柳重堪　邵鸿飞
崔向前　罗利民　编

1999

硕士研究生入学考试

数学　复习指导

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部最新制订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲编写而成的。它包括四类数学试卷适用的专业,考试范围,试卷结构,考试要求,以及考试大纲所要求的各部分数学内容的提要和典型例题讲解,并在对近年来研究生入学试题进行分析的基础上,设计了四类数学各两套模拟试题及解答,还附入了1997、1998年四类数学的试卷和参考答案,对其中的填空题和选择题给出了求解方法的注释。

本书可作为报考工学、经济学硕士研究生考前辅导班的教材或考生自己复习的参考书,也可作为大学生和教师的教学参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

1999年硕士研究生入学考试数学复习指导/柳重堪,邵鸿飞编
. – 北京:航空工业出版社,1998.8
ISBN 7-80134-349-2

Ⅰ.19… Ⅱ.柳… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料-1999 Ⅳ.013

中国版本图[redacted]第19688号

责任编辑 周士林

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里14号 100029)
北京京华印刷制版厂　　全国各地新华书店经售
1998年8月第1版　　1998年8月第1次印刷
开本:787×1092 1/16　　印张:17.625　　字数:550千字
印数:1–5 000　　定价:20.00元

前　　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们根据国家教育部制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲，编写了这本书。

本书包括四类数学试卷的适用专业，考试科目，试卷结构以及考试大纲所要求的各部分数学内容的提要和示范性例题，考生可根据各类考试要求有选择地进行参考复习。此外，本书还设计了四类数学各两套模拟试题（共八套）及其解答，还附入了 1997 年 1998 年四类数学的试卷及参考答案，对于其中的填空题和选择题，给出了求解方法的注解，使考生了解为什么如此解答。

本书承袁公英、邵士敏、姚孟臣三位专家在百忙之中抽出时间给予认真仔细的审阅，提出了许多宝贵的意见，在此谨表深切的谢意。

由于编者水平有限和时间仓促，书中难免有不妥和错误之处，望读者提出宝贵意见，以便再版时修改。

编者

1998 年 6 月于北京

目　　录

一、各类数学试卷适用专业，考试科目和试卷结构

数学一

（一）适用专业

力学、仪器仪表、动力工程及工程热物理、电工、电子学与通信、计算机科学与技术、自动控制、管理科学与工程、船舶与海洋工程、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术、机械工程、材料科学与工程、冶金、土木、水利、测绘、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业、石油、铁道、公路、水运、以及建筑学、科学技术史、轻工、纺织、林业工程、农业工程六门学科中对数学要求较高的二级学科、专业。

（二）考试科目及内容比例

高等数学　约 60%
线性代数　约 20%
概率论与数理统计初步　约 20%

（三）题型比例

填空题与选择题　约 30%
解答题（包括证明题）　约 70%

数学二

（一）适用专业

建筑学、科学技术史、纺织、轻工、林业工程、农业工程六个学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

（二）考试科目及内容比例

高等数学　约 85%
线性代数初步　约 15%

（三）题型比例

填空题与选择题　约 30%
解答题（包括证明题）　约 70%

数学三

(一) 适用专业

国民经济计划与管理(含国民经济系统分析)、工业经济、企业管理(含企业财务管理)、统计学、数量经济学、技术经济、运输经济(附邮电经济)、经济地理、投资经济、信息经济,以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

(二) 考试科目及内容比例

微积分　约 50%
线性代数　约 25%
概率论与数理统计　约 25%

(三) 题型比例

填空题　约 30%
解答题(包括证明题)　约 70%

数学四

(一) 适用专业

农业经济(含林业经济、畜牧业经济、渔业经济)、商业经济(含物资经济)、劳动经济学、财政学、货币银行学、会计学(含审计学)、国际贸易、国际金融、世界经济、政治经济学、马克思主义经济思想史、中国经济思想史、中国经济史、西方经济学、外国经济史、外国经济思想史、消费经济、商品学、旅游经济、城市经济、国防经济以及对数学要求较低的人口经济学、保险学专业。

(二) 考试科目及内容比例

微积分　约 50%
线性代数　约 25%
概率论　约 25%

(三) 题型比例

填空与选择题　约 30%
解答题(包括证明题)　约 70%

二、高等数学(微积分)内容提要及各类数学考试要求

(一) 函数、极限、连续

内容提要与例题

1. 函数概念

函数概念涉及函数的定义,表示法(公式,图形,表格),定义域,值域等。

2. 函数的几个重要特性

(1) 单调性　单调增加,单调减少。

(2) 有界性　若存在某一正数 M,使得对一切 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界。

(3) 奇偶性　偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于原点 O。

(4) 周期性

3. 基本初等函数

常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数(掌握它们的图形,特性)

