处

$$\left| \frac{df_1}{d\bar{x}} \right|_{\substack{\bar{x}=0 \\ y=0}} = \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{F_{bK}} \quad (1-43)$$

$$\left| \frac{df_2}{d\bar{x}} \right|_{\substack{\bar{x}=0 \\ y=0}} = - \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{F b_K} \quad (1-44)$$

将 (1-41), (1-42) 和 (1-38) 式代入边界条件(1-36)式, 可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{dt_b}{d\bar{x}} \right|_{\substack{\bar{x}=1 \\ y=B}} &= \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + bB)^{\kappa_1 + 1}} \\ &\quad \times \frac{1}{F b_B} (1 + bB)^{\kappa_1} \\ &\quad + (c_1 + |f_1|_{\bar{x}=1}) (1 + bB)^{\kappa_1 - 1} \frac{K_1 b}{F b_B} \\ &\quad - \frac{m^2}{b(K_2 - K_1)} \cdot \frac{t_g^*}{(1 + bB)^{\kappa_2 + 1}} \\ &\quad \times \frac{1}{F b_B} (1 + bB)^{\kappa_2} \\ &\quad + (c_2 + |f_2|_{\bar{x}=1}) (1 + bB)^{\kappa_2 - 1} \frac{K_2 b}{F b_B} = 0 \end{aligned}$$

将上式整理后, 得

$$\begin{aligned} &(c_1 + |f_1|_{\bar{x}=1}) (1 + bB)^{\kappa_1 - 1} \cdot K_1 + (c_2 + |f_2|_{\bar{x}=1}) \\ &\quad \times (1 + bB)^{\kappa_2 - 1} \cdot K_2 = 0 \end{aligned} \quad (1-45)$$

当 $\bar{x} = 1$ 时, 令 $|f_1|_{\bar{x}=1} = P_1$, $|f_2|_{\bar{x}=1} = P_2$, 则 (1-45) 式可改写为

$$\begin{aligned} &(c_1 + P_1) (1 + bB)^{\kappa_1 - 1} \cdot K_1 \\ &\quad + (c_2 + P_2) (1 + bB)^{\kappa_2 - 1} \cdot K_2 = 0 \end{aligned} \quad (1-46)$$

将 (1-43), (1-44) 和 (1-38) 式代入边界条件(1-37)式, 得