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤而得到的函数称为**初等函数**。

例 1　研究函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的奇偶性、单调性及反函数。

解　$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$

故 $f(x)$ 是奇函数。

设　$y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,由上式又得 $-y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$,于是

$$\sqrt{x^2+1}-x=e^y,\qquad \sqrt{x^2+1}+x=e^{-y}$$

两式相减,得

$$x=\frac{e^{-y}-e^y}{2}$$

因此 $f(x)$ 的反函数为

$$y=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\operatorname{sh}x$$

由 $y=\operatorname{sh}x$ 的单调增加,即知 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是单调减少的。

例 2　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f(f\cdots f}_{n次}(x))$

解

$$f(f(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+x^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f(f(f(x)))=\frac{x/\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+2x^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

现设

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{n次}(x))=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

则

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{(n+1)次}(x))=\frac{x/\sqrt{1+nx^2}}{\sqrt{1+x^2/(1+nx^2)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

由归纳法知

$$\underbrace{f(f\cdots f}_{n次}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

例3 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$

解 由于 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，故

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$$

又因

$$f[\varphi(x)] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$$

故

$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x,\qquad \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

因此

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x = \int\frac{x-1+2}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = x+2\ln|x-1|+C = x+\ln(x-1)^2+C$$

5. 数列极限，函数极限

要掌握数列极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a$$

的定义，函数极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A,\qquad \lim_{x\to\infty}f(x) = A$$

的定义，函数左右极限

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0}f(x) = A$$

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0}f(x) = B$$

的定义。函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是函数在该点处的左右极限存在且相等：$f(x_0-0)=f(x_0+0)$。

6. 极限的四则运算法则（+、- ×、÷）

7. 两个极限存在准则

(1) 夹逼准则　若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A$，且 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\square}h(x)=A$；

(2) 单调有界准则　单调增加且有上界(或单调下降且有下界)的数列必有极限。

8. 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

9. 无穷小　无穷小是极限为零的量

无穷小的比较：

$\alpha\sim\beta$(等价无穷小)：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，例如，当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

α 与 β 是同阶无穷小：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k$(非零常数)

$\alpha=o(\beta)$(α 是 β 的高阶无穷小)：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$

10. 求极限的常用方法

(1) 利用极限的四则运算法则和函数的连续性；

(2) 利用洛必达法则(适用于各种未定式)；

(3) 利用代数或三角恒等变形；

(4) 利用已知极限；

(5) 利用极限存在的两个准则；

(6) 利用极限定义，导数定义，定积分定义；

(7) 利用等价无穷小(注意：等价无穷小只能用来代替乘除因子)；

(8) 利用泰勒公式。

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}-1}{\ln(1+\tan x)}$

解 由 $(1+u)^{\alpha}-1\sim\alpha u$ （当 $u\to 0$ 时）知 $(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}-1\sim\frac{4}{3}\sin x$

由 $\ln(1+v)\sim v$ （当 $v\to 0$ 时）知 $\ln(1+\tan x)\sim\tan x$

因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cos x=\frac{4}{3}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

解法一 (利用恒等变形)

$$原式=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-2x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}\right]=2$$

解法二 (利用泰勒公式)

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/3}-x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2+\frac{o(x^{-1})}{x^{-1}}\right]=2$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$

解法一 (取对数，用洛必达法则)因为

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{1/x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(2+6x)(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以，原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

解法二 (取对数，用泰勒公式)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}=-\frac{1}{2}$$

所以，原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{2!\,4}\right)+\dfrac{o(x^4)}{x^4}\right]=-\dfrac{1}{12}$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2/2!}{x\cdot\dfrac{1}{2!}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$

其中用到了 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1-\cos u}{u^2/2!}=1$，此式可用洛必达法则验证，或根据泰勒公式：$\cos u=1-\dfrac{1}{2!}u^2+o(u^2)$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}n}=e^4$

其中用到了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}n=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\dfrac{2}{n}}{\dfrac{2}{n}}\,\frac{4}{1-\tan\dfrac{2}{n}}=4$$

例 8 设 $f(x)$ 具有正的二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

解 切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

令 $Y=0$，得此切线在 x 轴上的截距为

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

显然当 $x\to0$ 时 $u\to0$，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{x\left[f(0)+f'(0)u+\frac{1}{2}f''(\xi)u^2\right]}{uf(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{xf''(\xi)u}{2f(x)}\qquad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }u\text{ 之间})\\&=\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi)}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\left[x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right]}{f(x)}\\&=\frac{f''(0)}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2}{f(x)}-\frac{x}{f'(x)}\right],\qquad\left(\because\ \lim_{x\to0}\frac{x^2}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{f'(x)}\right)\\&=\frac{f''(0)}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{f'(x)}=\frac{f''(0)}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{f''(x)}=\frac{f''(0)}{2}\,\frac{1}{f''(0)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例 9 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且满足

$$\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$$

求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

解 首先有 $f(0)=0$,因为否则根据连续性便有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=\infty$$

于是

$$f(x)=f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3,\quad \xi\text{在}0\text{与}x\text{之间}$$

又由

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right]=3$$

推知 $f'(0)=0$. 这样,

$$3=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+x+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{f''(0)}{2}x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right]=1+\frac{f''(0)}{2}$$

于是 $f''(0)=4$. 最后

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[1+2x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[2x+\frac{f'''(\xi)}{6}x^2\right]=2$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$

例 10 设 $\alpha>0,x_1>\sqrt{\alpha},x_n$ 由公式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

所确定。求证:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于$\sqrt{\alpha}$,(2) 令 $\varepsilon_n=x_n-\sqrt{\alpha}$,则 $\varepsilon_{n+1}\leqslant\beta(\varepsilon_1/\beta)^{2^n}$,其中 $\beta=2\sqrt{\alpha}$.(注:这里给出了求$\sqrt{\alpha}$的一种近似方法及相应的误差估计)。

解

(1) 由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{\alpha}{x_n}}=\sqrt{\alpha}$知数列$\{x_n\}$有下界,由 $x_{n+1}/x_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{(\sqrt{\alpha})^2}\right)=1$ 知数列$\{x_n\}$单调下降。于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设为 A,则 A 满足

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{\alpha}{A}\right)$$

由此可得 $A=\sqrt{\alpha}$

(2) $\varepsilon_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)-\sqrt{\alpha}=\frac{(x_n-\sqrt{\alpha})^2}{2x_n}=\frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}\leqslant\frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{\varepsilon_n^2}{\beta}$

由此即可得到

$$\varepsilon_{n+1}\leqslant\beta(\varepsilon_1/\beta)^{2^n}$$

11. 函数的连续性

设函数 $f(x)$在 x_0 的邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在 x_0 处连续。

判断函数 $f(x)$在点 x_0 处是否连续,常用下列方法:(1) $f(x)$在 x_0 及其附近是否有定义?(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在?(3) 该极限是否等于 $f(x_0)$。

12. 间断点的分类

(1) 若 $f(x)$在 x_0 点左、右极限存在,且 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$;或者 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$;或者 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$但 $f(x)$在 x_0 点无定义,都称 x_0 点为 $f(x)$的**第一间断点**。后两种情形也称 x_0 点为可去间断点。

(2) $f(x)$在 x_0 点的左、右极限至少有一个不存在,则称 x_0 点为 $f(x)$的**第二类间断点**。

13. 函数连续性的运算

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则

$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

也在 x_0 点连续$\left(\text{对于}\frac{f(x)}{g(x)}\text{的情形，设 } g(x_0) \neq 0\right)$。

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点也连续。

14. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的。

15. 闭区间上连续函数的性质

(1) **介值定理**：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 β，必存在 $c(a<c<b)$，使得 $f(c)=\beta$。

特殊情况(零点定理)：若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，必存在 $c(a<c<b)$，使得 $f(c)=0$。

(2) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。

(3) **最大值最小值定理**：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上必存在 x_1, x_2 使得

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = M, \quad f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = m$$

例 1 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+4)$，$f(0)=0$，且在 $(-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$，求 $f(9)$.

解 由 $f(x)=f(x+4)$ 知 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，从而 $f(9)=f(1)$，再由 $f'(x)=|x| \quad (-2<x\leqslant 2)$ 求得

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + c_1, & -2 < x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + c_2, & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

在 $(-2,2]$ 上 $f(x)$ 可导，故连续，根据 $f(0)=0$ 及连续性可确定 $c_1=c_2=0$，即

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & -2 < x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

于是 $f(9)=f(5)=f(1)=\dfrac{1}{2}$

例 2 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{1}{t-x}}$ 的连续性，若有间断点请指出其类型。

解 当 $\sin x \neq 0$ 即 $x \neq n\pi \quad (n \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时

$$\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{1}{t-x}} = e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{\ln\sin t - \ln\sin x}{t-x}} = e^{\cot x}$$

因此当 $x \neq n\pi$ 时 $f(x)$ 有定义且连续，又由

$$\lim_{t\to n\pi+0} f(x) = \infty$$

知 $x = n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

例 3 设 $a>0, b>0$，求证方程 $x=a\sin x+b$ 要有一不超过 $a+b$ 的正根。

解 令 $f(x)=a\sin x+b-x$，显然它是连续函数。求证的是方程 $f(x)=0$ 在 $(0,a+b]$ 内有根，显然，$f(0)=b>0$，$f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a\sin(a+b)-a\leqslant 0$，若等号成立，即 $f(a+b)=0$，则 $a+b$ 即为根；若 $f(a+b)<0$，则由连续函数介值定理知 $f(x)=0$ 在 $(0,a+b)$ 内必有根，由此得证。

例 4 (积分中值定理)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

分析 不妨设在$[a,b]$上 $g(x)>0$, 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, 若记

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

则根据连续函数的介值定理,只需证明 $m\leqslant\mu\leqslant M$,其中 m,M 分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值,最大值。

而 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 可由下式得知:

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

函数极限连续考试要求[①]

数学一

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法。
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。
3. 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。
6. 理解极限的概念,理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系。
7. 掌握极限的性质及四则运算法则。
8. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法。
9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限。
10. 理解函数连续性的概念,会判别函数间断点的类型。
11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这些性质。

数学二

1. 理解函数的概念,会作函数符号运算并会建立简单应用问题中的函数关系式。
2. 了解函数的奇偶性、单调性,周期性和有界性。
3. 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及图形。
5. 理解极限的概念,理解函数的左、右极限概念及函数极限存在与左、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 理解极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限。
9. 理解函数连续性的概念,会判别函数间断点的类型。
10. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这

① 考试要求分为两个层次:关于概念、理论方面要求较高的用“理解”一词表达,要求较低的用“了解”一词表达;关于方法、运算方面要求较高的用“掌握”一词表达,要求较低的用“会”或“了解”来表达。

些性质。

数学三

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法。

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念。

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

6. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念。

7. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法。了解无穷大的概念及其与无穷小的关系。

8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则(单调有界数列有极限、夹逼定理)，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限。

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)。

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用。

数学四

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法。

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念。

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

6. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念。

7. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法。了解无穷大的概念及其与无穷小的关系。

8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则(单调有界数列有极限、夹逼定理)，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限。

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)。

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用。

(二) 一元函数微分学

内容提要与例题

1. 导数概念

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若函数 $f(x)$在点 x_0 可导，则 $f(x)$在 x_0 连续，反之不一定。

导数定义常可用来判断函数在一点是否可导。

例 1 $f(x)=x|x|$在 $x=0$ 处是否可导？

解 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}|\Delta x|=0$,因此,$f(x)=x|\Delta|$在 $x=0$ 处可导。

例 2 设 $f''(x_0)$存在,求证

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

解 利用洛必达法则及导数定义,有

$$左端=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-2h}\right]$$

$$=\frac{f''(x_0)}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}=f''(x_0)=右端$$

注:如果在上述过程的第二步继续用洛必达法则:

$$左端=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\overset{*}{=\!=}\lim_{h\to0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}\overset{**}{=\!=}f''(x_0)$$

这两步都有错。"$*$"的错误在于用到了 f''在 x_0 的附近存在,而题目只假定 f''在 x_0 存在。"$**$"的错误在于用到了 f''在 x_0 处的连续性,这更不是题目所给的条件。

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

其中 $g(x)$有二阶连续导数,且 $g(0)=1,g'(0)=-1$

(1) 求 $f'(x)$;　　　(2) 讨论 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性。

解 (1) 当 $x\neq0$ 时

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

当 $x=0$ 时,根据导数定义,有

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g'(\Delta x)+e^{-\Delta x}}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{g''(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$$

(2) 显然当 $x\neq0$ 时 $f'(x)$连续,在 $x=0$ 处,

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

因此 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

例 4 已知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$,设 $\varphi(x)=\int_0^1f(xt)dt$,求 $\varphi'(x)$,并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性。

分析 为求 $\varphi'(x)$,需知 $\varphi(x)$ 的可求导的形式,为此,需在$\int_0^1f(xt)dt$ 中令 $xt=u$,得

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$\varphi(0)=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$,其中最后一个等号是因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$,为了求$\varphi'(x)$,应对 $x\neq0$ 及 $x=0$ 分别讨论。

解 由题设$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ 知 $f(0)=0$,从而 $\varphi(0)=0$。令 $xt=u$,得

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $x\neq0$ 时 $\varphi'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,它是连续的,当 $x=0$ 时 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=1$, 而 $\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=2-1=1=\varphi'(0)$

因此 $\varphi'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$

它在$(-\infty,+\infty)$处处连续。

2. 导数的几何意义

$f'(x_0)$等于曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率(见图 2.1):$f'(x_0)=\tan\alpha\left(注意\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$

曲线 $y=f(x)$在点 M 处的切线 MT 和法线 MN 的方程分别是(设 $y_0=f(x_0)$):

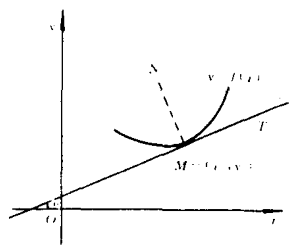

图 2.1

$$Y-y_0=f'(x_0)(X-x_0)$$

及

$$Y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(X-x_0)$$

其中(X,Y)为切线或法线上的动点坐标。

3. 基本初等函数的导数公式

(1) $(c)'=0$ (2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 为实数)

(3) $(\sin x)'=\cos x$ (4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ (6) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

(7) $(e^x)'=e^x$ (8) $(a^x)'=a^x\ln a$

(9) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ (10) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

(11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (12) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ (14) $(\operatorname{arccot} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

(15) $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (16) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

4. 导数四则运算法则

若 $u(x),v(x)$的导数都存在,则

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$; ② $(uv)'=u'v+uv'$; ③ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq0)$

5. 复合函数的导数

设 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，$y=f(u)$在点 $u=\varphi(x)$处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 处可导，且

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x) \qquad 即 \quad y'_x=y'_u u'_x$$

6. 高阶导数

$$y''=(y')', \quad 一般地, \quad y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$$

高阶导数的运算法则　设 $u(x),v(x)$在 x 点均有 n 阶导数，则

(1) $[u+v]^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$　　　　(2) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

其中

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

某些简单函数的 n 阶导数：

$(e^x)^{(n)}=e^x$，　$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$，

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，　$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\ (1+x)^{-n-1}$

例 1　求$\left(\frac{1}{x^2-2x-3}\right)^{(n)}$

解　$\left(\frac{1}{x^2-2x-3}\right)^{(n)}=\left[\frac{1}{(x-3)(x+1)}\right]^{(n)}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{4}(-1)^n n!\ [(x-3)^{-n-1}-(x+1)^{-n-1}]$

例 2　(1) 设 $z=\arctan x$，求证 $z^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$；　(2) 设 $y=x\arctan x$，求 $y^{(100)}(0)$

解　(1) 求 n 阶导数常用公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^n uv^{(n)}$$

为了能对 $z=\arctan x$ 用此公式，先求一次导数：$z'=\frac{1}{1+x^2}$，即

$$z'(1+x^2)=1$$

现对此式两端求 n 阶导数，利用上述乘法公式，得

$$(1+x^2)z^{(n+1)}+2nxz^{(n)}+n(n-1)z^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$，便得

$$z^{(n+1)}(0)=-n(n-1)z^{(n-1)}(0)$$

这是 z 在 $x=0$ 处各阶导数的一个递推公式。由 $z'(0)=1$ 知 $z'''(0)=-2\cdot1z'(0)=-2!$，$z^{(5)}(0)=-4\cdot3z'''(0)=4!$，…，由此用归纳法即可知 $z^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$

(2) 对于 $y=x\arctan x$，为求 $y^{(100)}$，仍用乘法公式：

$$y^{(100)}=(\arctan x)^{(100)}\cdot x+100(\arctan x)^{(99)}$$

于是

$$y^{(100)}(0)=100(\arctan x)^{(99)}\big|_{x=0}=100\cdot(-1)^{49}98!=-100\cdot98!$$

7. 微分的定义

设函数 $y=f(x)$在(a,b)内有定义，x 为(a,b)内一点，Δx 为自变量的改变量，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$为函数的改变量。若存在常数 A(与 Δx 无关)，使得

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x) \qquad (当\ \Delta x\to0)$$

则称 $f(x)$在点 x 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为函数$f(x)$在点 x 处的**微分**，记作 dy 或 $df(x)$

函数 $y=f(x)$在点 x 处可微的充要条件是函数$f(x)$在点 x 处可导。这时 $A=f'(x)$，于是

$$dy=f'(x)dx$$